Einführung in die konforme Feldtheorie

1. Symmetrien

Konforme (Quanten-)Feldtheorie ist ein sich seit 1984 (initiiert durch [1]) entwickelndes Gebiet der modernen Physik, das wichtige Impulse für verschiedene Bereiche der Mathematik liefert. Im Gegensatz zu allen anderen Quantenfeldtheorien gibt es eine mathematisch rigorose Formulierung als *Vertex (Operator-)Algebren*, und diese hängen eng zusammen mit unendlich-dimensionalen Lie-Algebren (Kac-Moody-Algebren), endlichen Gruppen (Monstergruppe) und modularen Formen (Charaktere von konformen Darstellungen).

Eines der Grundprinzipien der Physik ist das der *Symmetrie* physikalischer Modelle und Gesetze. Es ist z.B. naheliegend zu fordern, daß in jedem Punkt des Universums und für jede Orientierung des Tangentialraums die gleichen Naturgesetze gelten, d.h. die Naturgesetze sind invariant unter Translation der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit und Rotation im Tangentialraum. Symmetrien bilden eine Gruppe und haben nichttriviale Konsequenzen. Nimmt man als Mannigfaltigkeit den Minkowski-Raum ($\mathbb{R}^4$ mit indefiniter Metrik), dann liefert die Rotationsinvarianz die der Intuition widersprechenden Konsequenzen der speziellen Relativitätstheorie.

Etwas qualitativ neues entsteht, wenn neben Translations- und Rotationsinvarianz auch Invarianz unter Skalentransformationen gefordert wird. Damit ist gemeint, daß ein System, in dem alle Längen um einen Faktor $c > 0$ skaliert werden, sich identisch zum ursprünglichen System verhält. Es zeigt sich, daß nahezu alle skaleninvarianten Modelle sogar invariant unter einer größeren Symmetriegruppe sind: der *Gruppe der konformen Transformationen*, d.h. der winkelerhaltenden Transformationen. Zu Rotation, Translation, Dilatation kommt als spezielle konforme Transformation die Inversion an einer Sphäre hinzu. In 2 Dimensionen lassen sich alle diese Transformationen zur Möbius-Transformation zusammenfassen, die besondere Eigenschaften hat.

Die wenigsten physikalischen Modelle sind skaleninvariant. Z.B. hat ein Atom oder ein biologisches System immer eine charakteristische Länge: ein Wasserstoffatom mit 1mm Durchmesser oder einen 10m langen Menschen kann es nicht geben. Dennoch gibt es Beispiele für Skaleninvarianz. Eine wichtige Klasse sind *Phasenübergänge 2. Ordnung*: Die Siedetemperatur (z.B. von Wasser) ist druckabängig. Es gibt einen kritischen Druck, bei dem am Siedepunkt der Unterschied zwischen flüssig und gasförmig verschwindet: Ein solches kritisches (unendlich ausgedehntes) System besitzt Dampfblasen jeder Größe, und in jeder Dampfblase Flüssigkeitstropfen jeder (kleineren) Ausdehnung. Ein weiteres Beispiel stellen Ferromagneten an ihrer kritischen Temperatur T_c dar. Unterhalb T_c zeigen alle Spins in die gleiche Richtung; oberhalb T_c sind die Spins ungeordnet, und exakt bei $T = T_c$ gibt es geordnete Bereiche jeder Größe und Richtung. Beide Fälle sind Beispiele der statistischen Physik, was im wesentlichen das gleiche ist wie Quantenfeldtheorie. Es handelt sich also um Systeme mit unendlich-vielen Freiheitsgraden, welche charakteristische statistische bzw. Quanten-Fluktuationen zeigen. Nach dem Noether-Theorem sind Symmetrien immer mit Erhaltungssätzen verbunden. Belavin, Polyakov und Zamolodchikov konnten 1984 zeigen [1], daß die konforme Symmetrie am kritischen Punkt auf unendlich viele Erhaltungssätze führt, welche das System der statistischen Physik vollständig bestimmen.

Die typische Längenskala eines Systems heißt charakteristische Länge, das Inverse der charakteristischen Länge wird mit der Masse identifiziert. Entspechend sind masselose Modelle Kandidaten für konforme Invarianz. Ist die zu untersuchende Energieskala sehr viel größer als alle Massen im System, d.h. die Massen in guter Näherung identisch Null, so kann konforme Invarianz vorliegen. In realistischen Quantenfeldtheorien wie z.B. der QCD ist das Skalenverhalten bei hohen Energien komplizierter; man beschreibt es durch die Renormierungsgruppe. Es gibt jedoch ein ganz wichtiges Modell der Hochenergiephysik, in dem die konforme Symmetrie eine fundamentale Rolle spielt: die String-Theorie. Hier nimmt man an, daß Elementarteilchen nicht punktförmig sind, sondern durch eine eindimensionale (offene oder geschlossene) Saite zu beschreiben sind. Ihre zeitliche Bewegung überstreicht dann eine zweidimensionale Fläche, genannt Weltfläche. Die Forderung der konformen Invarianz der String-Theorie (bei Interpretation als Quantenfeldtheorie auf dieser Weltfläche) liefert dann entscheidende Strukturaussagen für die String-Theorie, und sogar für die Mathematik.

2. Konforme Abbildungen

Mittelfristiges Ziel ist die Beschreibung konform-invarianter Quantenfeldtheorien. Dazu sind zunächst die konforme Grupppe zu definieren und ihre Eigenschaften zu studieren. Das geschieht in den Vorträgen 2–6 und benötigt im wesentlichen nur elementare Mathematik. Vorgreifend sei ohne Erläuterung der Objekte definiert:

Definition 1 *Seien (M,g) und $(M'g')$ pseudo-Riemannsche d-dimensionale Mannigfaltigkeiten und $U \subset M$, $V \subset M'$ offen. Eine glatte Abbildung $\phi : U \to V$ heißt* <u>*konform*</u>*, falls es eine glatte Funktion $\Omega : U \to \mathbb{R}_+$ gibt mit $\phi^* g' = \Omega^2 g$.*

In den ersten Vorträgen werden die konformen Transformationen klassifiziert. Während es in ≥ 3 Dimensionen und im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ nur die oben erwähnten Erweiterungen der Euklidischen Bewegungen gibt, ist die physikalisch wichtige Situation des 2-dimensionalen Minkowski-Raums $\mathbb{R}^{1,1} \ni (t,r)$ sehr viel reichhaltiger. Hier ist der metrische Tensor

$$g = dt \otimes dt - dx \otimes dx = d(t+x) \otimes_s d(t-x) \;,$$

so daß jeder Diffeomorphismus $t+x = u \mapsto u'(u)$ und $t-x = v \mapsto v'(v)$ konform ist. Dabei heißen u,v Lichtkegelkoordinaten. Die konforme Gruppe von $\mathbb{R}^{1,1}$ ist deshalb $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Diff}(\mathbb{R})$. Translation, Rotation, Dilatation und spezielle konforme Transformation bilden eine Untergruppe, die *Möbius-Gruppe* der gebrochen-rationalen Transformationen $v \mapsto \frac{av+b}{cv+d}$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$.

Nach Kompaktifizierung $z_\pm = \frac{1+i(t\pm x)}{1-i(t\pm x)}$ (Cayley-Transformation) lassen sich die konformen Transformationen mit $\mathrm{Diff}(S^1) \times \mathrm{Diff}(S^1)$ identifizieren. Man zeigt dann, daß infinitesimale Diffeomorphismen, die also die Lie-Algebra von $\mathrm{Diff}(S^1)$ bilden, gegeben sind durch den Vektorraum $\mathrm{Vect}(S^1)$ aller glatten Vektorfelder auf S^1. Jedes solche Vektorfeld X besitzt eine Fourier-Entwicklung

$$X = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n L_n \ , \qquad L_n := -ie^{-in\vartheta}\frac{d}{d\vartheta} = z^{1-n}\frac{d}{dz} \ .$$

Die Lie-Algebra $\mathbb{C}\{L_n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ heißt *Witt-Algebra*; dabei gilt $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$.

3. Quantenfelder

Wir folgen hier [2].

Als erste erfolgreiche Quantenfeldtheorie (QED) wurde um 1947/48 die Quantenelektroodynamik von Bethe, Dyson, Feynman, Schwinger und Tomonaga ausgearbeitet. Etwas später hat Wightman ein Axiomensytem für Quantenfelder vorgeschlagen, welches die grundlegenden physikalischen Strukturen implementiert. Die Axiome garantieren:

- Lokalität (raumartig getrennte Quantenfelder sind kausal unabhängig)
- Kovarianz unter der Wirkung der Poincaré-Gruppe (Translation+Rotation)
- Stabilität (es gibt einen Energie-Grundzustand, das Vakuum)
- Unitarität (es existiert eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation)

Diese Forderungen erscheinen unverzichtbar, dennoch gibt es kein nichttriviales Bespiel einer QFT in 4 Dimensionen. Es gibt zwei äquivalente Realisierungen der Axiome:

1. eines für die Felder selbst als operatorwertige Distributionen $f \mapsto \phi(f) = \int dx f(x)\phi(x)$, wobei f eine Testfunktion ist und $\phi(f)$ ein unbeschränkter Operator im Hilbert-Raum ist,
2. eines für die Gesamtheit der Vakuumerwartungswerte (= Korrelationsfunktionen)
$$\langle \Omega, \phi_1(f_1)\cdots\phi_n(f_n)\Omega\rangle = \int dx_1\cdots dx_n\, f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) W^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) \ .$$

Dabei ist (1.⇒2.) klar, falls der Vakuuumzustand Ω festgelegt ist; die Umkehrung (2.⇒1.) ist das Wightmansche Rekonstruktionstheorem. Im Sinne des Lebesgue-Integrals muß $W^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$ für zusammenfallende Orte $x_i = x_j$ nicht erklärt werden!

In konformen Feltheorien ist nur das Axiom der Poincaré-Kovarianz auf konforme Kovarianz zu verallgemeinern. Man nimmt für die Felder ϕ_i die Existenz von Skalendimensionen $h_i \geq 0$ an, so daß

$$W^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \Big(\det\Big(\frac{\partial x^g}{\partial x}\Big)_{x=x_1}\Big)^{\frac{h_1}{d}} \cdots \Big(\det\Big(\frac{\partial x^g}{\partial x}\Big)_{x=x_n}\Big)^{\frac{h_n}{d}} W^{(n)}(x_1^g,\ldots,x_n^g) \ ,$$

wenn x^g die Wirkung eines Elements g der konformen Gruppe auf x ist. Das freie Boson und das freie Fermion erfüllen in 3+1 Dimensionen die üblichen Wightman-Axiome; im masselosen Fall auch die konformen Wightman-Axiome. Wir sehen uns das im 7. und 8. Vortrag an. Für das freie Boson läßt sich in 1+1 Dimensionen die 2-Punktfunktion $W^{(2)}(x_1, x_2)$ nicht definieren, deshalb sollen die wesentlichen Ideen für das freie Fermion skizziert werden. In $1+1$ Dimensionen zerfällt das freie Fermion in 2 chirale Anteile ψ_L, ψ_R, welche die Modenentwicklung

$$\psi_R(v) = \int_0^\infty d\omega \big(b(\omega)e^{-i\omega v} + d^\dagger(\omega)e^{i\omega v}\big) , \qquad v = t - x$$
$$\psi_L(u) = \int_0^\infty d\omega \big(b(-\omega)e^{-i\omega u} + d^\dagger(-\omega)e^{i\omega u}\big) , \qquad u = t + x$$

besitzen. Dabei wird mit † die Bildung des adjungierten Operators bezeichnet. Es gelten folgende Antikommutatorrelationen: $\{b(\omega), b^\dagger(\omega')\} = \{d(\omega), d^\dagger(\omega')\} = \frac{1}{(2\pi)}\delta(\omega - \omega')$. Alle anderen Antikommutatoren verschwinden. Das Vakuum erfüllt $b(\omega)\Omega = 0 = d(\omega)\Omega$. Man findet die 2-Punktfunktionen

$$W_{\psi\psi}(x, y) = W_{\psi^*\psi^*}(x, y) = 0 , \qquad W_{\psi\psi^*}(x, y) = W_{\psi^*\psi}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\Delta(x - y)$$

mit

$$\Delta(x - y) = \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_0^\infty d\omega \; e^{-i\omega(x-y)-\epsilon\omega} = \lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{-i}{(x - y) - i\epsilon}$$

im Sinne von Distributionen. Da es sich um freie Teilchen handelt, faktorisieren die höheren Korrelationsfunktionen, z.B. $W_{\psi\psi\psi^*\psi^*}(x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{(2\pi)^2}(\Delta(x_1 - x_4)\Delta(x_2 - x_3) - \Delta(x_1 - x_3)\Delta(x_2 - x_4))$.

Aus den Fermionen ψ werden folgende bosonische Feldoperatoren konstruiert:

$$T_R(v) = \frac{i}{2} : \psi_R^* \overleftrightarrow{\partial} \psi_R : (v) , \qquad T_L(u) = \frac{i}{2} : \psi_L^* \overleftrightarrow{\partial} \psi_L : (u) .$$

Dabei ist $a \overleftrightarrow{\partial} b := a(\partial b) - (\partial a)b$, und : : bezeichnet die *Normalordnung*, d.h. alle Erzeuger $b^\dagger, d^\dagger$ werden (ohne Berücksichtigung der Antikommutatorrelation) nach links von allen Vernichtern b, d antikommutiert. Genauer sind $T_R = \frac{1}{2}(T^{00} + T^{01})$ und $T_L = \frac{1}{2}(T^{00} - T^{01})$ die unabhängigen Komponenten des *Energie-Impuls-Tensors* $T^{\mu\nu}$, der symmetrisch $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, spurfrei $T^\mu_\mu = 0$ und erhalten $\partial_\mu T^{\mu\nu} =$ ist. Die Ladung zum Energie-Impuls-Tensor $P^\nu := \int_{t=\text{const}} d\vec{x}\, T^{0\nu}(t, \vec{x})$ ist der (t-unabhängige) Generator der Translation, d.h. $[P, \phi] = -i\phi'$. In $1+1$ Dimensionen gilt ganz allgemein:

Theorem 2 (Lüscher-Mack, 1976) *Es sei $T^{\mu\nu}$ ein symmetrisches erhaltenes Tensorfeld in einer skaleninvarianten Theorie in $1+1$ Dimensionen, so daß $P^\mu = \int dx_1 T^{0\mu}$ die Translationen erzeugt. Dann gilt*

1. *Die Skalendimension ist $h = 2$.*

2. T ist spurfrei.

3. $T^{00} + T^{01} = 2T_R(t-x)$ bzw. $T^{00} - T^{01} = 2T_L(t+x)$ sind chirale Felder der Skalendimension $h_R = 2$ bzw. $h_L = 2$.

4. $[T_R, T_L] = 0$, und für $T = T_R$ oder $T = T_L$ gilt

$$[T(x), T(y)] = i\Big(T'(y)\delta(x-y) + 2T(y)\delta'(x-y) - \frac{c}{24\pi}\delta'''(x-y)\Big)$$

mit einer Konstanten $c \geq 0$.

Für ein *reelles* freie Fermion (z.B. $\frac{1}{2}(\psi_R + \psi_R^*)$) rechnet man $c = \frac{1}{2}$ nach.

4. Die Virasoro-Algebra

Im folgenden beschränken wir uns auf einen Sektor R oder L und nehmen x, y als eine der Lichtkegelkoordinaten, die durch die Cayley-Transformation zu $z = \frac{1+ix}{1-ix}$ kompaktifiziert wird. Ein chirales Feld $\phi(x)$ der Skalendimension h definiert dann ein Feld $\tilde{\phi}(z)$ auf S^1 durch $\phi(x) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^h \tilde{\phi}(z(x))$; dabei ist $\frac{dz}{dx} = \frac{2i}{(1-ix)^2} = \frac{i}{2}(z+1)^2$. Ein solches besitzt eine Fourier-Entwicklung $\tilde{\phi}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n z^{-n-h}$. Entsprechend besitzt der chirale Energie-Impuls-Tensor die Fourier-Entwicklung $-2\pi\tilde{T}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-h}$ mit Umkehrung

$$L_n = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\ (1-ix)^{1-n}(1+ix)^{1+n}T(x)\ .$$

Integration der Lüscher-Mack-Vertauschungsrelation mit diesen Gewichtsfunktionen führt dann auf

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}\ .$$

Für $c = 0$ ist das die Witt-Algebra. Für $c > 0$ entsteht eine zentrale Erweiterung der Witt-Algebra, die *Virasoro-Algebra*. Wir führen sie im 6. Vortrag abstrakt (ohne Bezug zum Energie-Impuls-Tensor) ein. Durch $c > 0$ wird die $\mathrm{Diff}(S^1)$-Symmetie gebrochen; nur die Möbius-Symmetrie $SL(2,\mathbb{R})$, die von der Lie-Unteralgebra $\mathbb{C}\{L_{-1}, L_0, L_1\}$ erzeugt wird, bleibt erhalten.

Darstellungen der Virasoro-Algebra liefern somit Kandidaten für konforme Feldtheorien, die einen Energie-Impuls-Tensor beinhalten. Für diese Kandidaten sind dann noch Spektrumsbedingungen zu fordern, z.B. muß L_0 ein positiver Operator sein. Im einfachsten Fall werden diese Darstellungen von einem höchsten Gewicht $|h\rangle$ erzeugt, für das gilt

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle\ , \qquad L_n|h\rangle = 0 \quad \text{für alle } n > 0\ .$$

Damit wird

$$V_h := \mathrm{span}\Big\{L_{-n_1}\cdots L_{-n_r}|h\rangle\ : \qquad r \in \mathbb{N}^\times\ ,\ n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r > 0\Big\}$$

ein Darstellungsraum der Virasoro-Algebra mit Grundzustand $|h\rangle$, der als Verma-Modul bezeichnet wird. Zu fordern ist aber, daß alle Vektoren aus V_h eine Norm ≥ 0 haben (der Nullraum wird wie üblich herausfaktorisiert). Unter Verwendung von $(L_{-n})^* = L_n$ und der Kommutatorrelation der Virasoro-Algebra zerfällt V_h bezüglich des Skalarprodukts in $V_h = \bigoplus_k V_h^k$ mit

$$V_h^k := \operatorname{span}\Big\{ L_{-n_1} \cdots L_{-n_r} |h\rangle \; : \qquad n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r > 0 \; , \; \sum_{i=1}^{r} n_i = k \Big\}$$

Sei $M_{h,c}^k$ die aus den Skalarprodukten der Basis-Vektoren von V_h^k gebildete Matrix. Diese muß positiv (semi-)definit sein, damit Vektoren aus V_h eine Norm ≥ 0 haben. Insbesondere ist $\det M_{h,c}^k \geq 0$ notwendig. Diese Determinante wurde von Kac berechnet und läßt (nach weiterer Diskussion der Unterdeterminanten) für $0 \leq c < 1$ nur die folgenden abzählbar vielen Lösungen ($m, q, p \in \mathbb{N}$) zu:

$$\begin{aligned} c &= 1 - \frac{6}{m(m+1)} \,, \qquad m \in \mathbb{N} \,,\; m \geq 2 \\ h = h_{pq}(c) &= \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)} \,, \qquad 1 \leq p \leq m-1 \,,\; 1 \leq q \leq m \,. \end{aligned}$$

Diese Lösungen heißen *minimale Modelle*; wir betrachten sie im 10. und 11. Vortrag. Der Fall $m = 3$ ist das Ising-Modell (13. Vortrag). Für $c \geq 1$ gibt es (bis auf Nullräume) keine Einschränkung.

5. Die Operatorproduktentwicklung (OPE)

Aus einem gegebenem Satz von Feldoperatoren lassen sich durch *lokale* Produkte neue Feldoperatoren definieren. Ein Beipiel ist die Konstruktion $T_R = \frac{i}{2} : \psi_R^* \overleftrightarrow{\partial} \psi_R : (v)$ des Energie-Impuls-Tensors aus dem Fermion-Feld ψ. Dabei sind die Ableitungen und das Produkt am gleichen Punkt v zu bilden.

Bei der OPE handelt es sich um eine Laurent-Entwicklung eines *nichtlokalen* Operator-Produkts:

$$\Phi_i(x)\Phi_j(y) \sim \sum_k C_{ij}^{kl} (\Delta(x-y))^{h_1+h_2-h_k-l} (\partial^l \Phi_k)(y) \,.$$

Diese nur von Potenzen der Zweipunktfunktion $\Delta(x-y) = \frac{-i}{x-y-i\epsilon}$ abhängige Struktur wird durch die konformen Transformationen erzwungen. Dabei ist das Produkt im schwachen Sinn zu verstehen, d.h. als Auswertung in Vakuum-Erwartungswerten

$$W_{\Phi_1\Phi_2\ldots}(x, y, \ldots) \sim \sum_k C_{ij}^{kl} (\Delta(x-y))^{h_1+h_2-h_k-l} W_{\partial^l \Phi_k \ldots}(y, \ldots) \,.$$

Die Entwicklung ist als asymptotische Reihe aufzufassen. Die Skalendimensionen h_i der zugelassenen Felder legen die singulärsten Beiträge fest; jede Ableitung des Feldoperators verbessert die Regularität. Entsprechend versteht sich $\sim$ als asymptotische Entwicklung modulo regulärer Terme.

Von besonderer Bedeutung ist die OPE im Fall $\Phi_1 = T$ (Energie-Impuls-Tensor, mit $h = 2$). Hier werden Feldoperatoren als "primär" bezeichnet, wenn die singulärsten Terme gegeben sind durch

$$T(x)\Phi(y) \sim \frac{h}{(x-y-i\epsilon)^2}\Phi(y) + \frac{1}{(x-y-i\epsilon)}(\partial\Phi)(y) + \dots \, .$$

Über die OPE lassen sich die Korrelationsfunktionen schrittweise abbauen und schließlich allein durch Zweipunktfunktionen $\Delta(x-y)$ ausdrücken. In vielen Fällen sind die Vorfaktoren C_{ij}^{kl} durch weitere Identitäten (z.B. Ward-Identitäten) eingeschränkt; in besonders günstigen Situationen sind die Korrelationsfunktionen sogar vollständig bestimmt.

Die OPE wird mathematisch als Vertex-Algebra realisiert. Dabei wird im wesentlichen die Menge der Feldoperatoren klar festgelegt. Eine Vertex-Algebra ist ein Vektorraum V mit Identität 1, einem Endomorphismus $T : V \to V$ (entspricht der Ableitung) sowie einer linearen Abbildung (der OPE) $Y : V \otimes V \to V((z))$ des Tensporprodukts (entspicht Feldoperatoren an verschiedenen Punkten) in die formalen Laurent-Reihen mit Werten in V, zusammen mit gewissen Kompatibilitätsbedingungen.

Literatur

[1] A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov, "Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory," Nuclear Physics B **241** (1984) 333–380.

[2] K.-H. Rehren, "Konforme Quantenfeldtheorie" Vorlesung Göttingen WS 1997/98, `http://www.theorie.physik.uni-goettingen.de/~rehren/`

[3] M. Gaberdiel, "Konforme Feldtheorie", Vorlesung ETH Zürich WS 2003/04, `http://www.itp.phys.ethz.ch/people/gaberdim/`

[4] M. Schottenloher, "A mathematical introduction to conformal field theory," Lecture Notes in Physics 759, Springer 2008

[5] P. Di Francesco, P. Matthieu, D. Sénéchal, "Conformal field theory", Springer 1997