Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 11/12

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 24.11.11 bis 10 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 6

Aufgabe 1. Prüfe, ob die Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$, gegeben durch

$$a_n = \left(\frac{12+5\mathrm{i}}{13}\right)^n, \qquad b_n = \frac{2n + (-\mathrm{i})^n n^2}{n^2+1}$$

konvergieren, und bestimme im Konvergenzfall den Grenzwert.

Aufgabe 2. Prüfe, ob die Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$, $(d_n)_n$, gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}, \qquad b_n = \sqrt[n]{3^n + (-2)^n}, \qquad c_n = \frac{3^n - n^2}{2^n + n^3}, \qquad d_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}$$

konvergieren, und bestimme im Konvergenzfall den Grenzwert.

Aufgabe 3. Sei $a > 0$ und

$$a_n := \sqrt{n+a} - \sqrt{n}, \qquad b_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n := \sqrt{n + n/a} - \sqrt{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(a) Für alle $n < a^2$ gilt $c_n < b_n < a_n$.

(b) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$, während $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt ist.

(*Hinweis:* Erweitere jeweils mit $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ für geeignete x und y.)

Aufgabe 4. Zeige, dass für alle $p, q \in \mathbb{N}$ ungleich 0 gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{p}{qn}\right)^n = \sqrt[q]{\mathrm{e}^p}, \quad \text{wobei } \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$