

# 1 Ein kurzer Ausflug in die Funktionentheorie

Die Aussagen dieses Abschnittes lassen sich im Buch "Funktionentheorie" von Falko Lorenz in vollständiger und bewiesener Weise wiederfinden. In diesem Vortrag gehen wir, wenn wir von einer analytischen Funktion reden, von einer Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  aus, wobei  $U$  eine offene zusammenhängende Teilmenge der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  sind.

**Definition 1.1.** Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heisst komplex differenzierbar in  $z_0$ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \in \mathbb{C} \quad (1.1)$$

für alle Folgen  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in U$  mit  $z_n \rightarrow z_0$  existiert.

Dieser Grenzwert wird dann mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} =: \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0} =: f'(z_0) \quad (1.2)$$

Nun lassen sich zwei vorerst unterschiedliche Klassen von Funktionen definieren:

**Definition 1.2.** Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heisst analytisch in  $U$ , wenn sie in jedem Punkt  $z_0 \in U$  in eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1.3)$$

entwickelbar ist.

**Definition 1.3.** Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heisst holomorph in  $U$ , wenn sie in jedem Punkt  $z_0 \in U$  komplex differenzierbar ist.

Nun gibt es einen entscheidenden Satz, der einen Zusammenhang zwischen diesen Funktionen herstellt, der zum Beispiel für Funktionen auf  $\mathbb{R}$  grundlegend falsch ist.

**Satz 1.1.** Für eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  sind äquivalent:

1.  $f$  ist holomorph in  $U$ .
2.  $f$  ist analytisch in  $U$ .

Dies ist nun eine wesentliche Vereinfachung im Umgang mit dieser *einen* Klasse von Funktionen, da ihre Identifikation sich auf das Prüfen von Differenzierbarkeit reduzieren lässt.

**Beispiele:** Einige Holomorphe Funktionen und ihre Definitionsbereiche

$$z \quad \mathbb{C} \quad (1.4)$$

$$\sum_{n=0}^N a_n z^n \quad \mathbb{C} \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{z} \quad \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (1.6)$$

$$e^{\frac{1}{z-1+2i}} \quad \mathbb{C} \setminus \{1-2i\} \quad (1.7)$$

$$\text{Log}(z) \quad \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_{\leq 0}\} \quad (1.8)$$

Nun lässt sich die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  auch als  $\mathbb{R}^2$  auffassen, wobei  $z = x + iy$  definiert wird, für  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ . Damit lassen sich nun auch alle Funktionen  $f(z)$  als Funktionen  $f(z) = u(z) + iv(z)$  bzw.  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T$  auffassen. Wir haben also eine Koordinatentransformation von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{R}^2$ , wobei wir auf  $\mathbb{C}$  dann noch zusätzlich  $\bar{z}$  als unabhängige Variable auffassen müssen. Wir schreiben von hier an  $U$  auch für die korrespondierende Teilmenge im  $\mathbb{R}^2$ , da aus dem Zusammenhang klar wird, welche Menge gemeint ist.

**Definition 1.4** (Wirtinger Kalkül). *Sind die Komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  und der  $\mathbb{R}^2$  über die Koordinatentransformation*

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

*miteinander identifiziert, so schreiben wir die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  als  $f(z) = u(z) + iv(z)$  mit  $u(z) = \Re(f(z))$  und  $v(z) = \Im(f(z))$ . Damit schreiben sich nun die Ableitung nach  $z$  und  $\bar{z}$  als*

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \quad (1.10)$$

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \quad (1.11)$$

Nun lässt sich eine holomorphe Funktion auf  $U$  mit einer total differenzierbaren Funktion auf  $U$  vergleichen. Diese sind, mit der oben beschriebenen Identifikation gleich, falls die total differenzierbare Funktion zusätzlich die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

**Definition 1.5** (Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichungen(CR-DGL)). *Für eine total differenzierbare Funktion  $f : U \Rightarrow \mathbb{R}^2$  sind die CR-DGL gegeben durch*

$$\partial_x u = \partial_y v \quad (1.12)$$

$$\partial_y u = -\partial_x v. \quad (1.13)$$

**Satz 1.2.** Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann holomorph in  $U$ , wenn sie stetig partiell Differenzierbar ist und die CR-DGL'en erfüllt.

Dies lässt sich nun mithilfe des Wirtinger-Kalküls umformulieren zu folgendem Satz.

**Satz 1.3.** Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph in  $U$ , wenn

$$\partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) = 0 \quad (1.14)$$

gilt. Für diese Fall gilt dann

$$f'(z) = \partial_z f(z). \quad (1.15)$$

An dieser Stelle lässt sich nun auch der Begriff der Antiholomorphen Funktion definieren.

**Definition 1.6.** Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heisst antiholomorph, falls

$$\partial_z f(z, \bar{z}) = 0. \quad (1.16)$$

Für diese Fall gilt dann

$$f'(\bar{z}) = \partial_{\bar{z}} f(\bar{z}). \quad (1.17)$$

**Beispiele:** Einige (anti-)holomorphe Funktionen und ihre Definitionsbereiche

$$z \quad \text{holomorph auf} \quad \mathbb{C} \quad (1.18)$$

$$\sum_{n=0}^N a_n \bar{z}^n \quad \text{antiholomorph auf} \quad \mathbb{C} \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{z} + \bar{z} \quad \text{weder noch} \quad (1.20)$$

$$e^{\frac{1}{z-1+2i}} \quad \text{holomorph auf} \quad \mathbb{C} \setminus \{1-2i\} \quad (1.21)$$

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{weder noch} \quad (1.22)$$

Nun gibt es Funktionen, wie zum Beispiel  $\frac{1}{z}$  oder  $\frac{1}{z^5}$ , die Holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  sind. Diese Funktionen haben eine isolierte Singularität in 0.

**Definition 1.7** (Isolierte Singularitäten). Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  hat im Punkt  $z_0$  eine isolierte Singularität, wenn sie auf  $U \setminus \{z_0\}$  holomorph ist. Diese isolierten Singularitäten lassen sich in drei Klassen aufteilen. Eine isolierte Singularität heisst

1. Hebbare Singularität, wenn sich die Funktion  $f$  in  $z_0$  analytisch fortsetzen lässt.
2. Pol, wenn die Funktion  $f$  in  $z_0$  bestimmt divergiert, also  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .

3. *Wesentliche Singularität, wenn sie weder hebbbar noch Pol ist.*

Desweiteren lassen sich nun Aussagen über die Potenzreihenentwicklungen machen, die mit den Polen zusammenhängen.

**Satz 1.4.** *Ist die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so lässt sich der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklungen soweit vergrößern, (wenn  $U$  als in  $\mathbb{C}$  eingebettet verstanden wird,) bis sich eine nicht hebbare Singularität im Konvergenzkreis befindet. Diese Entwicklung ist dann auch Eindeutig.*

Ausserdem lässt sich um eine Isolierte Singularität die Funktion in eine Laurentreihe entwickeln.

**Satz 1.5.** *Wenn die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z_0$  eine Singularität hat, lässt sie sich um diesen Punkt in eine Laurentreihe entwickeln, also*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n. \quad (1.23)$$

*Hierbei lässt sich die Ordnung  $\text{ord}_f(z_0) = \min\{n \in \mathbb{Z} | a_n \neq 0\}$  definieren.*

Nun können wir also eine Funktion die bis auf wenige Punkte (diskrete abgeschlossene Teilmenge) holomorph ist, in eine Laurentreihe entwickeln. Diese Funktionen nennt man meromorph. Für die Klassifikation nach der Ordnung gilt dann

**Definition 1.8.** *Wenn die nichtverschwindende Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z_0$  in eine Laurentreihe entwickelt wird, so gilt*

1.  $\text{ord}_f(z_0) \in \mathbb{Z}_{>0}$ :  *$f$  hat in  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $\text{ord}_f(z_0)$ .*
2.  $\text{ord}_f(z_0) = 0$ :  *$f$  ist um  $z_0$  biholomorph. (Konvergenzradius)*
3.  $\text{ord}_f(z_0) \in \mathbb{Z}_{<0}$ :  *$f$  hat in  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $-\text{ord}_f(z_0)$ .*
4.  $\text{ord}_f(z_0) \notin \mathbb{Z}_{<0}$ :  *$f$  hat in  $z_0$  eine wesentliche Singularität.*

## 2 Konforme Killing Vektorfelder und Transformationen im Fall des $\mathbb{R}^{2,0}$

Wie wir schon gesehen haben, ist ein Vektorfeld  $X$  auf einer offenen Menge  $M \subset \mathbb{R}^{2,0}$  ein Killing Vektorfeld, falls es einen konformen Faktor  $\kappa : M \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, der die Gleichung

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \kappa = 0 \quad (2.1)$$

erfüllt und für  $X$

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \kappa g_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

gilt. Beim letzten mal haben wir gesehen, dass eine koforme Transformation  $f(x, y) : M \rightarrow M' \subset \mathbb{R}^{2,0}$  ein Vektorfeld durch eine Kurve  $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = (x_0, y_0)^T$  mittels

$$X_\mu = \frac{d}{dt} ((f \circ \gamma)(t))|_{t=0} \quad (2.3)$$

induziert. Genauso induziert auf diese Weise das konforme Vektorfeld eine konforme Transformation durch Integration dieser gewöhnlichen Differentialgleichung nach der Zeit und Wahl eines festen Zeitparameter. (I.d.R.  $t = 1$ ). Dies entspricht der Exponentialabbildung in der Differentialgeometrie.

Aus dem Vorherigen Abschnitt lässt sich schließen, dass eine beliebige holomorphe Funktion eine konformes Vektorfeld induziert.

**Satz 2.1.** *Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^{2,0}$  holomorph (oder antiholomorph) und nichtverschwindend, dann ist  $f(z) = f(x + iy) \cong f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \cong (u(x, y), v(x, y))^T =: (X^1, X^2)^T$  ein konformes Vektorfeld mit dem konformen Faktor  $\kappa = 2\Re(\partial_z X)$ .*

**Beweis:**

Damit  $X$  ein konformes Vektorfeld ist, muss sie die Gleichung

$$g_{\mu\nu}\kappa = X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} \quad (2.4)$$

erfüllen. Schreiben wir nun die drei resultierenden Gleichungen aus, und verwenden dabei  $X^\mu = X_\mu$ , da wir im Euklidischen  $\mathbb{R}^{2,0}$  sind, erhalten wir

$$\kappa = 2u_x \quad (2.5)$$

$$\kappa = 2v_y \quad (2.6)$$

$$0 = u_x v_y + u_x v_x \quad (2.7)$$

Diese sind erfüllt, da wir  $f$  als holomorph vorausgesetzt hatten, also  $u_x = v_y$   $u_y = -v_x$  (oder antiholomorph  $u_x = -v_y$  und  $u_y = v_x$ ). Desweiteren haben wir

$$\partial_z X = u_x + iv_y = v_y - iu_y \quad (2.8)$$

und damit unseren konformen Faktor.

□

Nun haben wir also eine unendliche Vielfalt an konformen Vektorfeldern. Insgesamt haben wir für jeden Faktor der Laurentreihe, wenn wir vorerst beliebige  $M$  zulassen. Ausserdem lässt sich in diesem Fall der holomorphe Teil des Killing Vektorfeldes schreiben als  $X(z) = f(z)\partial_z$  und der antiholomorphe Teil als  $X(z) = g(\bar{z})\partial_{\bar{z}}$

Von hier an fassen wir die induzierte konformen Vektorfelder als holomorphe Funktionen  $X(z)$  auf.

**Satz 2.2.** Die folgenden Vektorfelder sind Killing Vektorfeldern und induzieren die angegebene

1. Translation:  $X^{\text{T}(c)}(z) = c$
2. Rotation:  $X^{\text{R}(\theta)}(z) = i\theta z$
3. Dilatation:  $X^{\text{D}(\lambda)}(z) = \lambda z$
4. Inversion:  $X^{\text{I}(b)}(z) = z^2 b$

**Beweis:**

Integration ergibt uns

$$\text{T}_c(z) := \phi_1^{\text{T}(c)}(z) = z + c \quad (2.9)$$

$$\text{R}_\theta(z) := \phi_1^{\text{R}(\theta)}(z) = e^{i\theta} z \quad (2.10)$$

$$\text{D}_\lambda(z) := \phi_1^{\text{D}(\lambda)}(z) = e^\lambda z \quad (2.11)$$

mit den konformen Faktoren

$$\kappa^{\text{T}(c)} = 0 \quad (2.12)$$

$$\kappa^{\text{R}(\theta)} = 2\Re(i\theta) = 0 \quad (2.13)$$

$$\kappa^{\text{T}(\lambda)} = 2\Re(\lambda) = 2\lambda. \quad (2.14)$$

Für die Inversion müssen wir etwas arbeiten. Hier gilt dann

$$\dot{z} = z^2 b \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow \int_z^{\phi_1^{\text{I}(b)}(z)} \frac{dz}{z^2} = \int_0^t dtb \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{\phi_1^{\text{I}(b)}(z)} = bt \quad (2.17)$$

$$\Rightarrow \text{I}_b(z) := \phi_1^{\text{I}(b)}(z) = \frac{z}{1 - bz}. \quad (2.18)$$

Das ergibt dann den konformen Faktor

$$\kappa^{\text{I}(b)} = 4\Re(zb) \quad (2.19)$$

□

Generell lässt sich jeder Summand des komplexen Vektorfeldes  $X(z)$  als Erzeuger einer Transformation interpretieren.

**Definition 2.1.** Die Generatoren der holomorphen konformen Transformationen nahe der Identität sind gegeben durch

$$l_n := -z^{n+1} \partial_z \quad (2.20)$$

sowie die antiholomorphen Generatoren durch

$$\bar{l}_n := -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} \quad (2.21)$$

### 3 Die Riemansche Sphäre und die konforme Gruppe des $\mathbb{R}^{2,0} \cup \{\infty\}$

**Definition 3.1.** Die konforme Gruppe ist die Menge der konformen Transformationen, die auf der Einpunktkompaktifizierung von  $\mathbb{R}^{2,0}$ , also  $\mathbb{R}^{2,0} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$  global definiert sind.

Nun lässt sich die Einpunktkompaktifizierung des  $\mathbb{R}^{2,0}$ , der hier mehr als  $\mathbb{C}$  betrachtet wird, beschreiben durch die Riemansche Sphäre. Diese ist die Sphäre, in der  $\mathbb{C}$  durch die Polarprojektion mit fast der ganzen  $\mathbb{S}^2$  identifiziert wird.

**Definition 3.2.** Die Sphäre wird nun eingebettet in den  $\mathbb{R}^{3,0}$  in zwei offene Teilmengen aufgeteilt,  $U_N := \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  und  $U_S := \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ . Diese offenen Teilmengen werden nun auf eine Ebene parallel zur  $(x, y)$  Ebene projiziert, die sich um  $H$  unterhalb des Sphärenmittelpunktes befindet, indem eine Gerade durch den entfernten und den abgebildeten Punkt gezogen wird und dieser mit dem Schnittpunkt identifiziert wird.

$$(x, y, z) \in U_N \xrightarrow{\phi_N^H} \left( \frac{1+H}{1-z}x, \frac{1+H}{1-z}y \right) \in \mathbb{R}^{2,0}$$

$$(x, y, z) \in U_S \xrightarrow{\phi_S^H} \left( \frac{1-H}{z+1}y, -\frac{1-H}{z+1}y \right) \in \mathbb{R}^{2,0}$$

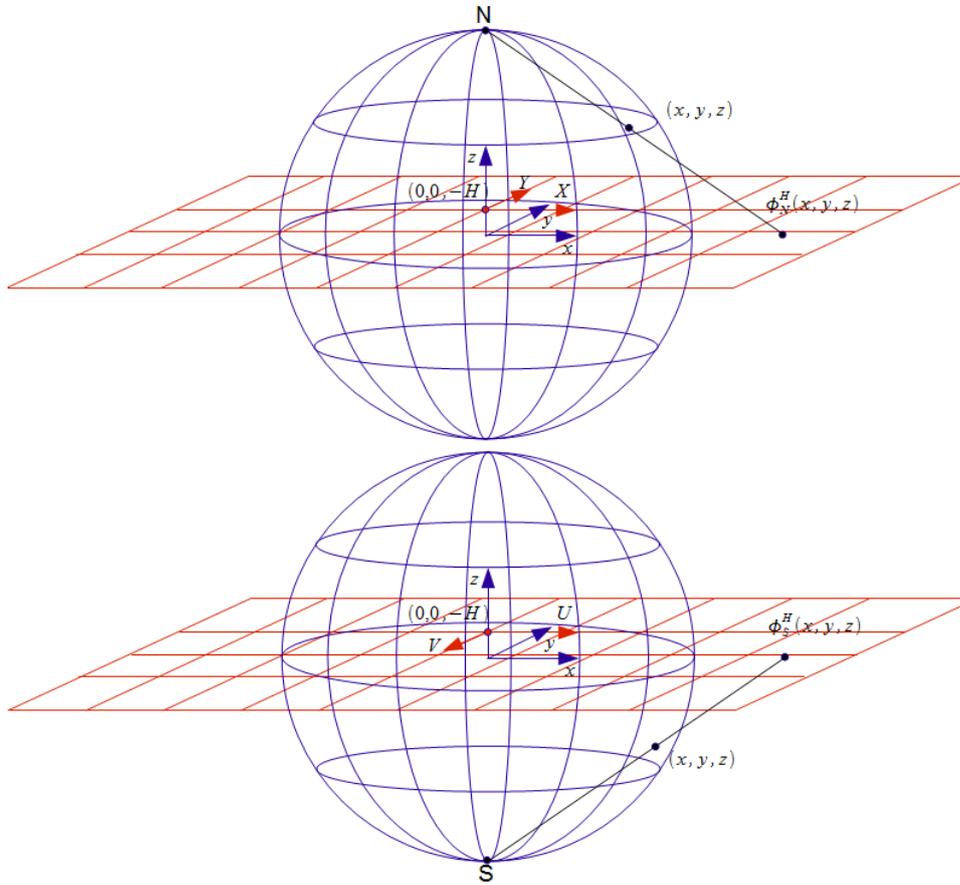


Figure 1: ( Projektion der Sphäre auf die Ebene.)

Zu beachten ist hierbei, dass für die Projektion von  $U_S$  die Ebene *um die x-Achse gedreht wurde*, und die richtige Orientierung bezüglich des ausgelassenen Punktes zu behalten.

Nun wird die Sphäre durch zwei verschiedene Ebenen dargestellt, die beide ihre eigenen Koordinaten haben. Jedoch sind beide Ebenen miteinander verbunden, da sie auf  $U_N \cap U_S$  denselben Punkten verschiedene Koordinaten zuordnen.

**Satz 3.1.** Für den Übergang der einen Koordinaten in die anderen gilt

$$(\phi_N^0 \circ \phi_S^{0-1})(x, y) = (\phi_S^0 \circ \phi_N^{0-1})(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad (3.1)$$

**Beweis:**

Die Koordinaten in  $(x, y) \in \phi_S(U_S)$  kamen für ein passendes  $\alpha \in \mathbb{R}$  von einem Punkt  $(\tilde{H} = 1 - H)$

$$\phi_S^{-1}(x, y) = (\alpha x, -\alpha y, \alpha \tilde{H} - 1), \quad (3.2)$$

wobei nun

$$\alpha^2(x^2 + y^2) + (\alpha\tilde{H} - 1)^2 = 1 \quad (3.3)$$

gilt. Dies lässt sich schnell umformen zu

$$\alpha(\alpha(x^2 + y^2 + \tilde{H}^2) - 2\tilde{H}) = 0 \quad (3.4)$$

Damit muss  $\alpha = \frac{2\tilde{H}}{x^2 + y^2 + \tilde{H}^2}$  gelten, da  $\alpha = 0$  den Koordinaten  $(x, y) = (\infty, \infty)$  entsprechen würde. Dieser Punkt wird für  $H = 0$  abgebildet auf

$$\begin{aligned} \phi_N(\alpha x, -\alpha y, \alpha - 1) &= \left( \frac{\alpha x}{2 - \alpha}, -\frac{\alpha y}{2 - \alpha} \right) \\ &= \left( \frac{x}{\frac{2}{\alpha} - 1}, -\frac{y}{\frac{2}{\alpha} - 1} \right) \\ &= \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die umgekehrte Richtung folgt analog.

□

Fassen wir nun die beiden Räume  $\mathbb{R}^{2,0}$  als  $\mathbb{C}$  auf, transformieren die Koordinaten so, dass

$$(\phi_N^0 \circ \phi_S^{0-1})(z) = \frac{1}{z}. \quad (3.6)$$

Um nun die konforme Gruppe zu klassifizieren, suchen wir die holomorphen Killing Vektorfelder, die global definiert sind.

Es ist klar, dass  $l_n = -z^{n+1}\partial_z$  für  $n \geq -1$  global auf  $\mathbb{C}$  definiert. Nun gilt es zu prüfen, wie diese Generatoren sich auf der anderen Seite der Sphäre, also in den anderen Koordinaten verhalten. Dazu transformieren wir zu  $w = \frac{1}{z}$  und erhalten

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z = -w^{-n-1}(-w^2)\partial_w = w^{1-n}\partial_w. \quad (3.7)$$

Diese Felder sind nun global definiert für  $n \leq 1$ . Damit haben wir die konforme Gruppe  $\{l_{-1}, l_0, l_1\}$ .

**Satz 3.2.** *Die Konforme Gruppe des  $\mathbb{R}^{2,0} \cup \{\infty\}$  ist nach Satz 2.2 gegeben durch die Transformationen  $T_c$ ,  $R_\theta$ ,  $D_\lambda$  und  $I_b$  mit  $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$  und  $c, b \in \mathbb{C}$ .*

## 4 Die Möbius-Transformationen

**Definition 4.1.** *Die Möbiustransformationen sind bestimmt durch die 4 komplexen Zahlen  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  und der Vorschrift*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}. \quad (4.1)$$

Nun wollen wir noch wissen, wieviele solcher Transformationen es gibt. Dazu betrachten wir einige ihrer Eigenschaften. Wir bezeichnen die Transformation mit einer Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (4.2)$$

Dies ist sehr suggestiv, denn es zeigt sich folgende Tatsache.

**Satz 4.1.** Die Hintereinanderausführung zweier Möbiustransformationen ist äquivalent zur Ausführung der Möbiustransformation des resultierenden Matrixproduktes. Also

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) (z) = \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) (z) \quad (4.3)$$

Einfaches Nachrechnen beweist diese Aussage. Es ist leicht zu sehen, dass durch diese Eigenschaft die Transformation nur dann umkehrbar ist, wenn die Determinante der Matrix nicht verschwindet. Ausserdem erzeugen beliebige Vielfache der Matrix die gleiche Abbildung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix} (z) \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad (4.4)$$

Durch diese Skaleninvarianz können wir die Determinante zu 1 wählen. Ausserdem gibt es noch eine Vorzeicheninvarianz, denn für  $r = -1$  ändert sich die Transformation auch nicht.

Damit haben wir die konforme Gruppe identifiziert, als Matrizen mit einer Determinante von 1 und einer Vorzeichen invarianz.

**Satz 4.2.** Die konforme Gruppe der  $\mathbb{S}^2$  ist  $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

**Beweis** Wir sehen leicht, dass sich jede Transformation der konformen Gruppe durch eine Möbiustransformation darstellen lässt:

$$\begin{aligned} T_c &= \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R_\theta &= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D_\lambda &= \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\lambda} \end{pmatrix} \\ I_b &= \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{b} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Andersrum ist jede Möbiustransformation durch die Elemente der konformen Gruppe des  $\mathbb{R}^{2,0} \cup \{\infty\}$  darstellbar. Dazu kombinieren wir die Transformationen der konformen Gruppe des  $\mathbb{R}^{2,0}$  in der folgenden Art und Weise zu

$$I(z) := (R_\pi \circ T_1 \circ I_1 \circ T_1)(z) = \frac{1}{z} \quad (4.6)$$

$$M_a(z) := (R_{\arg(a)} \circ D_{\ln(|a|)})(z) = az \text{ mit } a \in \mathbb{C} \quad (4.7)$$

$$T_b(z) = z + b \text{ mit } a \in \mathbb{C}. \quad (4.8)$$

Die allgemeine Möbiustransformation sind dann durch die folgende Kombination von Operationen gegeben

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) &= \left( T_{\frac{a}{c}} \circ M_\mu \circ I \circ T_d \circ M_c \right) (z) \\ \text{mit } \mu &= \frac{bc - ad}{c}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dies sieht man durch nachrechnen:

$$\begin{aligned} \left( T_{\frac{a}{c}} \circ M_\mu \circ I \circ T_d \circ M_c \right) (z) &= \left( T_{\frac{a}{c}} \circ M_\mu \right) \left( \frac{1}{cz + d} \right) \\ &= T_{\frac{a}{c}} \left( \frac{\mu}{cz + d} \right) \\ &= \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Menge der Möbiustransformationen gleich der Gruppe der konformen Gruppe ist.

□

Jetzt wollen wir noch ein geometrisches Verständnis der Möbiustransformationen erhalten. Dazu schauen wir uns die leichter fassbaren Transformationen der konformen Gruppe an, die sich, wie gezeigt, gleich den Möbiustransformationen sind.

Nun betrachten wir die Wirkung der einzelnen Terme auf die Riemannsche Sphäre. Dazu fixieren wir unsere Betrachtungen vorerst auf  $U_N$ .

Die Transformation  $M_c$  bewirkt eine Drehung um den Winkel von  $\arg(c) =: \theta$  und einer Streckung um  $|c| =: R$ . Geometrisch entspricht das einer Drehung der Sphäre um die Nord-Süd-Achse um ebendiesen Winkel. Dies sieht man durch die folgende Betrachtung:

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{R_\theta} & e^{i\theta} z \\ \phi_N^{0-1} \downarrow & & \downarrow \phi_N^{0-1} \\ \left( \frac{2z}{|z|^2 + 1}, 1 - \frac{2}{|z|^2 + 1} \right) & \xrightarrow{\hat{R}_\theta} & \left( e^{i\theta} \frac{2z}{|z|^2 + 1}, 1 - \frac{2}{|z|^2 + 1} \right) \end{array} \quad (4.11)$$

Die Streckung um den Faktor  $R$  äußert sich, um ein senken der Ebene um die Höhe  $H = \frac{R+1}{R}$ , dies sieht man durch folgende Überlegung

$$\begin{array}{ccc}
 z & \xrightarrow{T_{\text{In}(R)}} & Rz \\
 \phi_{\text{N}}^{0^{-1}} \downarrow & & \downarrow \phi_{\text{N}}^{0^{-1}} \\
 \left( \frac{2z}{|z|^2 + 1}, 1 - \frac{2}{|z|^2 + 1} \right) & \xrightarrow{\hat{T}_{\text{In}(R)}} & \left( \frac{2zR}{|z|^2 R^2 + 1}, 1 - \frac{2}{|z|^2 R^2 + 1} \right) \\
 \phi_{\text{N}}^{0^{-1}} \uparrow & & \updownarrow H = \frac{R+1}{R} \\
 z & \xrightarrow{\phi_{\text{N}}^{H^{-1}}} & \left( \frac{2z(H+1)}{|z|^2 + (H+1)^2}, 1 - \frac{2z(H+1)^2}{|z|^2 + (H+1)^2} \right).
 \end{array} \tag{4.12}$$

Die Translation bewirkt offensichtlich eine Translation um  $a$  des Sphärenmittelpunktes um  $-a$ .

Die Inversion  $\frac{1}{z}$  ist identisch mit der Koordinatentransformation von  $\phi_{\text{N}}(U_{\text{N}})$  nach  $\phi_{\text{S}}(U_{\text{S}})$ . Damit entspricht dies einer Spiegelung der Sphäre durch die Ebene senkrecht zur Nord-Süd-Achse.

Damit ist die Möbiustransformation identisch zu einer manipulation der Riemannschen Sphäre, von der aus projiziert wird.