Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 11/12**
Dr. T. Timmermann

Probeklausur zur Mathematik für Physiker I

Vorbemerkungen:

- Die folgenden Aufgaben waren Klausuraufgaben im WS 2009/10.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausur am 6.2. wird zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel zur Klausur ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Insbesondere sind Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Zur Teilnahme an der Klausur ist eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1624 oder id 1625 erforderlich. Letzer Termin für die Anmeldung ist der 2.2.1012. Bitte schreiben Sie die Klausur in jenen Hörsaal, für den Sie sich angemeldet haben.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Nach gegenwärtiger Planung wird die Probeklausur im 2. Teil der Vorlesung am 2.2.2012 vorgerechnet.

Aufgabe 1. a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}} z^n$.

b) Berechnen Sie $\left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+3\mathrm{i}}{1-4\mathrm{i}} \right)^n \right|$.

Aufgabe 2. Es sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad w_s = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

und $W_t = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$.

a) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(W_t)$ als Funktion von $t \in \mathbb{R}$.

b) Für $t = 1$ gibt es genau ein $s \in \mathbb{R}$, so daß $w_s \in W_1$. Bestimmen Sie diese Zahl s.

c) Bestimmen Sie für $t = 1$ und $s \in \mathbb{R}$ aus b) die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $w_s = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2x - 4}{\sin(x^2 - x)} . \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(\sinh^2 x)}{\sqrt{x^2 + x + 2}} .$$

Aufgabe 4. Für $n \in \mathbb{N}^\times$ sei $z_n := \cos \frac{2\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{n}$. Zeigen Sie: $\prod_{k=0}^{n-1} (z_n)^k = (-1)^{n-1}$.

Aufgabe 5. Durch $x_0 := 2$ und $x_{n+1} := \frac{15 - 12x_n + 4x_n^2}{4}$ werde rekursiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert. Zeigen Sie: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 6. Sei $n \in \mathbb{N}^\times$ und $a \in \mathbb{R}_+^\times$. Zeigen Sie: Es gibt im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Lösung $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ der Gleichung $(\cos x)^n = ax$.