Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 12/13

Übung zur Mathematik für Physiker III

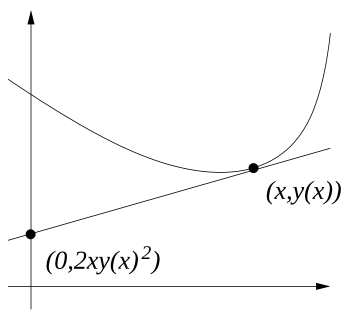
Abgabe: Bis 11.12.2012, 12 Uhr in den Briefkästen — Blatt 9

Aufgabe 1. Prüfen Sie, ob die folgenden 1-Formen ω geschlossen sind, und berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_c \omega$. Nutzen Sie dabei nach Möglichkeit Wegunabhängigkeit:

(a) $\omega = (\mathrm{e}^x \sin y - 2y \sin x)dx + (\mathrm{e}^x \cos y + 2\cos x)dy$
$c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (2\cos t, 3\sin t)$.

(b) $\omega = (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$
$c\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(\frac{\pi}{2} t^2, t\right)$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie eine differenzierbare Funktion $y\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ so, dass für jeden Punkt $(x, y(x))$ der zugehörigen Kurve diejenige Tangente, welche die Kurve in $(x, y(x))$ berührt, die y-Achse im Punkt $(0, 2xy^2)$ schneidet (s. Bild). (*Hinweis:* Die zu lösende DGL kann durch einen integrierenden Faktor der Form y^{-2} in eine exakte Form gebracht werden.)



Aufgabe 3. Prüfen Sie die folgenden DGL auf Exaktheit, bestimmen Sie bei Bedarf einen integrierenden Faktor μ der Form $\mu = \mu(t)$ und lösen Sie die DGL:

(a) $(2t + 3) + (2x(t) - 2)x'(t) = 0$.

(b) $(t^2 + x(t)) - tx'(t) = 0$ für $t > 0$.

Aufgabe 4. (a) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$, mit $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$. (Erraten erlaubt.)

(b) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$, mit $v(x, y) = -\sin(x)\sinh(y) = -\sin(x)\frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2}$. (Erraten erlaubt.)

(c) Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Funktion $f\colon z \mapsto |z|^4 - 2|z|^2$ die Cauchy-Riemannschen DGL erfüllt, also komplex differenzierbar ist. Wo ist diese Funktion holomorph?