Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 11/12**
Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 1.12.11 bis 10 Uhr, in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $a > 0$, $x_0 \in]0, \frac{2}{a}[$ beliebig und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x_{n+1} := x_n(2 - ax_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige: (a) $x_n < x_{n+1} < \frac{1}{a}$ für alle $n \geq 1$, (b) $\lim_{n\to\infty} x_n = 1/a$.

Aufgabe 2. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_0 := 2, \qquad x_{n+1} := \frac{15 - 12x_n + 4x_n^2}{4} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige: (a) $\frac{3}{2} \leq x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, (b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$.
(*Hinweis zu (b):* Welche Gleichung muss der Grenzwert erfüllen?)

Aufgabe 3. (a) Die Folge der Fibonacci-Zahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert durch

$$f_0 := 0, \qquad f_1 := 1, \qquad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

vergleiche Blatt 1, Aufgabe 1. Zeige (z.B. mit den Ergebnissen von Blatt 1):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =: \Phi \quad (= \text{der goldene Schnitt}).$$

(b) Die Folge der endlichen Kettenbrüche

$$x_n := \underbrace{\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots \; 1 + \cfrac{1}{1}}}}}_{n \text{ Bruchstriche}}$$

erfüllt die Rekursionsgleichung $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeige: $|x_n - \Phi| \leq \Phi^{-(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \Phi$.

Aufgabe 4. Zeige, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rekursiv definiert durch

$$x_0 := 0, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n^2 + 8}{6} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

konvergiert, und bestimme den Grenzwert.
(*Hinweis:* Ähnliches Vorgehen wie bei Aufgabe 2.)