Das chirale freie Fermion

Friedrich Bach — 6. Dezember 2011

„Konforme Feldtheorien“
Seminar im WS 2011/12 · Institut für Mathematik · WWU Münster

In diesem Vortrag wird es um das Fermion im Formalismus der konformen Feldtheorie gehen. Es werden zunächst Super-Lie-Algebren und Clifford-Algebren, sowie deren Darstellungen im algebraischen Fockraum behandelt. Aus dem Energie-Impuls-Tensor wird mit Hilfe der konformen Symmetrie die Witt-Algebra für das chirale freie Fermion in zwei Dimensionen hergeleitet und mit der zentalen Ladung $c = \frac{1}{2}$ zur Virasoro-Algebra erweitert.

1 Super Lie-Algebra

1.1 Lie-Algebra

Erinnerung: Eine *Lie-Algebra* ist ein Vektorraum $\mathfrak{g}$ mit der Bilinearform $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ für die für $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ gelten:

(i) die Vertauschungsrelation $[X, Y] = -[Y, X]$

(ii) die Jacobi-Identität $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

Bemerkung: Insbesondere folgt aus (i) $[X, X] = 0$. Man kann den Kommutator $[X, Y] = XY - YX$ als *Lie-Klammer* $[\cdot,\cdot]$ auffassen.

1.2 Super Lie-Algebra

Definition 1.1. Ein *Superverktorraum* ist ein aus einem geraden (Index 0) und ungeraden (Index 1) Anteil bestehender Vektorraum

$$V = V_0 \oplus V_1.$$

Bemerkung: Wir definieren die *Parität* $p(v)$ für ein Element $v \in V$ für die gilt, dass $p(v) = 0$ falls $v \in V_0$ und $p(w) = 1$ falls $w \in V_1$. Das Element v ist homogen genau dann, wenn $v \in V_i$ für ein $i = 0, 1$.

Definition 1.2. Die *Super-Lie-Algebra* ist ein Supervektorraum $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, mit einer bilinearen Abbildung $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, die für homogene Elemente $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ folgendes erfüllt:

(i) Schiefsymmetrische Vertauschungsrelation
$[X, Y] = -(-1)^{p(X)p(Y)}[Y, X]$

(ii) Jacobi-Identität
$0 = (-1)^{p(X)p(Y)}[X, [Y, Z]] + (-1)^{p(Y)p(Z)}[Y, [Z, X]] + (-1)^{p(Z)p(X)}[Z, [X, Y]]$

Ein Homomorphismus von Lie-Super-Algebren ist eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit dem Grad 0 mit

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)].$$

Eine lineare Abbildung hat den Grad 0, falls $f(V_1) \subset V_1$ und den Grad 1, falls gilt $f(V_0) \subset V_1$ und $f(V_1) \subset V_0$. Ist V Supervektorraum so ist auch

$$\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}(V)_0 \oplus \mathrm{End}(V)_1$$

ein Supervektorraum. Die Räume $\mathrm{End}(V)_0$ und $\mathrm{End}(V)_1$ sind wie folgt gegeben:

$$\mathrm{End}(V) = \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(V_0, V_0) & \mathrm{Hom}(V_0, V_1) \\ \mathrm{Hom}(V_1, V_0) & \mathrm{Hom}(V_1, V_1) \end{pmatrix}$$

Es gilt dann:

$$T \in \mathrm{End}(V)_0 \Leftrightarrow T \in \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(V_0, V_0) & 0 \\ 0 & \mathrm{Hom}(V_1, V_1) \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$T \in \mathrm{End}(V)_1 \Leftrightarrow T \in \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Hom}(V_0, V_1) \\ \mathrm{Hom}(V_1, V_0) & 0 \end{pmatrix}$$

Der Kommutator ist hier definiert als

$$[f, g] = fg - (-1)^{p(f)p(g)}gf$$

für $f, g \in \mathrm{End}(V)$. Für zwei Elemente $f, g \in \mathrm{End}(V)_1$ gilt dann:

$$[f, g] = fg + gf \equiv \{f, g\}.$$

Man nennt $\{g, f\}$ auch den *Antikommutator*.

Definition 1.3. Die *Darstellung einer Super-Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ ist ein Supervektorraum V zusammen mit einer linearen Abbildung $\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$, sodass

$$\pi([X, Y]) = [\pi(X), \pi(Y)]$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt.

2 Affine Clifford-Algebra

Definition 2.1. [2] Die *affine Clifford-Algebra* gegeben durch die Lie-Super-Algebra

$$C = K\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[t, t^{-1}] = C_0 \oplus C_1$$

mit einer linearen Basis von ungeraden Elementen $a_{(n)}$ für welche die Vertauschungsrelationen mit zentralem $K \in \mathbb{C}$

$$\{a_{(m)}, a_{(n)}\} = \delta_{m,-n} K \tag{1}$$

gelten.

Hier ist $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ der Vektorraum der Laurent-Polynome über $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}[t, t^{-1}] = \left\{ f(t) = \sum_{n=-N}^{N} \lambda_n t^n \mid \lambda_n \in \mathbb{C} \right\}$$

Im Folgenden wird hier über $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ summiert und $a_{(m)} := t^{m-\frac{1}{2}}$ umgeschrieben.

3 Der algebraische fermionische Fockraum

Definition 3.1. Der *algebraische fermionische Fockraum* F ist definiert als

$$F = \Lambda[f_{(-\frac{1}{2})}, f_{(-\frac{3}{2})}, \dots].$$

Dies ist ein Polynomring mit unendlich vielen Erzeugern $f_{(-n-\frac{1}{2})}, n \in \mathbb{N}_0$. Ein typisches Element von F ist von der Form:

$$f_{(-\frac{3}{2})} f_{(-\frac{5}{2})} f_{(-\frac{1}{2})} = -f_{(-\frac{5}{2})} f_{(-\frac{3}{2})} f_{(-\frac{1}{2})} \Omega$$

wobei Ω das Eins-Element von F ist, oftmals *Vakuum* genannt. Das *Gewicht* (*wt* für weight) eines Elementes ist gegeben durch:

$$wt(f_{-(n_1)} \dots f_{(-n_p)} \Omega) = \sum_{i=1}^{p} n_i.$$

Bemerkung: Es gilt

$$F = \bigoplus_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0} F_{(n)},$$

wobei $F_{(n)}$ der Unterraum der Elemente mit dem Gewicht n ist. Der Fockraum F ist ein Supervektorraum. Per Definition beinhaltet F_0 die Elemente mit Gewicht in $\mathbb{Z}$ und F_1 solche aus $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ Das Element $F_{(0)} = \Omega\mathbb{C}$ sei hier der Vakuumvektor.

Definition 3.2. [2] *Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.* Die linearen Operatoren $f_{(m)} \in \mathrm{End}(F), m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ seien definiert als:

$$f_{(m)} = \begin{cases} f_{(m)} & \text{für } m < 0 \qquad \text{Erzeugungsoperator} \\ \frac{\partial}{\partial f_{(-m)}} & \text{für } m > 0 \qquad \text{Vernichtungsoperator} \end{cases}$$

Satz 3.3. *Die Clifford Algebra hat eine Darstellung auf dem algebraischen, fermionischen Fockraum, wobei der Homomorphismus $\pi : C \to \mathrm{End}(F)$ definiert sei, als:*

$$\pi(a_{(m)}) := f_{(m)}$$
$$\pi(K) := \mathrm{id}_F .$$

Beweis. Sei $\phi \in F$ und $m > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\{f_{(-m)}, f_{(m)}\}\phi &= \{f_{(-m)}, \frac{\partial}{\partial f_{(-m)}}\}\phi \\ &= f_{(-m)} \frac{\partial}{\partial f_{(-m)}}\phi + \frac{\partial}{\partial f_{(-m)}}(f_{(-m)}\phi) \\ &= f_{(-m)} \frac{\partial}{\partial f_{(-m)}}\phi + \phi + (-1)^{p(-m)} f_{(-m)} \frac{\partial}{\partial f_{(-m)}}\phi \\ &= \phi\end{aligned}$$

Hier wurde die Schiefsymmetrische Produktregel benutzt. Für $m \neq -n$ gilt insbesondere $\{f_{(m)}, f_{(n)}\}\phi = 0$. Insgesamt folgt also für die Operatoren

$$\{f_{(m)}, f_{(n)}\} = \delta_{m,-n} \tag{2}$$

und der obere Endomorphismus definiert eine Darstellung der affinen Clifford-Algebra. □

Lemma 3.4. *Im Fock-Raum F wird das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ festgelegt mit:*

(i) $\langle f^{\dagger}_{(m)} x, y \rangle = \langle x, f_{(-m)} y \rangle \qquad \forall\, x, y \in F$

(ii) $\langle \Omega, \Omega \rangle = 1$

Es gilt für Basisvektoren von F:

$$\langle f(\mathbf{m}), f(\mathbf{n}) \rangle = \delta_{\mathbf{m},\mathbf{n}},$$

wobei

$$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \qquad \textit{mit} \qquad m_1 > \dots > m_r$$

und

$$f(\mathbf{m}) = f_{(-m_1)} \cdots f_{(-m_r)}\Omega,$$
$$f(\mathbf{n}) = f_{(-n_1)} \cdots f_{(-n_s)}\Omega.$$

Beweis. Betrachte zunächst

$$f(\mathbf{m}) = f_{(-m)}\Omega, \quad f(\mathbf{n}) = f_{(-n)}\Omega$$

für feste m, n, dann folgt mit dem Antikommutator

$$\begin{aligned}\langle f_{(-m)}\Omega, f_{(-n)}\Omega\rangle &= \langle \Omega, f_{(m)}f_{(-n)}\Omega\rangle \\ &= \langle \Omega, \{f_{(-n)}, f_{(m)}\}\Omega\rangle - \langle \Omega, f_{(-n)}f_{(m)}\Omega\rangle \\ &= \delta_{n,m}.\end{aligned}$$

Allgemeine Basisvektoren können auf diesen Fall reduziert werden. □

Wir haben gesehen, dass die linearen Vektoren $f(\mathbf{n})$ eine orthonormale Basis in F geben.

Die Menge aller Vektoren

$$h = \sum_{\mathbf{n}\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \beta_{\mathbf{n}} f(\mathbf{n})$$

definiert den Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, sodass $(\beta_{\mathbf{n}})$ ℓ^2-summierbar.

4 Das Fermion in zwei Dimensionen

4.1 Das Fermion

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ der fermionischen Dirac-Gleichung ist wie folgt gegeben [1]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\partial_i\Psi,$$

wobei $\Psi = (\psi, \bar{\psi})$ das zweikomponentige Fermionenfeld ist. Weiterhin gilt für die Dirac-Matrizen die Dirac-Algebra:

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2\delta^{ij} \qquad i, j = 0, 1.$$

In zwei Dimensionen ist die euklidische Darstellung gegeben durch

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Beim Übergang in die komplexe Darstellung mit $z = x^0 + \mathrm{i}x^1$ und $\bar{z} = x^0 - \mathrm{i}x^1$ gilt nun, wobei wir x^0 mit der Zeitkoordinaten t und x^1 mit der Ortskoordinaten x identifizieren:

$$\mathcal{L} = \psi\partial_{\bar{z}}\psi + \bar{\psi}\partial_z\bar{\psi}. \tag{3}$$

Die hierraus folgenden Euler-Lagrange Gleichungen sind dann:

$$\partial_{\bar{z}} = 0, \qquad \partial_z \bar{\psi} = 0.$$

Nach dem Wirtinger-Kalkül kann man schließen, dass das Fermionenfeld $\Psi = (\psi(z), \bar{\psi}(\bar{z}))$ einen holomorphen und einen antiholomorphen Anteil besitzt, daher nennt man das Fermionenfeld *chiral*. Nun kann man jede holomorphe $\Leftrightarrow$ analytische Funktion in eine Potenzreihe entwickeln. Das Fermion wird hier im Raum $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ behandelt. Die Ortskoordinate x wird um die Zeitkoordinate t gewickelt: $z \mapsto \exp(z) = \exp(\mathrm{i}x) \cdot \exp(t)$. Dies ist dann ein Zylinder. Durch obere Abbildungsvorschrift wird der Zylinder auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ abgebildet. Jetzt können die holomorphen bzw. antiholomorphen Felder in Laurent-Reihen entwickelt werden:

$$\psi(z) = \sum_{n+\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Man beachte, dass sich bei $x \mapsto x + 2\pi$ das Vorzeichen von $z^{\frac{1}{2}}$ umdreht:

$$z^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{\mathrm{i}x}{2} + \frac{t}{2}\right) \mapsto -z^{\frac{1}{2}},$$

wobei der Aufruf dieser Größe durch die Wahl der halbzahligen Indizes vermieden wurde.

Der antiholomorphe Teil lässt sich analog zum holomorphen Teil betrachten, daher wird im Folgenden nur der holomorphe Anteil des Fermionenfeldes betrachtet.

Aus der kanonischen Vertauschungsregel für das Fermion lassen sich die Moden der Laurent-Reihe mit der Struktur der Clifford-Algebra (1)

$$\{a_m, a_{-n}\} = \delta_{m,n} \Leftrightarrow \{a_m, a_n\} = \delta_{m,-n} \tag{4}$$

identifizieren.

4.2 Der Energie-Impuls-Tensor

Formal ist der *Energie-Impuls-Tensor* der klassischen QFT durch folgende Beziehung gegeben:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

Es kann gezeigt werden [1, S. 26], dass aus der konformen Symmetrie für den Energie-Impuls-Tensor folgt:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}, \quad T^\mu_\mu = 0. \tag{5}$$

Lemma 4.1. *Der Energie-Impuls-Tensor für das freie, zweidimensionale Fermion ist ein chirales Feld*

$$T^{--} = \psi \partial_z \psi \tag{6}$$

und lässt sich als

$$T^{--}(z) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \tag{7}$$

entwickeln. Man nennt die Moden L_n Virasoro-Generatoren.

Beweis. Die Chiralität ist leicht gezeigt, indem die Bedingungen (5) auf einen holomorphen Teil

$$T^{--} = \frac{1}{2}\left(T^{00} - \mathrm{i}T^{10}\right) \tag{8}$$

führen.

Einsetzen der Lagrange-Dichte des Fermions in den Energie-Impuls-Tensor führt dann auf Gleichung (6), siehe [1, S. 38]. Gleichung (7) lässt sich durch Ausnutzung der Bewegungsgleichungen (5) zusammen mit (3) in obige Gleichung für die chirale Gleichung (8) erhalten. □

4.3 Die Virasoro Algebra

Definition 4.2. Die Größe $L_n \in \mathrm{End}(F)$, $n \in \mathbb{Z}$ ist für das Fermion wird wie folgt definiert [1]:

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_l l : a_{n-l} a_l : \qquad l \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Hier ist die fermionische Normalordnung durch folgende Vorschrift definiert [3]:

$$: a_l a_j : \ = \begin{cases} a_l a_j, & \text{falls} \quad j > l \\ -a_j a_l, & \text{falls} \quad j < l \end{cases} \qquad \forall\, l, j \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2},$$

welche die Antisymmetrie im fermionischen Fockraum berücksichtigt.

Lemma 4.3. $[L_n, a_m] = -\left(m + \frac{n}{2}\right) a_{n+m} \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{Z}$

Beweis. Die Normalordnung spielt hier keine Rolle.

$$\begin{aligned} [L_n, a_m] &= \frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} l[a_{n-l}a_m, a_m] \\ &= \frac{1}{2}\sum_l l\left(a_{n-l}\{a_l, a_m\} - \{a_{n-l}, a_m\}a_l\right) \\ &\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(-m a_{n+m} - (n+m)a_{n+m}\right) \\ &= -\left(m + \frac{n}{2}\right) a_{n+m} \end{aligned}$$

□

Lemma 4.4. *Der Kommutator* $[L_m, L_n]$ *erfüllt für* $m+n \neq 0$ *die Witt Algebra:*

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{2}\sum_l l[L_m, a_l a_{n-l}] \\
&= \frac{1}{2}\sum_l l\left(a_l[L_m, a_{n-l}] + [L_m, a_l]a_{n-l}\right)
\end{aligned}$$

und Lemma 4.3 führt auf

$$[L_m, L_n] = \frac{1}{2}\sum_l l\left(-\left(l+\frac{m}{2}\right)a_{m+l}a_{n-l} - a_l\left(\frac{m}{2}+n-l\right)a_{m+n-l}\right)$$

nach Umbenennung des Indexes im ersten Summanden $l \to l-m$ folgt

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= \frac{1}{2}\sum_l \left(-(l-m)\left(l-\frac{m}{2}\right)a_l a_{n-l+m} - a_l a_{m+n-l}\left(\frac{m}{2}+n-l\right)l\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_l a_l a_{n+m-l}\left(ml + \frac{ml}{2} - \frac{m^2}{2} - l^2 - \frac{ml}{2} - ln + l^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(m-n)\sum_l l a_l a_{n+m-l} - \frac{m^2}{4}\sum_l a_l a_{n+m-l}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Der erste Summand in (10) kann mit (9) identifiziert werden. Der zweite Term hebt sich bei $m+n \neq 0$ auf Null weg. Es gilt also die Witt Algebra:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$$

□

Satz 4.5. *Die Generatoren* $L_m \in \mathrm{End}(F)$*,* $m \in \mathbb{Z}$ *erfüllt die Kommutator Relation der Virasoro Algebra* $\mathbb{V}$*:*

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n} \qquad (11)$$

Die Zentrale Ladung ist für das Fermion $c = \frac{1}{2}$*.*

Beweis. Für $n+m \neq 0$ gilt nach vorherigem Lemma die Witt Algebra. Es ist also nur noch der Fall $n = -m$ zu zeigen:

$$[L_m, L_{-m}] = \frac{c}{12}(m^3 - m)$$

Die zentrale Ladung c_m ist also durch folgende Relation zu erhalten [3]:

$$c_m = \langle \Omega, ([L_m, L_{-m}] - 2mL_0)\Omega \rangle.$$

Man kann schnell einsehen, dass $L_0\Omega = 0$ und $L_m\Omega = 0$, dann folgt:

$$c_m = \langle \Omega, L_m L_{-m}\Omega \rangle = \|L_{-m}\Omega\|^2$$

Es folgt dann:

$$L_{-m}\Omega = \frac{1}{2}\left(\sum_{l>\frac{m}{2}} l f_{(-l)} f_{(l-m)} - \sum_{l<\frac{m}{2}} l f_{(l-m)} f_{(-l)} \right) \Omega$$

Wegen $f_{(l-m)}\Omega$=0 für $l > m$ und $f_{(-l)}\Omega = 0$ für $l < 0$ werden die Summen wie gewünscht endlich:

$$L_{-m}\Omega = \frac{1}{2}\left(\sum_{\frac{m}{2}<l<m} l f_{(-l)} f_{(l-m)} - \sum_{0<l<\frac{m}{2}} l f_{(l-m)} f_{(-l)} \right) \Omega$$

Eine Variablenumbenennung $l \to m - l$ im ersten Term führt auf

$$L_{-m}\Omega = \frac{1}{2} \sum_{0<l<\frac{m}{2}} (m - 2l) f_{(l-m)} f_{(-l)} \Omega$$

Wir können nun die Norm quadrieren:

$$\|L_{-m}\Omega\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{0<l<\frac{m}{2}} (m - 2l)^2.$$

Hier fallen die Mischterme aufgrund des Skalarproduktes im Fockraum heraus.

Wir müssen hier nun zwischen m gerade und m ungerade unterscheiden, da die Grenzen der Summen dann unterschiedlich sind. Für m gerade sind die Grenzen gegeben durch $\frac{1}{2} < l < \frac{m-1}{2}$:

$$\begin{aligned} \|L_{-m}\Omega\|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{0<l<\frac{m}{2}} (m - 2l)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} (2k - 1)^2 \end{aligned}$$

wobei $k = \frac{m}{2} - (l - \frac{1}{2}) \in \mathbb{N}$, da $l \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ und m gerade. Dies führt auf:

$$\|L_{-m}\Omega\|^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{6}(m^3 - m)$$

Die zentrale Ladung ist also $c = \frac{1}{2}$ und obige Vertauschungsrelation der Virasoro Algebra (11) gilt. Für m ungerade ist der Weg analog und führt auf dasselbe Ergebnis. Desweiteren ist gezeigt, dass der Homomorphismus $\pi_V : \mathbb{V} \to \mathrm{End}(F)$ eine Darstellung der Virasoro-Algebra auf dem Fockraum F liefert. $\square$

Literatur

[1] M. Gaberdiel. Konforme Feldtheorie. *Vorlesungsskript WS*, 2004:2004, 2003.

[2] V. Kac. *Vertex algebras for beginners: Victor Kac*, volume 10. Amer Mathematical Society, 1998.

[3] J. Ottesen. *Infinite dimensional groups and algebras in quantum physics*, volume 27. Springer, 1995.