Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 12/13**

Übung zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 20.11.2012, 12 Uhr in den Briefkästen Blatt 6

Achtung: Aufgabe 4 befindet sich auf der Rückseite!

Aufgabe 1. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $x'(t) = x(t)\sqrt[3]{t}$ mit $t \in (0, \infty)$.

(b) $x(t) + x'(t) = \cos(t)$ und $x(0) = 0$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$x''(t) = f(x(t)) = 2x(t)^3, \qquad x(-2) = 1,\ x'(-2) = 1$$

mit dem Potential-Ansatz (siehe Beispiel 10.10 der Vorlesung)

$$\frac{1}{2}(x'(t))^2 + U(x(t)) = \text{const.}, \text{ wobei } U(x) = -\int_{x_0}^{x} ds\, f(s)$$

und geben Sie den Definitionsbereich der Lösung an.

Aufgabe 3. Das Problem der Brachistochrone (Beispiel 8.4 der Vorlesung) führte zu der Differentialgleichung

$$y'(x)^2 - \frac{1}{E^2 y(x)} = -1. \tag{1}$$

Trennung der Variablen führt zu einem Integral, für das kein geschlossener Ausdruck bekannt ist. Eine Parameterdarstellung der Lösungskurve erhält man aber, indem man x als Funktion eines Parameters t auffasst und $z(t) := y(x(t))$ setzt.

(a) Zeigen Sie, dass aus (1) mit der Annahme $x'(t) = z(t) \neq 0$ folgt:

$$z'(t)^2 + z(t)^2 = \frac{z(t)}{E^2}. \tag{2}$$

(*Hinweis:* Benutzen Sie die Kettenregel $\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.)

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung (2) für $z'(t) \geq 0$ und $z(0) = 0$ durch Trennung der Variablen.
(*Hinweis:* Schreiben Sie die Integrationsvariable im z-Integral als $\frac{1}{E^2}\sin^2 u$.)

(c) Folgern Sie aus (b) für den Fall $x(0) = 0$:

$$z(t) = \frac{1}{2E^2}(1 - \cos t), \qquad x(t) = \frac{1}{2E^2}(t - \sin t).$$

(*Hinweis:* In welcher Beziehung stehen $\sin^2 \frac{t}{2}$ und $\cos t$?)

Aufgabe 4. Ein Pferd läuft in x-Richtung bei $x = l > 0$ mit konstanter Geschwindigkeit v_p los. Ein beliebig dehnbares homogenes Band ist mit dem einen Ende im Nullpunkt befestigt, mit dem anderen Ende am Pferd. Eine Schnecke beginnt gleichzeitig mit dem Pferd im Nullpunkt mit konstanter (Relativ-) Geschwindigkeit v_s auf dem Band zu laufen.

(a) Ermitteln Sie den Ort der Schnecke in Abhängigkeit von der Zeit.

(*Zur Kontrolle:* Für den Ort x_s der Schnecke ergibt sich die lineare DGL $x_s'(t) = v_s + x_s(t)\frac{v_p}{tv_p+l}$ mit $x_s(0) = 0$.)

(b) Wird die Schnecke das Pferd erreichen? Geben Sie den Zeitpunkt davon in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten der beiden Tiere und der Länge des Bandes an. (*Hinweis:* An der Langlebigkeit der Tiere bestehe kein Zweifel.)