Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 11/12**

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 20.10.11 bis 10 Uhr, in den Briefkästen Blatt 1

Aufgabe 1. Von Leonardo Fibonacci stammt folgendes Modell zur Vermehrung von Kaninchen. Nimmt man an, dass Kaninchen unsterblich sind, stets in Paaren auftreten und jedes Paar in jedem Jahr ein neues Kaninchenpaar zeugt, welches nach Ablauf zweier Jahre selbst fortpflanzungsfähig ist, so genügt die Anzahl f_n der Kaninchenpaare im Jahr n der Rekursionsgleichung

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige mit vollständiger Induktion, dass im Fall $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$,

(c) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.

Aufgabe 2. Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Beweise oder widerlege durch Gegenbeispiele folgende Aussagen:

(a) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

(b) $g \circ f$ ist genau dann surjektiv, wenn g und f surjektiv sind.

(c) Wenn $g \circ f$ surjektiv und g injektiv ist, dann ist f surjektiv.

(d) Wenn $g \circ f$ injektiv und f surjektiv ist, dann ist g injektiv.

Aufgabe 3. Zeige (durch vollständige Induktion):

a) $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

c) $$\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x}\ , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

d) $$\sum_{k=0}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$$

Bemerkung: Dabei ist $x^{2^k} = x^{(2^k)}$, die andere Version der Klammersetzung führt auf $(x^2)^k = x^{2k}$.

Aufgabe 4. Sei p eine Primzahl. Zeige, dass $n^p - n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch p teilbar ist.