Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Seminar „Integraltransformation“
Marie-Therese Hauerstein
Wintersemester 2012/2013
Dozent: Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar

Ausarbeitung zum Seminarvortrag

Mellin-Transformation

Inhaltsverzeichnis

1 Definition: Mellin-Transformation 3

2 Eigenschaften der Mellin-Tranformation 5

3 Umkehrformel, inverse Mellin-Transformation 9

4 Beipiele 10

5 Anwendung 15

6 Literaturverzeichnis 18

1 Definition: Mellin-Transformation

Im Fokus dieser Arbeit steht die nach dem finnischen Mathematiker Hjalmar Mellin (1854-1933) benannte Mellin-Transformation. Von Mellin zur Lösung Hypergeometrischer Differentialgleichungen und zur Ableitung Asymptotischer Entwicklungen genutzt, dient die Transformation heute neben der Ableitung von Entwicklungen vor allem zur Lösung von Randwertproblemen in der Potentialtheorie und von Linearen Differentialgleichungen in der elektrischen Energietechnik.

Definition 1.1 Sei $f(t)$ eine Funktion mit $t \in \mathbb{R}^+$. Dann wird die Funktion $f(t)$ auf die komplexe Ebene abgebildet durch die Mellin-Transformation

$$F(s) = M_{\mathrm{f(t)}}(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot t^s \cdot \frac{dt}{t} = \int_0^\infty f(t) \cdot t^{s-1} \mathrm{d}t \tag{1}$$

Die Funktion $F(s)$ wird Mellin-Transformierte von f genannt. Den Integralkern der Mellin-Tranformation bildet dabei t^{s-1}.

Bemerkung 1.2 Im Allgemeinen existiert das Integral nur für komplexe Werte von $s = a + ib$ mit $\alpha < \Re(s) = a < \beta$. Der Bereich, in der die Mellin Transformation existiert, wird mit $S(\alpha, \beta)$ bezeichnet. In diesem Bereich ist F(s) holomorph.

Bemerkung 1.3 Die Mellin-Transformation kann als Version der zweiseitigen Laplace-Transformation angesehen werden. Die Beziehung dieser Transformationen ergibt sich durch Tausch der Variablen.

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{f(t)}}(s) &= \int_0^\infty f(t) t^s \frac{dt}{t} \\
&=^1 \int_\infty^{-\infty} f(e^{-x}) e^{-sx} \frac{-e^{-x} dx}{e^{-x}} \\
&= \int_\infty^{-\infty} f(e^{-x}) e^{-sx} (-dx) \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(e^{-x}) e^{-sx} dx \\
&=^2 \int_{-\infty}^\infty g(x) e^{-sx} dx \\
&=: L_{\mathrm{g(x)}}(s)
\end{aligned}$$

1) Setze $t = e^{-x}$ und $dt = -e^{-x} dx$
2) $g(x) = f(e^{-x})$

$L_{\mathrm{g(x)}}(s)$ ist dabei die Laplace-Transformation.

Wir definieren nun drei Funktionen, die häufig als Mellin-Transformation auftreten und die wir für die Beispiele in Kapitel 4 und die Anwendung in Kapitel 5 brauchen.

Definition 1.4 *(Gammafunktion)*
Die Gamma-Funktion $\Gamma(s)$ ist definiert auf der komplexen Halbebene $\Re(s) > 0$ durch das Integral

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \tag{2}$$

Die Gammafunktion ist, abgesehen von ihren Polen an den Stellen s=-n (n=0,1,2,...), holomorph in der ganzen Ebene.

Bemerkung 1.5
Die Gammafunktion genügt der Funktionalgleichung

$$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s) \tag{3}$$

Definition 1.6 *(Betafunktion)*

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{4}$$

Bemerkung 1.7
Die Beziehung zwischen der Beta- und der Gammafunktion ist gegeben durch

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{5}$$

Definition 1.8 *(Riemannsche Zeta-Funktion)*
Sei $s \in \mathbb{C}$ und $\Re(s) > 1$. Dann ist die Zeta-Funktion definiert durch die Dirichletreihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{6}$$

Bemerkung 1.9
Unter der Riemannschen Funktionalgleichung versteht man die Identität zwischen den Funktionen

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cdot cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s) \tag{7}$$

Die Zeta-Funktion ist, abgesehen von der Stelle s=1, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Diese Identität kann benutzt werden, um diese Aussage für $\Re(s) < 0$ zu zeigen.

Wir benötigen noch eine weitere Identität:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_0^\infty \{x\}x^{-s-1}dx \quad , \quad \Re(s) > 0$$

Dabei ist $\{x\}$ der gebrochene Anteil einer reellen Zahl.
Diese Identität schließt aus, dass Pole im Streifen $0 \leq \Re(s) < 1$ sind.
An dieser Identität kann man sehen, dass $\zeta(s)$ für $\Re(s) > 0$ genau einen Pol bei $s = 1$ hat mit Residuum 1.
(7) liefert dann sogar die Holomorphie für $\Re(s) < 1$.
Außerdem folgt mit diesem Residuum und mit $\lim_{s\to 1} \frac{cos\frac{\pi s}{2}}{s} = -\frac{\pi}{2}$ aus (7), dass $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ gilt.
Für $s = 2$ in (7) ergibt sich $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$

2 Eigenschaften der Mellin-Tranformation

Dieses Kapitel bschreibt die Eigenschaften der Mellin-Transformation, indem es verschiedene Rechenoperationen und ihre Auswirkung auf die Mellin-Transformation $M_{\mathrm{f}}(s)$ untersucht.

Satz 2.1 Seien $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $s = a + ib$ mit $\alpha < a < \beta$. Dann gelten formal die folgenden Rechenregeln:
(i) Linearität

$$M_{\alpha f\,+\,\beta g}(s) = \alpha M_{\mathrm{f}}(s) + \beta M_{\mathrm{g}}(s) \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

(ii) Skalierung

$$M_{\mathrm{f}(a\,\cdot\,t)}(s) = a^{-s} M_{\mathrm{f}}(s)$$

Beweis:
i) Klar. Einsetzen liefert Behauptung.
ii)

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{f(at)}}(s) &= \int_0^\infty f(at)t^{s-1}dt \\ &=^1 \int_0^\infty f(x)\left(\frac{x}{a}\right)^{s-1} d\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= \int_0^\infty f(x)x^{s-1}a^{1-s} \cdot \frac{1}{a}dx \\ &= \int_0^\infty f(x)x^{s-1}a^{-s}dx \\ &= a^{-s}M_{\mathrm{f(x)}}(s) \qquad \Box \end{aligned}$$

1) Setze $at = x$

Satz 2.2 *Translation im Bildbereich*
Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $s = a + ib$ mit $\alpha < a < \beta$. Sei weiter $\tau \in \mathbb{C}$. Dann gilt für die Verschiebung im Bildbereich:

$$M_{\mathrm{f}}(s + \tau) = M_{t^\tau f(t)}(s) \ \ \forall \tau \in \mathbb{C}$$

Beweis: Klar. Einsetzen liefert Behauptung.

Satz 2.3 *Potenz von t*
Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $s = a + ib$ mit $\alpha < a < \beta$. Sei weiter $\tau > 0$. Dann gilt:

$$M_{f(t^\tau)}(s) = \tau^{-1} \cdot M_{\mathrm{f}}\left(\frac{s}{\tau}\right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
M_{f(t^\tau)}(s) &= \int_0^\infty f(t^\tau) t^{s-1} dt \\
&=^1 \int_0^\infty f(x)(x^{\frac{1}{\tau}})^{s-1} d(x^{\frac{1}{\tau}}) \\
&= \int_0^\infty f(x) \cdot x^{\frac{s}{\tau}-\frac{1}{\tau}} \cdot \left(\frac{1}{\tau} \cdot x^{\frac{1}{\tau}-1}\right) dx \\
&= \int_0^\infty f(x) \cdot x^{\frac{s}{\tau}} \cdot x^{-\frac{1}{\tau}} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot x^{\frac{1}{\tau}} \cdot x^{-1} dx \\
&= \tau^{-1} \int_0^\infty f(x) x^{\frac{s}{\tau}-1} dx \\
&= \tau^{-1} M_{\mathrm{f(x)}}\left(\frac{s}{\tau}\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

1) Setze $t^\tau = x$

Satz 2.4 *Inversion von t*
Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $s = a + ib$ mit $\alpha < a < \beta$. Dann gilt:

$$M_{f\left(\frac{1}{t}\right)}(s) = M_{\mathrm{f}}(-s)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
M_{f(\frac{1}{t})}(s) &= \int_0^\infty f\left(\frac{1}{t}\right) t^s \frac{dt}{t} \\
&=^1 - \int_\infty^0 f(y) y^{-s} \frac{dy}{y} \\
&= M_{\mathrm{f}}(-s)) \qquad \square
\end{aligned}$$

1) Setze $\frac{1}{t} = y$

Satz 2.5 *Logarithmus*
Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $s = a + ib$ mit $\alpha < a < \beta$. Dann gilt die Beziehung:

$$M_{ln(t) \cdot f(t)}(s) = \frac{d}{ds} \cdot M_{\mathrm{f}}(s)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} M_{ln(t)\,\cdot\,f(t)}(s) &= \int_0^\infty ln(t) \cdot f(t) t^{s-1} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) t^{s-1} \ln(t) dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \frac{d}{ds} t^{s-1} dt \\ &= \frac{d}{ds} M_{\mathrm{f(x)}}(s) \qquad \square \end{aligned}$$

Satz 2.6 *Ableitung*
Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $s = a + ib$ mit $\alpha < a < \beta$. Dann gilt für die Mellin-Transformation der Ableitung f'

$$M_{\mathrm{f'(t)}}(s) = -(s-1) \cdot M_{\mathrm{f(t)}}(s-1) \tag{8}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{f'(t)}}(s) &= \int_0^\infty f'(t) t^{s-1} dt \\ &= [f(t)(t)^{s-1}]_0^\infty - (s-1) \int_0^\infty f(t) t^{s-2} dt \\ &=^1 -(s-1) \int_0^\infty f(t) t^{s-2} dt \\ &= -(s-1) \cdot M_{\mathrm{f(t)}}(s-1) \qquad \square \end{aligned}$$

1) Wir gehen davon aus, dass $M_{f\,\cdot\,g}(s)$ für $\alpha < Im(s) < \beta$ existiert. Dann muss gelten $\lim_{t\to 0} (t^s f(t)) = 0$, $\Re(s) > \alpha$ und $\lim_{t\to\infty} t^s f(t) = 0$, $\Re(s) < \beta$

Satz 2.7*Faltungssatz*
Seien $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $s = a + ib$ mit $\alpha < a < \beta$. Dann gilt

$$M_{f\,*\,g}(s) = M_{\mathrm{f}}(s) \cdot M_{\mathrm{g}}(s)$$

mit der Multiplikativen Faltung

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(u) g\Big(\frac{t}{u}\Big) \frac{du}{u}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
M_{f\,\cdot\,g}(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f\left(\frac{t}{u}\right) g(u) \frac{du}{u} \cdot t^{s-1} dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f\left(\frac{t}{u}\right) t^{s-1} dt \cdot g(u) \frac{du}{u} \\
&=^1 \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)(ux)^{s-1} u dx \cdot g(u) \frac{du}{u} \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx \cdot g(u) u^{s-1} du \\
&= M_{\mathrm{f}}(s) \cdot M_{\mathrm{g}}(s) \qquad \square
\end{aligned}$$

1) Setze $\frac{t}{u} = x$, $dt = udx$

3 Umkehrformel, inverse Mellin-Transformation

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der inversen Mellin-Transformation. Wendet man auf die Mellin-Transformation einer Funktion f(t) die Umkehrformel an, erhält man wieder die ursprüngliche Funktion f(t).

Satz Sei F(s)=M_{f}(s) eine Mellin-Transformation und $a \in \mathbb{C}$, dann erhält man die Ursprungsfunktion f(t) durch

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} t^{-s} F(s) ds \tag{9}$$

Beweis:
Im Folgenden seien $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ die Fourier-Transformation und $F^{-1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) e^{i\tau\omega} d\tau$ die inverse Fourier-Transformation.

$$\begin{aligned}
f(e^t) e^{at} &= F(F^{-1}{}_{(f(e^\tau)e^{\alpha\tau})}(\omega))(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}{}_{f(e^\tau)e^{\alpha\tau}}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^\tau) e^{\alpha\tau} e^{i\omega\tau} d\tau \cdot e^{-i\omega t} d\omega \\
\Longrightarrow f(e^t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^\tau) e^{(\alpha+i\omega)\tau} d\tau \cdot e^{-(a+i\omega)t} d\omega
\end{aligned}$$

Substituiere $s = a + i\omega; ds = i \cdot d\omega$, dann folgt
$f(e^t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^\tau) e^{s\tau} d\tau \cdot e^{-st} ds$

Substituere $u = e^\tau$, dann folgt

$$\begin{aligned} f(e^t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_0^\infty f(u) u^{s-1} du \cdot e^{-st} ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) \cdot e^{-st} ds \end{aligned}$$

Ersetzt man nun e^t durch t, so erhält man die Formel

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) t^{-s} ds \qquad \square$$

4 Beipiele

Nun betrachten wir die Mellin-Transformation anhand konkreter Beispiele.

Beispiel 4.1

Sei die Funktion

$$f(t) = e^{-\alpha t}, \alpha > 0$$

gegeben.

Dann erhalten wir für die Mellin-Transformation

$$\begin{aligned} M_{\text{f(t)}}(s) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} t^s \frac{dt}{t} \\ &=^1 \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{s-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right) du \\ &= \frac{\int_0^\infty e^{-u} u^{s-1} du}{\alpha^{s-1+1}} \\ &= \frac{\Gamma(s)}{\alpha^s} \end{aligned}$$

1) Setze $u = \alpha t$

und für die inverse Mellin-Transformation

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} t^{-s}F(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} t^{-s}\frac{\Gamma(s)}{\alpha^s}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(s)(t\alpha)^{-s}ds \\
a = \Re(s) > 0
\end{aligned}
$$

Die Bedeutung dieser Formel liegt im geschlossenen Ausdruck des komplexen Integrals über die Gammafunktion.

Beispiel 4.2
Beispielhaft betrachten wir die Mellin-Transformation der Reihe

$$
S(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(ny)}{n^2} \tag{10}
$$

Diese Mellin-Transformation brauchen wir für die Anwendung 5.1.

Die Mellin-Transformation lässt sich über den Cauchychen Integralsatz berechnen. Wir schreiben

$$
\begin{aligned}
M_{\frac{cos(yt)}{t^2}}(s) &= \int_0^\infty \frac{cos(yt)}{t^2}t^{s-1}dt \\
&= \int_0^\infty t^{s-3}\cos(yt)dt \\
&=^1 \int_0^\infty \left(\frac{z}{y}\right)^{s-3} cos(z)\frac{1}{y}dz \\
&= \int_0^\infty z^{s-3}cos(z)y^{3-s-1}dz \\
&= y^{2-s}\int_0^\infty z^{s-3}cos(z)dz \\
&=^2 y^{2-s}\cdot\Re\Big(\int_0^\infty z^{s-3}e^{iz}dz\Big)
\end{aligned}
$$

1) Setze $yt = z$; $t = \frac{z}{y}$; $dt = \frac{1}{y}dz$
2) Benutze $e^{iz} = cos(z) + i \cdot sin(z) \Rightarrow cos(z) = \Re(e^{iz})$. Das Integral und der Realteil dürfen vertauscht werden, wenn der Audruck im Integral reell ist. $z \in \mathbb{R}$ gilt bereits. Wir setzen jetzt $s \in \mathbb{R}$ fest.

Wir betrachten den Weg I: $\int_\epsilon^R z^{s-3}e^{iz}dz$ und schließen diesen Weg I durch weitere Wege:

II+III+IV+V mit
II: $z = R + it$, $t \in [0, R]$
-III: $z = iR + t$, $t \in [0, R]$
-IV: $z = it$, $t \in [\epsilon, R]$
-V: $z = \epsilon e^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$

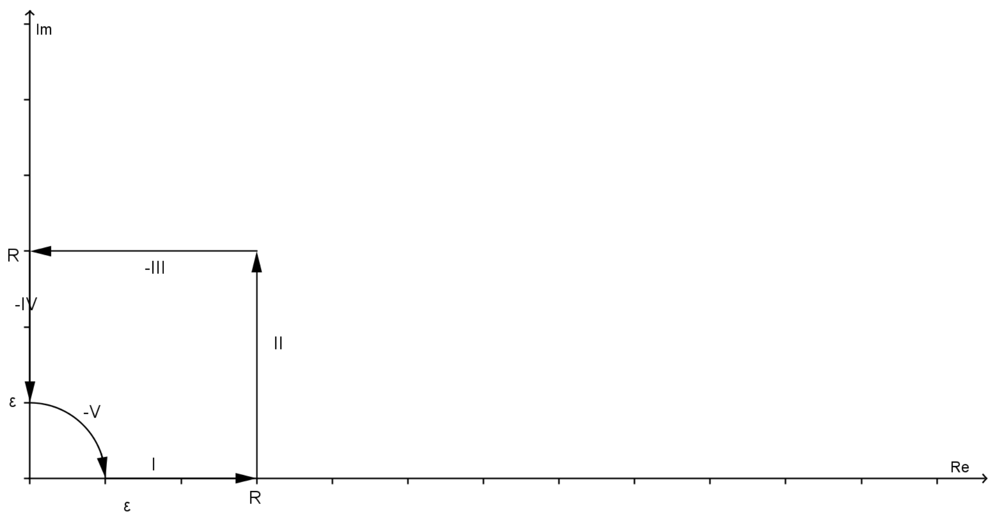

Abbildung 1: Cauchyscher Integralsatz. I+II-III-IV-V=0

Die Wege lassen sich nun abschätzen. Beispielhaft wird dies für den Weg II gezeigt:

Abschätzung Weg II

II: $\alpha_2(t) := R + it$, $t \in [0, R]$
I: $f(z) = z^{s-3}e^{iz}$, $z \in [\epsilon, R]$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\alpha_2} f(z)dz\right| &= \left|\int_0^R f(\alpha_2(t))\cdot {\alpha_2}'(t)\right| \\
&= \left|\int_0^R (R+it)^{s-3}\cdot e^{i(R+it)}\cdot idt\right| \\
&\leq^1 \int_0^R |R+it|^{s-3}\cdot \left|e^{i(R+it)}\right| dt \\
&\leq \int_0^R |R+iR|^{s-3}\cdot e^{-t}dt \\
&= \int_0^R \sqrt{R^2+R^2}^{s-3}\cdot e^{-t}dt \\
&= \int_0^R \sqrt{2}^{s-3}\cdot R^{s-3}\cdot e^{-t}dt \\
&\leq^2 \int_0^R R^{s-3}\cdot e^{-t}dt \xrightarrow[\text{s<3}]{R\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

1) Dreiecksungleichung für Integrale
2) s<3

Weg II lässt sich also abschätzen durch $R^{s-3}\int_0^R e^{-t}dt$ und verschwindet für $R\to\infty$ und $s<3$.
Weg -III lässt sich analog abschätzen durch $e^{-R}R^{s-3}\int_0^R dt$ und verschwindet für $R\to\infty$.
Weg -IV liefert das Integral $\int_\epsilon^R e^{-t}(it)^{s-3}d(it)$.
Die Abschätzung von Weg -V verschwindet für $s>2$ und $\epsilon\to 0$.

Der Integrand $z^{s-3}e^{iz}$ ist holomorph im Inneren des durch I,II,III,IV,V berandeten Gebietes, so dass nach der Cauchyschen Integralformel das Randintegral verschwindet. Der Cauchysche Integralsatz besagt, dass das Integral $\int_\gamma f=0$ über jede geschlossene Kurve $\gamma\colon [0,1]\to D$ verschwindet.
Da die Integrale II,III,V verschwinden, folgt $\int_I - \int_{IV} = 0$ und somit

$$
\begin{aligned}
\int_I = \int_0^\infty z^{s-3}e^{iz}dz &= \int_0^\infty (it)^{s-3}e^{-t}d(it) = \int_{IV} \\
&=^1 e^{\frac{\pi}{2}(s-2)}\int_0^\infty t^{s-3}e^{-t}dt \\
&= -e^{\frac{\pi s}{2}}\Gamma(s-2)
\end{aligned}
$$

1) $i=e^{\frac{\pi}{2}}$

Nehmen wir den Realteil, so folgt mit $e^{iz} = cos(z) + i \cdot sin(z)$ und $\Re(e^{it}) = cos(z)$, $s \in \mathbb{R}, 2 < s < 3$

$$\int_0^\infty z^{s-3} cos(z) dz = -\Gamma(s-2) \cos \frac{\pi s}{2}$$

Mit $M_{\frac{cos(ty)}{t^2}}(s) = y^{2-s} \cdot \Re(\int_0^\infty z^{s-3} e^{iz} dz)$ folgt nun

$$M^*_{\frac{cos(ty)}{t^2}}(s) = -y^{2-s} \cdot \Gamma(s-2) \cdot cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), 2 < s < 3 \tag{11}$$

Diese reelle Lösung $M^*(s)$ ist auch wirklich die (komplexe) Mellin-Transformation $M(s)$ der Summe $S(y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{cos(ny)}{n^2}$, denn $M(s)$ und $M^*(s)$ sind zwei Funktionen, die holomorph sind und auf dem Kurvenstück [0,R] übereinstimmen. Dann folgt mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen, dass $M(s)$ und $M^*(s)$ im Holomorphiegebiet überall gleich sind. Daher ist $M^*(s)$ auch wirklich die Mellin-Transformation der Summe $S(y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{cos(ny)}{n^2}$ und es gilt $M(s) = M^*(s) = -y^{2-s} \cdot \Gamma(s-2) \cdot cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), 2 < \Re(s) < 3$.

Beispiel 4.3 Sei jetzt die Funktion

$$g(t) = (1+t)^{-1}$$

gegeben mit der Mellin-Transformation

$$M_{\mathrm{g(t)}}(s) = \int_0^\infty (1+t)^{-1} t^{s-1} dt$$

Substituiere $t + 1 = \frac{1}{1-x}$, $t = -\frac{x}{1-x}$, $x = \frac{t}{t+1}$, $dx = -\frac{dt}{(t+1)^2}$
Als Mellin-Transformation erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{g(x)}}(s) &= \int_0^1 (1-x)\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)^{s-1} \cdot (-\frac{1}{1-x})^2 dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-x} (\frac{x}{1-x})^{s-1} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-x} \cdot x^{s-1} \cdot (\frac{1}{1-x})^{s-1} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right)^s x^{s-1} dx \\
&= \int_0^1 (1-x)^{-s} x^{s-1} dx \quad , \quad 0 < \Re(s) < 1 \\
&= B(s, 1-s) \\
&=^1 \Gamma(s)\Gamma(1-s)
\end{aligned}$$

wobei B(s,1-s) die Betafunktion (Definition 1.6) und Γ die Gammafunktion (Definition 1.4) ist.
1) Benutze, dass $\Gamma(1) = 1$.

5 Anwendung

Anwendung 5.1 *Transformation langsam konvergierender Reihen*
Die Mellin-Transformation beabsichtigt in erster Linie eine numerische Berechnung mathematischer Probleme. Sie kann aber auch zur Transformation lansam konvergenter Reihen genutzt werden, um sie entweder exakt berechnen zu können oder sie in schneller konvergierende Reihen umzuwandeln. Sei S eine Reihe der Form

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{12}$$

deren Terme für eine Funktion f(t) mit ganzzähligen $t \in (0, \infty)$ stehen. Wenn f(t) eine Mellin-Transformation F(s) mit $S(\alpha, \beta)$ als holomorphen Definitionsbereich besitzt, kan man die Rücktransformation schreiben als:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) t^{-s} ds \quad , \quad \alpha < a < \beta$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Beziehung (7) ein, erhält man

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) n^{-s} ds && (13) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) n^{-s} ds && (14) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} ds && (15) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) \zeta(s) ds && (16) \end{aligned}$$

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ist die Riemann-Zeta-Funktion (Definition 1.8).

Das Integral (16) kann nun durch die Berechnung von Residuen bestimmt werden und man erhält im Idealfall unendliche Reihen, die schneller konvergieren als die Usprungsreihe. Vorsicht ist geboten bei der Umformung von (14) zu (15). Vertauscht man die Summe und das Integral, obwohl dies unzulässig ist, führt die Rechnung zu einem falschen Ergebnis.

Beispiel 5.2
Beispielhaft betrachten wir diese Anwendung an der Reihe

$$S(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(ny)}{n^2} \tag{17}$$

Die Mellintransformation ließ sich (wie in Beispiel 4.2 gesehen) über den Cauchychen Integralsatz berechnen.

$$M_{\frac{cos(ty)}{t^2}}(s) = -y^{2-s} \cdot \Gamma(s-2) \cdot cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \quad , \quad 2 < \Re(s) < 3 \tag{18}$$

Die Reihe S können wir nun wie in (16) schreiben als

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} M_{\frac{cos(ty)}{t^2}}(s)\zeta(s)ds \tag{19}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{2-s}\Gamma(s-2) \cdot cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)ds \tag{20}$$

Der in der Anwendung (5.1) betrachtete Tausch der Summe und des Integrals von (14) zu (15) ist in diesem Beispiel auf Grund der absoluten Konvergenz erlaubt. Mit Hilfe der Riemannschen Funktionalgleichung (Bemerkung 1.9)

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cdot cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \Gamma(s)\zeta(s) \tag{21}$$

$$\Leftrightarrow \pi^s\zeta(1-s) = 2^{1-s} \cdot cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \Gamma(s)\zeta(s) \tag{22}$$

können wir das Integral jetzt umschreiben:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{2-s}\Gamma(s-2) \cdot cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)ds \\ &=^1 -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{2-s}\frac{\Gamma(s)}{(s-1)(s-2)} \cdot cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)ds \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{2-s}\frac{2^{s-1}}{(s-1)(s-2)}2^{1-s}\Gamma(s) \cdot cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)ds \\ &=^2 -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{2-s}2^{s-1}\pi^s \cdot \frac{\zeta(1-s)}{(s-1)(s-2)}ds \end{aligned}$$

1) $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1) = (s-1)(s-2)\Gamma(s-2) \Rightarrow \Gamma(s-2) = \frac{\Gamma(s)}{(s-1)(s-2)}$ $(Bemerkung 1.5)$
2) (22) einsetzen

Die Funktion ist überall definiert, außer an der Stelle s=1, wo sie einen einfachen Pol mit dem Residuum 1 hat. Damit sind die Pole des Integranden genau bei s=0, s=1, s=2.

Es gilt $\zeta(t) = \frac{1}{t-1}$ in der Nähe von t=1, damit gilt $\zeta(1-s) = -\frac{1}{s}$ in der Nähe von s=0, sodass der Pol des Integranden bei s=0 das Residuum $-\frac{y^2}{4}$ hat.

Der Pol bei s=1 hat das Residuum $\frac{\pi y \zeta(0)}{-1} = \frac{\pi y}{2}$ nach obigem Wert für $\zeta(0)$.
Schließlich hat der Pol bei s=2 das Residuum $\frac{2\pi^2 \zeta(-1)}{1} = -\frac{\pi^2}{6}$.
Zusammen mit dem globalem Vorfaktor folgt mit dem Residuensatz das Ergebnis

$$S = \frac{y^2}{4} - \frac{\pi y}{2} + \frac{\pi^2}{6} \tag{23}$$

6 Literaturverzeichnis

Die folgenden Literaturangaben sind alphabetisch nach den Namen der Autoren geordnet. Bei mehreren Autoren ist der Name des ersten Autors berücksichtigt.

[1] Davies B., Integral Transforms and Their Applications, Springer-Verlag

[2] Forster O., http://www.mathematik.uni-muenchen.de/forster/v/azt11/anazth_08.pdf (Stand: November 2012)

[3] Fritsche K., Funktionentheorie, Uni Wuppertal, http://www2.math.uni-wuppertal.de/fritzsch/an3_kap3.pdf (Stand: Oktober 2012)

[4] Meier H., Zusatzskript zur Vorlesung Analtische Zahlentheorie Uni Ulm, 2007, http://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.zawa/lehre/ 07Ana-Zahl/zusatz.pdf (Stand: Oktober 2012)

[5] Poularikas AD. (Hrsg.), The Transforms and Applications Handbook, CRC Press, 2000, 11 J. Bertrand, P.Bertrand, J. Ocarlez, The Mellin Transform. http://dsp-book.narod.ru/TAH/ch11.pdf (Stand: Oktober 2012)

[6] Sneddon I., The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill, 1972