Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

SS 2018

Probeklausur zur Mathematik für Physiker II

Vorbemerkungen:

- Zur Teilnahme an der 1. Klausur am 14.7.2018 sind eine QISPOS-Anmeldung und eine erfolgreiche Teilnahme an den Übungen erforderlich.
- Es gibt keine Anmeldung im Kursbuchungssystem mehr. Um die Hörsäle M1,M2 gleichmäßig zu füllen, wäre es sinnvoll, wenn Sie die Klausur im selben Hörsaal schreiben wie im letzten Semester.
- Auf dem Deckblatt wird es eine Art Datenschutzverzichtserklärung geben, mit der Sie sich einverstanden erklären, daß Ihre Daten [Name, Matrikelnummer, erreichte Punktzahl, Note, Erfolg in den Übungen] im Fachbereich Mathematik und Informatik gespeichert und vor dem 30.9.2028 nicht gelöscht werden. Ohne eine entsprechende Unterschrift wird die Klausur nicht korrigiert.
- Die Klausurergebnisse werden in einem verschlüsselten pdf veröffentlicht. Das Paßwort steht während der Klausur an der Tafel.
- Die Klausureinsicht für die 1. Klausur ist am 18.7.2018 von 10h15 bis 11h00 im SR 1C.
- Zur Teilnahme an der 2. Klausur am 4.10.2018 ist eine erneute QISPOS-Anmeldung erforderlich. Falls die 1. Klausur mitgeschrieben und nicht bestanden wurde, kann diese Anmeldung erst ab Eintrag der Ergebnisse der 1. Klausur erfolgen, also erst einige Tage nach Klausureinsicht.
- Die folgenden Aufgaben waren Klausuraufgaben im SS 2016.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausuren werden zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Insbesondere sind Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Papier (A4) bringen Sie bitte selbst mit. Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite (nicht neues Blatt) begonnen werden.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Alexander Hock wird die Probeklausur 9.7.2018 ab 10h15 im Hörsaal AP vorrechnen.

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Integrale (deren Konvergenz gegebenenfalls zu begründen ist)

(a) $\displaystyle\int_1^2 dx\, \frac{1}{x^2 - x - 6}$; (b) $\displaystyle\int_0^2 dx\, x \ln x$; (c) $\displaystyle\int_0^7 dx\, \sqrt[3]{1+x}$.

Aufgabe 2. Eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

definierten Basen $\mathcal{A} := (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} := (w_1, w_2)$ von $\mathbb{R}^2$ die darstellende $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. Geben Sie die darstellende Matrix von F bezüglich der Standardbasen in $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 3. Es sei $f(x) = |\sin x|$ für $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k) = \langle e_k, f\rangle$ in der Fourierreihe $(Sf)(x) := \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle e_k, f\rangle e_k(x)$, wobei $e_k(x) := e^{ikx}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $\langle f, g\rangle := \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \overline{f(x)}g(x)$.

(b) Welche Formel ergibt sich aus der Identität $f(x) = (Sf)(x)$? Hinweis zur Kontrolle: Aus dieser Formel folgt $\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \cdots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$ hat den Eigenwert 5. Bestimmen Sie die weiteren Eigenwerte (alle sind reell) von A sowie die Eigenräume zu *allen* Eigenwerten.

Aufgabe 5. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Begründen Sie, daß A nicht diagonalisierbar ist.

(b) Berechnen Sie dennoch A^s für beliebige $s \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 6. Es sei V der Vektorraum der Polynome (in einer reellen Variablen x) vom Grad ≤ 2, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\, f(x)g(x)$ für $f, g \in V$.

(a) Ermitteln Sie eine Orthonormalbasis in $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.

(b) Sei $D \in \mathrm{End}(V)$ die Ableitung, $(Df)(x) = f'(x)$, und sei D^* der bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ adjungierte Endomorphismus. Berechnen Sie $(D^*p)(x)$ für $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.