Lebesgue-Integral und L^p-Räume

Seminar "Integraltransformationen", WS 2012/13

1 Treppenfunktionen

Grundlage jedes Integralbegriffs ist das geometrisch definierte Integral von *Treppenfunktionen.* Für $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert man die *charakteristische Funktion* $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *von* A als

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A\ , \\ 0 & \text{für } x \notin A\ . \end{cases}$$

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein achsenparalleler n-dimensionaler Quader, wobei die Zugehörigkeit von Teilmengen der $(n-1)$-dimensionalen Randflächen zu Q keine Rolle spielt. *Treppenfunktionen* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sind (nach Unterteilung in disjunkte Teilquader) konstant auf den Teilquadern: $\phi(x) = \sum_{l=0}^{N} c_l \mathbf{1}_{Q_l}(x)$ mit $c_l \in \mathbb{C}$. Das Integral einer Treppenfunktion ist definiert als

$$\phi = \sum_{l=0}^{N} c_l \mathbf{1}_{Q_l} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}^n} dx\ \phi(x) = \sum_{l=0}^{N} c_l \cdot \text{Volumen}(Q_l)$$

und verallgemeinert die Idee "Volumen=Grundfläche·Höhe". Das Integral beliebiger Funktionen $f : A \to \mathbb{C}$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$ wird dann erklärt als Grenzwert der Integrale einer Folge $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen , die f in geeigneter Weise approximiert. Da Funktionen über A einen *unendlich-dimensionalen* Vektorraum bilden, gibt es verschiedene Konvergenzbegriffe, die dann auf verschiedene Integrale führen.

2 Riemann-Integral

Das Riemann-Integral ist durch die monotone beschränkte Konvergenz reellwertiger Treppenfunktionen erklärt:

Definition 1 Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, falls es Folgen $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt mit

- (ϕ_k) ist monoton wachsend mit $\phi_k(x) \leq f(x)$,
- (ψ_k) ist monoton fallend mit $\psi_k(x) \geq f(x)$,
- $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_A dx\ (\psi_k(x) - \phi_k(x)) = 0$

In diesem Fall definiert man das *Riemann-Integral* von f als $\displaystyle\int_A dx \quad f(x) = \lim_{k\to\infty} \int_A dx\ \psi_k(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \int_A dx\ \phi_k(x)$.

Das Riemann-Integral hat folgende Eigenschaften:

- Linearität und Monotonie.
- Stetige Funktionen sind über kompakte Mengen integrierbar.
- Monotone beschränkte Funktionen auf $A \subset \mathbb{R}$ sind integrierbar.
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Ist $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f(x) = F'(x)$, so $\displaystyle\int_a^b dx\ f(x) = F(b) - F(a)$.
- Ist (f_k) Folge integrierbarer Funktionen, die *gleichmäßig gegen f konvergiert*, so gilt $\displaystyle\int_A dx\ \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \int_A dx\ f_k(x)$.

Uneigentliche Integrale über offene Teilmengen lassen sich über Grenzwerte erklären. Das Riemann-Integral hat folgende Schwächen:

- Über $\langle f, g\rangle = \int_A dx\ \overline{f(x)}g(x)$ läßt sich ein rudimentäres Skalarprodukt erklären. Der Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen ist jedoch nicht vollständig in der induzierten (Halb-)Norm.
- Gleichmäßige Konvergenz der Funktionsfolgen ist oft eine zu starke Forderung.

3 Lebesgue-Integral

Das Lebesgue-Integral wird oft im Rahmen einer allgemeinen Maßtheorie eingeführt. Wir gehen hier einen direkten Weg über eine andere Konvergenz von Treppenfunktionen.

Dazu werden Treppenfunktionen verallgemeinert zu Reihen: $\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \mathbf{1}_{Q_l}(x)$ mit $c_l > 0$ und Q_l offen. Es wird nicht gefordert, daß die Reihe punktweise konvergiert, d.h. Φ darf ∞ werden. Wir definieren $I(\Phi) := \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \text{Volumen}(Q_l)$.

Definition 2 Für eine *beliebige* Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt

$$\|f\|_1 := \inf\{I(\Phi)\ :\ |f(x)| \le \Phi(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

die *L^1-Halbnorm von f*.

Achtung: Entgegen der sonst üblichen Bezeichnung ist $\|\ \|_1$ *keine Norm*: Aus $\|f\|_1 = 0$ folgt *nicht* $f = 0$. Die anderen Norm-Axiome $\|cf\|_1 = |c|\|f\|_1$ und $\|f+g\| \le \|f\|_1 + \|g\|_1$ gelten, was $\|\ \|_1$ zu einer *Halbnorm* macht. Diese Halbnorm ist außerdem monoton: Aus $|f| \le |g|$ folgt $\|f\|_1 \le \|g\|_1$. Für Treppenfunktionen $\phi = \sum_{l=0}^{N} c_l \mathbf{1}_{Q_l}$ zeigt man $\displaystyle\int dx\ |\phi(x)| = \|\phi\|_1$.

Definition 3 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *(Lebesgue-)integrierbar*, wenn es eine Folge $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt mit $\lim_{k\to\infty} \|f - \phi_k\|_1 = 0$. In diesem Fall heißt

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx\ f(x) := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx\ \phi_k(x)$$

das *Lebesgue-Integral* von f.

Bemerkung 4 i) Dreiecksungleichung für $\|\ \|_1$ und $\int dx\ |\phi(x)| = \|\phi\|_1$ für Treppenfunktionen genügen zur Wohldefinitheit des Lebesgue-Integrals.

ii) Die Integration von Funktionen über Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ wird auf die Integration der Funktion $f_A := f \cdot \mathbf{1}_A$ über ganz $\mathbb{R}$ zurückgeführt: $\int_A dx\ f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} dx\ f_A(x)$.

Das Lebesgue-Integral hat folgende Eigenschaften:

- Linearität und Monotonie.
- Mit f ist auch $|f|$ integrierbar, und es gilt $\left|\int dx\ f(x)\right| \leq \int dx\ |f(x)| = \|f\|_1$. (abweichend vom uneigentlichen Riemann-Integral!)
- Über $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktionen sind Lebesgue-integrierbar, und beide Integrale stimmen überein.
- Über $]a,b[$ *absolut* Riemann-integrierbare Funktionen sind Lebesgue-integrierbar, und beide Integrale stimmen überein.

Über das Integral läßt sich ein *Maß* erklären:

Definition 5 Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt *(Lebesgue-)meßbar*, falls $\mathbf{1}_A$ Lebesgue-integrierbar ist, und in diesem Fall heißt $\mu(A) = \int dx\ \mathbf{1}_A$ das *Maß* von A.

Eine meßbare Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(N) = 0$ heißt *(Lebesgue-)Nullmenge*.

Bemerkung 6

- Der umgekehrte Weg: erst Maß, dann Integral, ist ebenfalls möglich und zunächst allgemeiner. Das Maß zum Lebesgue-Integral ist dadurch ausgezeichnet, daß es *translations-invariant* ist. Summen und Reihen lassen sich in der Maßtheorie als Integrale zum Dirac-Maß auffassen.
- Es gibt beschränkte Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$, die nicht meßbar sind! Entsprechend muß man sich oft auf *meßbare Funktionen* einschränken, d.h. solche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die das Urbild $f^{-1}(U)$ einer beliebigen offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ meßbar ist.

Es gilt:

- Mit A, B sind auch $A \cup B$ und $A \cup B$ meßbar, und es gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

- Jede Teilmenge einer Nullmenge ist Nullmenge.
- Die Vereinigung *abzählbar vieler* Nullmengen ist Nullmenge.

Wichtige Beispiele für Nullmengen sind Teilmengen, die eine niedrigere Dimension haben. Nullmengen führen auf den sehr wichtigen Begriff "fast überall".

Definition 7 Eine Eigenschaft E gilt *fast überall* auf $A \subset \mathbb{R}^n$, wenn die Menge der Punkte von A, in denen E nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Nullmengen sind zentral in den (z.T. sehr mühsamen und deshalb weggelassenen) Beweisen der folgenden wichtigen Sätze. Von nun an sind "integrierbar", "Integral", "Nullmenge" immer im Sinne von Lebesgue gemeint.

Lemma 8 *Ist $\|f\|_1 < \infty$, so ist f fast überall endlich.*

Satz 9 (Modifikationssatz) *Zwei Funktionen f, g seien fast überall gleich, und f sei integrierbar. Dann ist auch g integrierbar, und beide Integrale stimmen überein.*

Folgerung 10

i) *Zu jeder integrierbaren Funktion f gibt eine integrierbare Funktion g, die fast überall mit f übereinstimmt, nirgends den Wert ∞ annimmt und das gleiche Lebesgue-Integral hat.*

ii) $\|f\|_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$ *fast überall.*

Satz 11 (von der monotonen Konvergenz / von Beppo Levi) *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge integrierbarer Funktionen, und die Folge $\left(\int dx\ f_k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sei beschränkt. Dann ist die punktweise gebildete Grenzfunktion $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ integrierbar, und es gilt $\int dx\ f(x) = \lim_{k\to\infty} \int dx\ f_k(x)$.*

Der Satz von Beppo Levi ist äußerst nützlich und wäre i.a. falsch für das Riemann-Integral.

Satz 12 (von der dominierten Konvergenz / von Lebesgue) *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge integrierbarer Funktionen mit $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ fast-überall. Es gebe eine integrierbare Funktion g mit $|f_k(x)| \leq g(x)$ fast-überall. Dann ist f integrierbar, und es gilt $\displaystyle\int dx\ f(x) = \lim_{k\to\infty} \int dx\ f_k(x)$.*

Satz 13 (Majorantenkriterium) *Sei f meßbar und g integrierbar mit $|f| \leq g$. Dann ist auch f integrierbar, und es gilt $\displaystyle\left|\int dx\ f(x)\right| \leq \int dx\ g(x)$.*

Die Substitutionsregel des Riemann-Integrals hat folgende Verallgemeinerung:

Satz 14 (Transformationssatz) *Sei $T : U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und $f : V \to \mathbb{C}$ integrierbar. Dann gilt*

$$\int_V dy\, f(y) = \int_U dx f(T(x)) \cdot |\det(DT)(x)|\,,$$

wobei DT das totale Differential (Jacobi-Matrix) von T ist.

Im Beweis und in Anwendungen sind Nullmengen wichtig: Der Transformationssatz kann auch für Integrale über kompakte Mengen angewandt werden, da die Ränder weggeschält werden dürfen.

Der folgende Satz von Fubini erlaubt es (unter den angegebenen Bedingungen und gegebenenfalls nach Anwendung des Transformationssatzes), die Berechnung mehrdimensionaler Integrale schrittweise auf eindimensionale Integrale zurückzuführen, welche in den meisten Fällen mit Riemann-Integralen übereinstimmen und dann mit Techniken wie partielle Integration und Substitution behandelt werden können. Ein wichtiger Aspekt ist die Möglichkeit, die Reihenfolge der Integration zu tauschen:

Satz 15 (Fubini) *Sei $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{C}$ integrierbar. Dann ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^p$ die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ integrierbar, und nach Modifikation auf Nullmengen gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} d(x, y)\, f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} dx \Big(\int_{\mathbb{R}^q} dy\, f(x, y) \Big) = \int_{\mathbb{R}^q} dy \Big(\int_{\mathbb{R}^p} dx\, f(x, y) \Big)\,.$$

Aus der iterierten Integrierbarkeit über die Teilräume folgt i.a. nicht die Integrierbarkeit über den Produktraum; hierzu müssen die Funktionen genügend gutartig und absolut integrierbar sein (Satz von Tonelli).

4 L^p-Räume

Die L^p-Räume sind eine Familie von Banach-Räumen, also vollständigen normierten Vektorräumen, die über das Lebesgue-Integral definiert sind. Dabei gibt es eine Dualität zwischen L^p und L^q für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Der selbstduale L^2 ist ein Hilbert-Raum.

Definition 16 Für $1 \leq p < \infty$ werde der folgende Funktionenraum definiert:

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \;:\; f \text{ ist meßbar und } \|f\|_p := \Big(\int dx\, |f(x)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\}\,.$$

Für $p = 1$ ist $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ genau der Vektorraum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Analog wie dort läßt sich $\mathcal{L}^p(A)$ für $A \subset \mathbb{R}^n$ einführen. Es gilt:

Satz 17 (Höldersche Ungleichung) *Sei $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sind $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, dann ist $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und es gilt*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q\,.$$

Folgerung 18 (Minkowskische Ungleichung) *Es gilt* $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ *für alle* $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. *Damit ist* $\| \ \|_p$ *eine Halbnorm auf* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Ein Standardverfahren macht $\| \ \|_p$ zu einer echten Norm auf Räumen von *Äquivalenzklassen.* Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f\|_p = 0$, dann ist $|f|^p = 0$ fast-überall, somit $f = 0$ fast-überall. Damit können wir folgenden Untervektorraum $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^p(X, \mu)$ (für alle $1 \leq p < \infty$) einführen:

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) := \{g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ meßbar}, g = 0 \text{ fast-überall}\} .$$

Folgerung 19 *Für* $1 \leq p < \infty$ *ist der Quotientenraum* $L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ *ein normierter Vektorraum bezüglich* $\|[f]\|_p := \|f\|_p$.

Die Konstruktion identifiziert Funktionen, die fast überall gleich sind. Man darf mit beliebigen Repräsentanten rechnen.

Die L^p-Räume haben folgende wichtige Eigenschaft:

Satz 20 (Riesz-Fischer) *Für alle* $1 \leq p < \infty$ *ist* $(L^p(\mathbb{R}^n), \| \ \|_p)$ *ein Banach-Raum.*

Im Beweis konstruiert man aus der L^p-Cauchy-Folge eine Teilfolge, so daß die Differenzenfolge $(f_{k+1} - f_k)$ nach Beppo Levi absolut integrierbar ist. Nach Majorantenkriterium ist sie dann selbst integrierbar. Nach Satz von Lebesgue konvergiert die Teilfolge in der L^p-Norm gegen die fast überall konstruierte Grenzfunktion.

Es gibt eine Fortsetzung zu $p = \infty$:

Definition 21 Eine meßbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *fast-überall beschränkt*, falls es ein $C > 0$ gibt mit $|f| \leq C$ fast-überall. Dann sei

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ meßbar und fast-überall beschränkt}\} .$$

Satz 22

i) $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *ist ein Vektorraum, auf dem durch* $\|f\|_\infty := \inf\{C : |f| \leq C \text{ fast-überall}\}$ *eine Halbnorm definiert wird.*

ii) $L^\infty(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ *ist bezüglich* $\| \ \|_\infty$ *ein Banach-Raum.*

iii) *Für* $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *ist* $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, *und es gilt* $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.

Die Funktionenräume $L^p(\mathbb{R}^n)$ liefern wichtige und interessante Beispiele für unendlich-dimensionale normierte Vektorräume. Der Fall $p = 2$ ist ausgezeichnet:

Folgerung 23 $L^2(\mathbb{R}^n)$ *ist bezüglich des Skalarprodukts* $\langle f, g\rangle := \displaystyle\int dx \ \overline{f(x)} g(x)$ *ein Hilbert-Raum.*

Die Höldersche Ungleichung ist dann die Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Nach Verallgemeinerung auf beliebige Maße ist im wesentlichen jeder Hilbert-Raum von dieser Art.

Zum Abschluß eine Bemerkung zur Dualität:

Definition 24 Sei $(X, \| \;\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann heißt

$$X' := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ linear } : \|f\|_{op} = \sup_{x \in X\ ,\ \|x\|=1} |f(x)| < \infty\}$$

der *Dualraum* von X.

Der Dualraum $(X', \| \;\|_{op})$ is bezüglich der Operatornorm automatisch Banach-Raum. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt $L^q(\mathbb{R}^n) \subset \big(L^p(\mathbb{R}^n)\big)'$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ für alle $1 \le p \le \infty$. Es gilt aber mehr (sogar für beliebige Maße):

Satz 25 *Für alle* $1 < p < \infty$ *gilt* $\big(L^p(\mathbb{R}^n)\big)' = L^q(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Für $p = 2$ ist das der *Rieszsche Darstellungssatz*. Zumindest für den $\mathbb{R}^n$ gilt auch $\big(L^1(\mathbb{R}^n)\big)' = L^\infty(\mathbb{R}^n)$, nicht aber für beliebige Maße. Dagegen ist $\big(L^\infty(\mathbb{R}^n)\big)'$ sehr viel größer als $L^1(\mathbb{R}^n)$.