Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 12/13

Probeklausur zur Mathematik für Physiker III

Vorbemerkungen:

- Die folgenden Aufgaben waren Klausuraufgaben im WS 2010/11.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausur am 1.2.2013 wird zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel zur Klausur ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Insbesondere sind Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Zur Teilnahme an der Klausur ist (außer für die Diplom-Studiengänge) eine Anmeldung im QISPOS erforderlich. Zur Aufteilung auf die beiden Hörsäle HS1 und M1 gibt es außerdem eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1655 oder id 1656 bis zum 27.1.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Die Probeklausur wird am 29.1.2013 ab 18h00 im M3 vorgerechnet.

Aufgabe 1. Auf dem offenen Quadrat $Q :=]-2,2[\times]-2,2[$ werde eine Funktion $F : Q \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y) := xy^2 + 2\sin(y) - \sqrt{3+x^2}$.

a) Zeigen Sie: Es gibt genau ein $y_0 \in]-2,2[$ mit $F(0,y_0) = 0$.

b) Zeigen Sie: Für geeignete Wahl von $\epsilon > 0$ gibt es genau eine Lösung $y :]-\epsilon,\epsilon[\to \mathbb{R}$ der Gleichung $F(x,y(x)) = 0$ mit $y(0) = y_0$ aus a).

c) Berechnen Sie $y'(0)$ für die Lösung aus b).

Aufgabe 2. Es sei $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{8} = 1\}$.

a) Zeigen Sie: Die durch $F(x,y,z) = x + y + z$ definierte Funktion $F : E \to \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum.

b) Berechnen Sie alle Punkte von E, in denen F maximal ist, und geben Sie den Wert dieses Maximums an.

Aufgabe 4. Durch $c(t) = ((1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\sin t)$ werde eine differenzierbare Kurve $c : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert.

a) Berechnen Sie die Bogenlänge $L(c)$. *Hinweis:* $1 + \cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2}$

b) Berechnen Sie das Integral der Differentialform $\omega(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2}(-\xi_2 dx_1 + \xi_1 dx_2)$ längs c. *Bemerkung: Das Integral berechnet die Sektorfläche unter der Kurve c.*

Aufgabe 5. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a) $x'(t) = \frac{\sqrt{1-(x(t))^2}}{1+t^2}$ mit $x(0) = \frac{1}{2}$.

b) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) + te^{-t} = 0$ mit $x(0) = \frac{1}{2}$ und $x'(0) = 0$.

Aufgabe 6.

a) Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, an denen die Funktion $f(z) = 1 + |z| - |z|^3$ komplex differenzierbar ist.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \frac{x\sin x}{(1+x^2)(4+x^2)}$.

Aufgabe 7. Ein (masseloses, unendlich dünnes) zylindrisches Gefäß $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x^2 + y^2 \le R^2 \ , \ 0 \le z \le h\}$ sei mit Luft gefüllt, deren Dichte nach der barometrischen Höhenformel gegeben ist durch $\mu(x,y,z) = \mu_0 e^{-\frac{z}{a}}$, mit R, h, a, μ_0 konstant. Berechnen Sie (jeweils als Funktion von R, h, a, μ_0)

a) die Masse der Luftsäule,

b) den Schwerpunkt $(0,0,s_z)$ der Luftsäule,

c) das Trägheitsmoment der Luftsäule bei Rotation um die x-Achse. (*Achtung: Das ist nicht die Symmetrieachse! Es werde eine infinitesimale Rotation betrachtet, so daß die Luftsäule als starrer Körper angenommen werden kann.*)