Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 18**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 26.4.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. Bestimmen Sie (durch zweifache partielle Integration) die Stammfunktionen zu:

(a) $x^2 \sin x$

(b) $\sin(ax)e^{bx}$, $\qquad a, b \in \mathbb{R}$

Zeigen Sie mit zweifacher partieller Integration:

(c) $\displaystyle\int dx\, \sin(\ln x) = \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$
(*Hinweis:* Setzen Sie $u(x) = x$ und achten Sie auf Vorzeichen.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit partieller Integration:

(a) $\displaystyle\int_0^b dx\, x^n e^x = n!(-1)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} b^k e^b$ für alle $b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\displaystyle\int_1^e dx\, \ln^n x = n!(-1)^{n+1} + e \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(*Hinweis:* Setzen Sie $u(x) = x$.)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß für $n \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$ gilt:

$$\int dx\, x^n \cos(ax) = \sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} \sin\left(ax + \frac{k\pi}{2}\right).$$

Aufgabe 4. (a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in der folgenden abgeschwächten Form: *Ist eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, stetig differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$.*

(b) Zeigen Sie: Die Dirichlet-Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1 & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist auf keinem Intervall $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ Riemann-integrierbar.