

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 3.5.2018 bis 10h00 in den Briefkästen

Blatt 3

Aufgabe 1. Bestimmen Sie:

- (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{\sin x}{1 + \cos x}$;
- (b) $\int_0^2 dx \frac{x}{\sqrt{1+4x}}$ (Substitution $t = \sqrt{1+4x}$);
- (c) $\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$ (Substitution $z = \sqrt[4]{x}$).

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

- (a) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ (Substitution $x = 2 \tan \psi$);
- (b) $\int_0^1 dx \sqrt{x(1-x)} = \frac{\pi}{8}$ (Substitution $x = \sin^2 \varphi$);
- (c) $\int_0^1 dx \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \frac{\pi}{8} \ln 2$ (Substitution $x = \tan \phi$)

(Hinweis: Zeigen und verwenden sie bei (c) $1 + \tan \varphi = \sqrt{2} \frac{\sin(\pi/4+\varphi)}{\cos \varphi}$).

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

- (a) $\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh x} = \frac{\pi}{2}$ (Substitution $e^x = t$);
- (b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$ (Substitution $x = \sin^2 \varphi$);
- (c) $\int_0^1 dx (\ln x)^2 = 2$ (partielle Integration).

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} dx \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8} = 16 \int_0^1 dy \left(\frac{y}{4(y^2-2)} + \frac{2-y}{4(y^2-2y+2)} \right) = \pi.$$

Hinweis: Es gilt $x^4 + a^4 = (x^4 + 2a^2x^2 + a^4) - 2a^2x^2 = (x^2 + a^2) - (\sqrt{2}ax)^2 = (x^2 + \sqrt{2}ax + a^2)(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2)$ oder verwenden Sie die 8. Einheitswurzel. (Das Resultat dieser Aufgabe wird auf Blatt 4 benötigt.)