

Integrationstheorie

Inhalt

I	Differenzierbare Abbildungen	1
1	Differenzierbarkeit	1
2	Vektorfelder, Gradient und Divergenz	9
3	Die mehrdimensionale Taylorsche Formel	11
4	Der Satz über implizite Funktionen	16
5	Untermannigfaltigkeiten	22
6	Differenzierbare Kurven	31
7	Variationsrechnung	34
II	Gewöhnliche Differentialgleichungen	42
8	Definition und Interpretation	42
9	Elementare Lösungsmethoden	43
10	Existenz- und Eindeutigkeitsatz	48
11	Lineare Differentialgleichungen	52
12	Potenzreihenansatz und spezielle Funktionen	58
13	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	62
III	Grundlagen der Funktionentheorie	69
14	Differentialformen und Kurvenintegrale	69
15	Exakte 1-Formen	74
16	Exakte Differentialgleichungen	78
17	Holomorphe Funktionen	81
18	Der Cauchysche Integralsatz	83
19	Die Cauchysche Integralformel	89
20	Der Residuensatz	93
IV	Das Lebesgue-Integral	101
21	Treppenfunktionen und L^1 -Halbnorm	101
22	Das Lebesgue-Integral	105
23	Vollständigkeit des Lebesgue-Integrals	110
24	Berechnung von Lebesgue-Integralen über Fubini	112
25	Konvergenzsätze	117
26	Der Satz von Fubini	122
27	Der Transformationssatz	125
28	L^p -Räume und Fourier-Transformation	131
29	Beweis des Transformationssatzes	138
30	Integration über Untermannigfaltigkeiten	143
31	Der Gaußsche Integralsatz	148

Literatur

K. Königsberger, “Analysis 2,” Springer 2004.

O. Forster, “Analysis 2,” Vieweg 2005.

Teil I

Differenzierbare Abbildungen

Im Gegensatz zur eindimensionalen Differentialrechnung gibt es im Höherdimensionalen verschiedene Differenzierbarkeitsbegriffe.

1 Differenzierbarkeit

Zentral bei differenzierbaren Abbildungen ist die lineare Approximierbarkeit in Analogie zur Steigung der Tangente an eine eindimensionale Funktion. Diese lineare Approximierbarkeit läßt sich koordinatenfrei formulieren und kann deshalb auch in unendlich-dimensionalen normierten Vektorräumen definiert werden. Für das totale Differential gibt es ein Analogon zur Kettenregel.

Definition 1.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *total differenzierbar* (oder einfach nur *differenzierbar*) im Punkt $x \in U$, falls es eine lineare Abbildung $A(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine auf einer offenen Umgebung V von $0 \in \mathbb{R}^n$ definierte Abbildung $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, so daß

$$f(x + \xi) = f(x) + A(x) \circ \xi + \phi(\xi) \quad \text{mit} \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n \\ \xi \neq 0}} \frac{\phi(\xi)}{\|\xi\|} = 0 \quad \text{für alle } \xi \in V .$$

Dann heißt die lineare Abbildung $(Df)(x) := A(x)$ das *totale Differential* (oder einfach nur das *Differential*) von f im Punkt x .

Eine differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *stetig differenzierbar*, wenn das Differential $Df : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ stetig ist.

Einige Bemerkungen:

- Um den Restterm nicht ganz so mühsam zu charakterisieren, schreibt man einfach $o(\|\xi\|)$ und meint eine Abbildung $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit obigen Eigenschaften.
- Da alle Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen äquivalent sind, ist die Definition der Differenzierbarkeit unabhängig von der Wahl der Norm.
- Die lineare Abbildung $A(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist bezüglich der Standardbasen durch eine $(m \times n)$ -Matrix gegeben, die wir mit dem gleichen Buchstaben bezeichnen, $A(x) = (a_{ij}(x)) \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Die Matrix $A = Df$ heißt *Jacobi-Matrix*. Variiert man den Punkt $x \in U$, so ist Df also durch $m \cdot n$ Funktionen $a_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmt.
- Zur Definition der Stetigkeit von $Df : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ als endlich-dimensionaler normierter Vektorraum aufzufassen. Eine mögliche Norm ist die *Operatornorm*.

- Oft schreibt man auch df oder f' für das totale Differential. Wir reservieren d für das später einzuführende äußere Differential.

Die Definition läßt sich auf unendlich-dimensionale normierte Vektorräume verallgemeinern:

Definition 1.2 Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $f : U \rightarrow Y$ heißt *Fréchet-differenzierbar* im Punkt $x \in U$, falls es einen linearen beschränkten Operator $A(x) \in \mathcal{B}(X, Y)$ und eine auf einer offenen Umgebung V von $0 \in X$ definierte Abbildung $\phi : V \rightarrow Y$ gibt, so daß

$$f(x + \xi) = f(x) + A(x) \circ \xi + \phi(\xi) \quad \text{mit} \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \in X \\ \xi \neq 0}} \frac{\phi(\xi)}{\|\xi\|_X} = 0 \quad \text{für alle } \xi \in V .$$

Dabei ist die Konvergenz in Y bezüglich $\|\cdot\|_Y$ erklärt. Der lineare beschränkte Operator $(Df)(x) = A(x)$ heißt dann die *Fréchet-Ableitung* von f im Punkt x .

Wir erinnern an die partiellen Ableitungen aus dem 1. Semester:

Definition 1.3 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x \in U$ *partiell differenzierbar* in der j -ten Koordinatenrichtung, falls der Grenzwert

$$(\partial_j f)(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} (f(x + he_j) - f(x))$$

(die j -te partielle Ableitung von f in x) existiert. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *partiell differenzierbar*, falls $(\partial_j f)(x)$ für alle $x \in U$ und alle $1 \leq j \leq n$ existiert, und *stetig partiell differenzierbar*, falls alle Funktionen $\partial_j f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Iterativ können höhere partielle Ableitungen eingeführt werden. Zentrales Ergebnis ist der Satz von Schwarz: Für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen vertauschen die zweiten partiellen Ableitungen.

Eine Verallgemeinerung der partiellen Ableitung ist die Richtungsableitung:

Definition 1.4 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann heißt der Differentialquotient

$$(D_v f)(x) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

die *Richtungsableitung* der Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt x in Richtung v .

Insbesondere sind die partiellen Ableitungen die Richtungsableitungen in Richtung der Standardbasisvektoren, $(D_{e_i} f)(x) = (\partial_i f)(x)$. Damit folgt aus der Existenz aller Richtungsableitungen die partielle Differenzierbarkeit. Die Umkehrung gilt nicht.

Wir zeigen zunächst Implikationen der totalen Differenzierbarkeit:

Satz 1.5 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt $x \in U$ differenzierbar mit $f(x + \xi) = f(x) + A(x) \cdot \xi + o(\|\xi\|)$ und $Df(x) = A(x) = (a_{ij}(x))$. Dann gilt:

- i) f ist im Punkt $x \in U$ stetig.
- ii) Alle Komponenten $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ von $f = (f_1, \dots, f_m)$ sind im Punkt x partiell differenzierbar mit $(\partial_j f_i)(x) = a_{ij}(x)$.
- iii) f besitzt Richtungsableitungen in jede Richtung, und für $v = \sum_{j=1}^n e_j v_j$ gilt $(Df)(x) \circ v = (D_v f)(x) = \sum_{j=1}^n v_j (\partial_j f)(x)$.

Beweis. i) Wegen $\lim_{\xi \rightarrow 0} A(x) \cdot \xi = 0$ und $\lim_{\xi \rightarrow 0} o(\|\xi\|) = 0$ gilt $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(x + \xi) = f(x)$. Damit ist f stetig.

ii) Ist e_k der k -te Basisvektor der Standardbasis, dann ist $A(x) \circ e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}(x) e_i$, so daß für $\xi = h \cdot e_j$ und $f = \sum_{i=1}^m f_i e_i$ gilt

$$f_i(x + h \cdot e_j) = f_i(x) + a_{ij}(x) \cdot h + o(h) \quad \Rightarrow \quad (\partial_j f_i)(x) = a_{ij}(x) .$$

iii) Die Richtungsableitung ist

$$\begin{aligned} (D_v f)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((Df)(x) \circ (tv) + \phi(tv)) = (Df)(x) \circ v \end{aligned}$$

wegen $\phi(tv) = o(\|tv\|) = o(t)$. In der Standardbasis ist $(Df)(x) \circ v = A(x) \circ v = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v_j a_{ij}(x) e_i$. \square

Nach Satz 1.5 bietet sich folgende Strategie zur Überprüfung der Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, an: Man bilde, falls existent, die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ der partiellen Ableitungen $a_{ij}(x) = \partial_j f_i$. Die Abbildung f ist genau dann differenzierbar, wenn $f(x + \xi) - f(x) - A(x) \cdot \xi = o(\|\xi\|)$ für alle $\xi \in V$.

Beispiel 1.6 Es sei $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \sin y \\ y^2 e^x \end{pmatrix}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (\partial_1 f_1)(x, y) &= \sin y, & (\partial_2 f_1)(x, y) &= x \cos y, \\ (\partial_1 f_2)(x, y) &= y^2 e^x, & (\partial_2 f_2)(x, y) &= 2y e^x, \end{aligned}$$

also $A(x, y) = \begin{pmatrix} \sin y & x \cos y \\ y^2 e^x & 2y e^x \end{pmatrix}$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} &f(x + \xi, y + \eta) - f(x, y) - A \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x + \xi) \sin(y + \eta) - x \sin y - \xi \sin y - x \eta \cos y \\ (y + \eta)^2 e^{x+\xi} - y^2 e^x - y^2 e^x \xi - 2y \eta e^x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2(x + \xi) \sin y \sin^2 \frac{\eta}{2} + \xi \cos y \sin \eta + x \cos y (\sin \eta - \eta) \\ y^2 e^x (e^\xi - 1 - \xi) + 2y \eta e^x (e^\xi - 1) + \eta^2 e^{x+\xi} \end{pmatrix} = o(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}), \end{aligned}$$

da sämtliche Einträge der Matrix für $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow 0$ mindestens quadratisch gegen 0 gehen. Damit ist f differenzierbar mit $(Df)(x) = A$. \triangleleft

Aus partieller Differenzierbarkeit folgt nicht die totale Differenzierbarkeit. Zunächst muß die aus den partiellen Ableitungen gebildete Matrix nicht unbedingt linear sein. Aber selbst wenn sie linear ist, kann es noch Probleme mit dem Restglied geben:

Beispiel 1.7 Es sei

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Kritisch ist der Punkt $(x, y) = (0, 0)$. Dort existieren alle Richtungsableitungen,

$$(D_{(\cos \theta, \sin \theta)} f)(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{t^4 \cos \theta \sin^3 \theta}{t^2 \cos^2 \theta + t^4 \sin^4 \theta} = 0.$$

Insbesondere ist f partiell differenzierbar in $(0, 0)$ mit $(\partial_x f)(0, 0) = (\partial_y f)(0, 0) = 0$. Die aus den partiellen Ableitungen gebildete Matrix, die Nullmatrix, ist linear. Deshalb ist das Restglied $\phi(\xi, \eta) = f(\xi, \eta)$. Für die gegen $(0, 0)$ konvergente Folge $(\xi_k, \eta_k) = (\frac{1}{2^k} \cos \theta, \frac{1}{2^k} \sin \theta)$ ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\phi(\xi_k, \eta_k)}{\sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2}} = 0,$$

aber für die ebenfalls gegen 0 konvergente Folge $(\xi_k, \eta_k) = (\frac{1}{4^k} \cos \theta, \frac{1}{2^k} \sin \theta)$ haben wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\phi(\xi_k, \eta_k)}{\sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{2k+3k}} \cos \theta \sin^3 \theta}{\frac{1}{2^{4k}} (\cos^2 \theta + \sin^4 \theta)} \cdot \frac{2^k}{\sqrt{\frac{1}{2^k} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^4 \theta} \neq 0.$$

Somit ist $\phi(0, 0) \neq o(\|\xi\|)$, und f ist nicht differenzierbar in $(0, 0)$. \triangleleft

Ein hinreichendes Kriterium für (stetige) Differenzierbarkeit ist stetige partielle Differenzierbarkeit:

Satz 1.8 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar auf U . Sind alle partiellen Ableitungen $\partial_j f$ stetig im Punkt $x \in U$, dann ist f im Punkt x total differenzierbar, und das Differential Df ist stetig im Punkt x .

Beweis. Da U offen, gibt es ein $\delta > 0$ mit $K_\delta(x) \subseteq U$. Wir wählen ein $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$ und betrachten die Punkte $z^{(k)} := x + \sum_{j=1}^k \xi_j e_j$. Es gilt $z^{(0)} = x$ und $z^{(n)} = x + \xi$. Da sich benachbarte $z^{(k-1)}$ und $z^{(k)}$ nur in der

k -ten Koordinate unterscheiden, können wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden: Es gibt also ein $\eta^{(k)} \in \mathbb{R}$ mit $|\eta^{(k)}| < \xi_k$, so daß

$$f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)}) = \xi_k \cdot (\partial_k f)(y^{(k)}), \quad y^{(k)} := z^{(k-1)} + \eta^{(k)} e_k.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} f(x + \xi) &= f(x) + \sum_{k=1}^n \xi_k \cdot (\partial_k f)(y^{(k)}) \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^n (\partial_k f)(x) \cdot \xi_k + \underbrace{\sum_{k=1}^n ((\partial_k f)(y^{(k)}) - (\partial_k f)(x)) \cdot \xi_k}_{\phi(\xi)}. \end{aligned}$$

Für $\xi \rightarrow 0$ strebt y_k gegen x . Aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen folgt $\lim_{\xi \rightarrow 0} (\partial_k f)(y^{(k)}) = (\partial_k f)(x)$ und damit $\lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n \\ \xi \neq 0}} \frac{\phi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$.

Somit ist f differenzierbar in x mit $(Df)(x) = ((\partial_1 f)(x), \dots, (\partial_n f)(x))$. Insbesondere ist (Df) stetig in x . \square

Durch Kombination der Sätze 1.5 und 1.8 folgt, daß jede stetig partiell differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf U auch stetig ist. Außerdem gelten folgende Implikationen:

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar
- $\Rightarrow f : U \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar
- $\Rightarrow f : U \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt Richtungsableitungen in jede Richtung
- $\Rightarrow f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar

Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht.

Es gelten die üblichen Linearitäts- und Produktregeln:

Satz 1.9 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in U$. Dann gilt:*

- i) $f_1 + f_2$ ist differenzierbar in x mit $(D(f_1 + f_2))(x) = Df_1(x) + Df_2(x)$,
- ii) $f \cdot g$ ist differenzierbar in x mit $(D(f \cdot g))(x) = (Df)(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)$,
- iii) Ist $f(x) \neq 0$, dann ist $\frac{1}{f}$ differenzierbar in x mit $(D\frac{1}{f})(x) = -\frac{Df(x)}{(f(x))^2}$.

Beweis. Ähnlich zu Satz 23.6 aus dem ersten Semester. i) ist klar. Zu ii):

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x + \xi) - (f \cdot g)(x) &= (f(x + \xi) - f(x)) \cdot g(x + \xi) + f(x) \cdot (g(x + \xi) - g(x)) \\ &= ((Df)(x) \cdot \xi + o(\|\xi\|)) \cdot g(x + \xi) + f(x) \cdot (Dg(x) \cdot \xi + o(\|\xi\|)) \\ &= (Df)(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x) + o(\|\xi\|). \end{aligned}$$

Analog ergibt sich iii). □

Satz 1.10 (Kettenregel) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen sowie $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ Abbildungen mit $f(U) \subseteq V$. Die Abbildung f sei im Punkt $x \in U$ differenzierbar, und g sei im Punkt $f(x) \in V$ differenzierbar. Dann ist die Abbildung $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ im Punkt $x \in U$ differenzierbar, und es gilt

$$(D(g \circ f))(x) = (Dg)(f(x)) \circ (Df)(x) .$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$f(x+\xi) = f(x) + (Df)(x) \circ \xi + o(\|\xi\|) , \quad g(y+\eta) = g(y) + (Dg)(y) \circ \eta + o(\|\eta\|) .$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x + \xi) &= g(f(x + \xi)) = g\left(\underbrace{f(x)}_y + \underbrace{(Df)(x) \circ \xi + o(\|\xi\|)}_\eta\right) \\ &= g(f(x)) + (Dg)(f(x)) \circ ((Df)(x) \circ \xi + o(\|\xi\|)) \\ &\quad + o(\|(Df)(x) \circ \xi + o(\|\xi\|)\|) \\ \text{Linearität} \Rightarrow &= (g \circ f)(x) + ((Dg)(f(x)) \circ (Df)(x)) \circ \xi \\ &\quad + (Dg)(f(x)) \circ o(\|\xi\|) + o(\|(Df)(x) \circ \xi + o(\|\xi\|)\|) . \end{aligned}$$

Da die letzte Zeile wieder $o(\|\xi\|)$ ist, folgt die Behauptung. □

Zu beachten ist, daß $(Dg)(f(x)) \circ (Df)(x)$ die Komposition linearer Abbildungen bzw. die Multiplikation der entsprechenden Jacobi-Matrizen ist. Die Reihenfolge von $(Dg)(f(x))$ und $(Df)(x)$ darf nicht geändert werden!

Beispiel 1.11 Es sei

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 & \text{gegeben durch} \quad f(t) := (t, t^2 + 1, \sin t) , \\ g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} & \text{gegeben durch} \quad g(x, y, z) := e^{xy} + z . \end{array}$$

Zu bestimmen sei $D(g \circ f)(\pi)$.

Da f, g stetig partiell differenzierbar sind, gilt

$$(Dg)(x, y, z) = (\partial_x g, \partial_y g, \partial_z g)(x, y, z) = (ye^{xy}, xe^{xy}, 1)$$

und

$$(Df)(t) = \begin{pmatrix} \partial_t f_1 \\ \partial_t f_2 \\ \partial_t f_3 \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Somit nach Kettenregel

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(\pi) &= (Dg)(f(\pi)) \circ (Df)(\pi) \\ &= \left((\pi^2 + 1)e^{\pi(\pi^2+1)}, \pi e^{\pi(\pi^2+1)}, 1 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= (3\pi^2 + 1)e^{\pi(\pi^2+1)} - 1. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Ein wichtiger Spezialfall ist die Ableitung einer Funktion längs einer Kurve:

Definition 1.12 Unter einer (stetigen) *Kurve* im \mathbb{R}^n versteht man eine (stetige) Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ aus mehr als einem Punkt besteht). Eine Kurve $c = (c_1, \dots, c_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (*stetig*) *differenzierbar* in $t \in I$, wenn jede Komponentenfunktion $c_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar in $t \in I$ ist. In diesem Fall heißt

$$(Dc)(t) = c'(t) := (c'_1(t), \dots, c'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

der *Tangentialvektor* an c im Punkt $c(t)$.

Satz 1.13 (Ableitung entlang einer Kurve) Es sei $c = (c_1, \dots, c_n) : I \rightarrow U$ eine in $t \in I$ differenzierbare Kurve und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine in $x = c(t)$ differenzierbare Abbildung. Dann ist $f \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in t mit

$$D(f \circ c)(t) = (Df)(c(t)) \circ c'(t) = (D_{c'(t)}f)(c(t)) \quad \square$$

Folglich ist die Ableitung einer stetig partiell differenzierbaren Funktion längs einer Kurve gegeben als die Richtungsableitung der Funktion in Richtung des Tangentialvektors der Kurve.

Beispiel 1.14 Die Ableitung der Funktion $f(x; y; z) := x^2 + y^2 - z^2$ entlang der Schraubenlinie $c(t) = (ht; \sin t; \cos t)$ ist

$$(f \circ c)'(t) = \left\langle \begin{pmatrix} 2ht \\ 2 \sin t \\ -2 \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \right\rangle = 2h^2t + 4 \sin t \cos t. \quad \triangleleft$$

Über die Ableitung entlang einer Kurve können wir den Mittelwertsatz verallgemeinern:

Satz 1.15 (Mittelwertsatz) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung und $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ eine differenzierbare Kurve mit Randpunkten $c(\alpha) = a$ und $c(\beta) = b$. Dann gilt

$$f(b) - f(a) = \int_{\alpha}^{\beta} dt (Df)(c(t)) \circ c'(t).$$

Dabei ist das Integral komponentenweise (vektoriell) zu verstehen. Sind f und c sogar stetig differenzierbar, so gibt es ein $\tau \in [\alpha, \beta]$ mit

$$f(b) - f(a) = (\beta - \alpha)(Df)(c(\tau)) \circ c'(\tau) .$$

Für die Kurve $c(t) := a + (b - a)t \in U$ gilt unter gleichen Voraussetzungen

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \int_0^1 dt (Df)(a + (b - a)t) \circ (b - a) \\ &= (Df)(a + (b - a)\tau) \circ (b - a) . \end{aligned}$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $F_i(\beta) - F_i(\alpha) = \int_\alpha^\beta dt F_i'(t)$. Setzt man $F = f \circ c$, also $F_i = f_i \circ c$, so folgt die Behauptung aus der Kettenregel $(DF)(t) = (Df)(c(t)) \circ c'(t)$. Die Formel für stetig differenzierbare Funktionen und Kurven folgt aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. \square

Für den folgenden Schrankensatz benötigen wir die Abschätzung

$$\left\| \int_a^b dt f(t) \right\| \leq \int_a^b dt \|f(t)\|$$

für eine vektorwertige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dabei ist $\| \cdot \|$ die aus dem Skalarprodukt erhaltene Norm. Sei $v = \int_a^b dt f(t) \in \mathbb{R}^m$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|v\|^2 = \langle v, v \rangle &= \left\langle \int_a^b dt f(t), v \right\rangle = \int_a^b dt \langle f(t), v \rangle \\ (\text{Cauchy-Schwarz}) &\leq \int_a^b dt \|f(t)\| \|v\| = \|v\| \int_a^b dt \|f(t)\| . \end{aligned}$$

Satz 1.16 (Schränkensatz) *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Mit $\| \cdot \|$ werden die aus dem Standardskalarprodukt erhaltenen 2-Normen auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m bezeichnet und mit $\| \cdot \|_{op}$ die Operator-Norm einer linearen Abbildung. Sei $c(t) := a + (b - a)t \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$ mit $M = \sup_{t \in [0, 1]} \|(Df)(a + (b - a)t)\|_{op}$.*

Beweis. Nach Mittelwertsatz 1.15, obiger Abschätzung und Definition der Operatornorm (Satz 51.2 im 2. Semester, in offensichtlicher Weise verallgemeinert von $\mathcal{B}(V, \mathbb{K})$ auf $\mathcal{B}(V, \mathbb{R}^n)$) gilt

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= \left\| \int_0^1 dt (Df)(a + (b - a)t) \circ (b - a) \right\| \\ &\leq \int_0^1 dt \|(Df)(a + (b - a)t) \circ (b - a)\| \\ &\leq \int_0^1 dt \|(Df)(a + (b - a)t)\|_{op} \|b - a\| \leq M \|b - a\| \int_0^1 dt 1 . \quad \square \end{aligned}$$

Aus dem Schrankensatz bzw. Mittelwertsatz folgt in Analogie zu Satz 24.6 aus dem 1. Semester folgender Identitätssatz für differenzierbare Abbildungen, den wir zur Wiederholung der Begriffe der offenen und zusammenhängenden Mengen angeben:

Satz 1.17 *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, und für eine stetig differenzierbare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ gelte $Df = 0$. Dann ist f konstant auf G .*

Beweis. Wir müssen eine stückweise stetig differenzierbare Kurve zwischen $x, y \in G$ konstruieren. Dazu sei

$$U_x := \{y \in G : \exists \text{ stückweise stetig differenzierbare Kurve von } x \text{ nach } y\}.$$

Die Menge U_x ist offen: Sei $y \in U_x \subseteq G$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(y) \subseteq G$. Andererseits läßt sich die Kurve von x nach y fortsetzen zu einer Kurve von x in jeden Punkt von $K_\epsilon(y)$.

Angenommen, $V_x = G \setminus U_x \neq \emptyset$. Sei $v \in V_x \subseteq G$ und $\epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(v) \subseteq G$. Dann ist auch $K_\epsilon(v) \subseteq V_x$, denn gäbe es einen Punkt $w \in K_\epsilon(v)$, der durch eine stückweise differenzierbare Kurve mit x verbunden wäre, so wäre auch v mit x verbunden, Widerspruch. Also sind U_x, V_x offen, nichtleer und disjunkt mit $G = U_x \cup V_x$. Damit wäre G nicht zusammenhängend, Widerspruch.

Somit gibt es eine stückweise stetig differenzierbare Kurve zwischen zwei beliebigen Punkten aus G . Ist $Df = 0$ auf G , so ist nach Mittel- bzw. Schrankensatz $f(x) = f(y) = \text{const.}$ □

2 Vektorfelder, Gradient und Divergenz

Definition 2.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$(\text{grad } f)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n$$

der *Gradient* von f im Punkt $x \in U$.

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt nach Satz 1.8 für jeden Punkt $x \in U$ und jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$

$$(Df)(x) \circ v = (D_v f)(x) = \langle v, (\text{grad } f)(x) \rangle.$$

Wählen wir v als Einheitsvektor, $\|v\| = 1$, dann ist nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz $|D_v f| \leq \|\text{grad } f\|$, mit Gleichheit genau dann, wenn v und $\text{grad } f$ linear abhängig sind. Damit ist der Gradient in Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion gerichtet, und die Norm $\|(\text{grad } f)(x)\|$ ist ein Maß für die Stärke des Anstiegs.

Beispiel 2.2 Für $f(x) = r$ gilt $\text{grad } r = \frac{x}{r}$, der steilste Anstieg ist also radial nach außen gerichtet und vom Betrag her überall (außer im Nullpunkt) konstant.

Für $f(x) = \frac{1}{r}$ ist $\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3}$. Der steilste Anstieg ist radial nach innen gerichtet und wächst zum Nullpunkt quadratisch. \triangleleft

Der Gradient ist linear und erfüllt die Leibniz-Regel: Sind $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned}(\text{grad}(f + g))(x) &= (\text{grad } f)(x) + (\text{grad } g)(x) , \\(\text{grad}(f \cdot g))(x) &= (\text{grad } f)(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot (\text{grad } g)(x) .\end{aligned}$$

Der Gradient $(\text{grad } f)(x)$ ordnet jedem Punkt $x \in U$ einen Vektor zu. So etwas nennt man ein Vektorfeld:

Definition 2.3 Unter einem *Vektorfeld* auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ versteht man eine Abbildung $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld heißt stetig/partiell differenzierbar/..., wenn alle Komponenten von v stetig/partiell differenzierbar/... sind.

Die Vorstellung ist, daß an jedem Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ein Vektor $v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$ angeheftet ist. Eine nützliche Konstruktion besteht darin, diese Vektoren als Tangentialvektoren an Kurven $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $x = c(t_0)$ zu betrachten. Ist $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$, dann ist also

$$c'_i(t) = v_i(c(t)) , \quad c_i(t_0) = x_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n \text{ und } t, t_0 \in I$$

Die Kurve selbst ist dann durch Lösen (Integration) dieser $2n$ Gleichungen zu erhalten und heißt *Integralkurve* des Vektorfeldes durch x . In der Physik werden die Bilder der Integralkurven auch *Feldlinien* bzw. *Stromlinien* des Vektorfeldes genannt. Unter recht schwachen Voraussetzungen an das Vektorfeld (Lipschitzstetig) kann man in einer genügend kleinen Umgebung von x die Integralkurven immer finden, aber nicht unbedingt auf ganz U , weil das an Singularitäten des Vektorfeldes scheitern kann. Eine Art von Singularität ist die Divergenz:

Definition 2.4 Sei $v = (v_1, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt die Funktion

$$\text{div}(v) := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

die *Divergenz* des Vektorfeldes v .

Die Divergenz ist linear, $\text{div}(v + w) = \text{div}(v) + \text{div}(w)$, und erfüllt folgendes Analogon zur Leibniz-Regel: Sei v ein differenzierbares Vektorfeld und f eine differenzierbare Funktion auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\text{div}(f \cdot v) = \langle \text{grad}(f), v \rangle + f \cdot \text{div}(v) .$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Maß für die Gesamtbeschleunigung der Integralkurven. Das kann einerseits dadurch erreicht werden, daß die Feldlinien von der Parallelität abweichen (was wahrscheinlich den Namen motiviert hat), oder durch Geschwindigkeitszunahme entlang der Feldlinien.

Beispiel 2.5 Für $v(x) = x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\operatorname{div} x = n$. Hier sind die Feldlinien radial vom Nullpunkt nach außen gerichtet und gerade durch den Radius parametrisiert.

Für $v(x) = \frac{x}{\|x\|}$ gilt mit $\|x\| = r$

$$\operatorname{div} \frac{x}{r} = \left\langle \operatorname{grad} \frac{1}{r}, x \right\rangle + \frac{1}{r} \cdot \operatorname{div} x = -\frac{1}{r^3} \langle x, x \rangle + \frac{n}{r} = \frac{n-1}{r} \quad \text{für } x \neq 0 .$$

Die Vektoren $v(x) = \frac{x}{\|x\|}$ haben in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Länge 1, aber die Feldlinien sind wieder radial nach außen gerichtet und damit nicht parallel. \triangleleft

Gradient und Divergenz sind wichtige Hilfsmittel der Theoretischen Physik. In der Mechanik läßt sich ein konservatives Kraftfeld als (negativer) Gradient eines Potentials schreiben, $F = -\operatorname{grad} V$. In der Elektrodynamik wird die Divergenz von Vektorfeldern zur Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen gebraucht. Dort gibt es noch eine weitere Konstruktion mit partiellen Ableitungen, die *Rotation*. Die Rotation und das *Vektorprodukt* beruhen auf einer nur im \mathbb{R}^3 möglichen Identifikation von sogenannten *Differentialformen*, auf die wir hier nicht eingehen.

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist $\operatorname{grad} f$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U , dessen Divergenz die Funktion $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ ist. Die Abbildung $\Delta : f \mapsto \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ heißt *Laplace-Operator*, und es gilt

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} .$$

Der Laplace-Operator tritt in wichtigen partiellen Differentialgleichungen auf, z.B. der Poisson-Gleichung

$$\Delta f = -\rho , \quad \rho : U \rightarrow \mathbb{R} .$$

3 Die mehrdimensionale Taylorsche Formel

Um die im folgenden auftretenden vielen Indizes übersichtlicher zu gestalten, hat sich eine abkürzende Schreibweise eingebürgert. Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex, d.h. ein n -Tupel von Indizes $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Dann setzt man

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n , \quad \alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n! .$$

Für eine $|\alpha|$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ schreibt sich eine mehrfache partielle Ableitung wie folgt:

$$(\partial^\alpha f)(x) := (\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f)(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) .$$

Dabei ist $\partial_i^{\alpha_i} f = \underbrace{\partial_i \dots \partial_i}_{\alpha_i \text{ mal}} f$. Ebenso setzt man $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Lemma 3.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Zu $x \in U$ sei ein Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, daß $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann ist die Funktion einer Veränderlichen

$$g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, \quad g(t) := f(x + t\xi)$$

k -mal stetig differenzierbar auf $[0, 1]$, und es gilt

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \xi^\alpha (\partial^\alpha f)(x + t\xi).$$

Dabei läuft die Summe über alle Multiindizes α mit $|\alpha| = k$.

Beweis. Es gilt $g = f \circ c$ mit $c(t) = x + t\xi$. Nach Satz 1.13 ist

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i (\partial_i f)(x + t\xi).$$

Durch wiederholte Ableitung längs c jeder Funktion $(\partial_i f)(x + t\xi) = (g_i \circ c)(t)$, u.s.w., berechnen wir die höheren Ableitungen, wobei wir zunächst nicht den Satz von Schwarz verwenden, d.h. wir betrachten $\partial_i \partial_j$ und $\partial_j \partial_i$ als verschieden. Es ergibt sich

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n \xi_{i_k} \dots \xi_{i_2} \xi_{i_1} (\partial_{i_k} \dots \partial_{i_2} \partial_{i_1} f)(x + t\xi).$$

Nach dem Satz von Schwarz können wir die partiellen Ableitungen ordnen und zu ∂^α zusammenfassen mit $|\alpha| = k$. Ebenso fassen sich die Produkte der ξ_i zu ξ^α zusammen. Es gibt $\frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$ verschiedene $\partial_{i_k} \dots \partial_{i_2} \partial_{i_1}$, die nach Umordnung das gleiche ∂^α ergeben. \square

Satz 3.2 (Taylor) Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(k+1)$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Zu $x \in U$ sei ein Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, daß $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gibt es ein $\theta \in [0, 1]$, so daß

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x) + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x + \theta\xi).$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion einer Veränderlichen $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $g[t] := f(x + t\xi)$ gegeben ist. Nach Lemma 3.1 ist g eine $(k+1)$ mal stetig differenzierbare Funktion, auf die wir die eindimensionale Taylorsche Formel (Satz 26.1 aus dem 1. Semester) anwenden können: Es gibt also ein $\theta \in [0, 1]$ mit

$$g(1) = \sum_{j=0}^k \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}.$$

Einsetzen von $g(t) = f(x + t\xi)$ und Verwenden von Lemma 3.1 liefert die Behauptung. \square

Der Satz von Taylor ist wichtig bei Abschätzungen der folgenden Art:

Satz 3.3 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt für jedes $x \in U$

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x) + o(\|\xi\|^k) \quad \text{für } \xi \rightarrow 0.$$

Beweis. Da U offen, gibt es ein $\delta > 0$, so daß $K_\delta(x) \subseteq U$. Dann gibt es zu jedem $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$ ein $\theta \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} f(x + \xi) &= \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x) + \sum_{|\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x + \theta\xi) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x) + \sum_{|\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} ((\partial^\alpha f)(x + \theta\xi) - (\partial^\alpha f)(x)). \end{aligned}$$

Es gilt $|\xi^\alpha| = |\xi_1|^{\alpha_1} \dots |\xi_n|^{\alpha_n} \leq \|\xi\|^{\alpha_1} \dots \|\xi\|^{\alpha_n} = \|\xi\|^{|\alpha|}$. Da $\partial^\alpha f$ stetig ist, gilt

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\|\xi\|^k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} ((\partial^\alpha f)(x + \theta\xi) - (\partial^\alpha f)(x)) = 0.$$

Das ist genau die Behauptung. \square

Für $k = 1$ ist die Menge aller Multiindizes α mit $|\alpha| = 1$ gerade die Menge der Standardbasisvektoren (e_i) . Somit erhalten wir die Formel aus Satz 1.8

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \xi, (\text{grad} f)(x) \rangle + o(\|\xi\|).$$

Für $k = 2$ ergibt sich

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \xi, (\text{grad} f)(x) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j (\partial_i \partial_j f)(x) + o(\|\xi\|^2).$$

Dabei gibt es die Möglichkeiten $\alpha = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$ mit $\alpha! = 2$ und $\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mit $\alpha! = 1$, wobei die Einsen an der i -ten und j -ten Stelle stehen mit $i < j$. Da eine in i, j symmetrische Funktion summiert wird, kann die Summe mit $i < j$ durch die halbe Summe mit $i \neq j$ ersetzt werden. Zusammen mit der Summe über $i = j$ von $\alpha = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$ ergibt sich die Beziehung.

Definition 3.4 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion. Dann heißt die symmetrische $n \times n$ -Matrix

$$(\text{Hess } f)(x) := ((\partial_i \partial_j f)(x))_{1 \leq i, j \leq n}$$

die *Hessesche Matrix* von f im Punkt x .

Dabei heißt eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ symmetrisch, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ ist. Somit gilt

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle a, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, A\xi \rangle + o(\|\xi\|^2)$$

mit $a = (\text{grad } f)(x)$, $A = (\text{Hess } f)(x)$.

Die Hessesche Matrix ist wichtig bei der Untersuchung von lokalen Extrema einer Funktion. Zunächst gilt in Verallgemeinerung von Satz 24.2

Satz 3.5 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Besitzt f in $x \in U$ ein lokales Extremum, so gilt $(\text{grad } f)(x) = 0$.

Beweis. Es genügt, die n Funktionen einer Veränderlichen $g_i(t) := f(x + te_i)$ zu betrachten, wobei e_i der i -te Standardbasisvektor ist und $t \in [-\epsilon, \epsilon]$. Hat f ein lokales Extremum in x , so hat g_i ein lokales Extremum in 0. Dann gilt $0 = g_i'(0) = (\partial_i f)(x)$. Da das für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt, folgt die Behauptung. \square

Wir beweisen eine hinreichende Bedingung für lokale Extrema unter Verwendung der Hesseschen Matrix. Dazu benötigen wir:

Definition 3.6 Eine symmetrische Matrix $A \in M(n, \mathbb{R})$ heißt

- *positiv definit*, falls $\langle \xi, A\xi \rangle > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- *positiv semidefinit*, falls $\langle \xi, A\xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- *negativ (semi)definit*, falls $-A$ positiv (semi)definit ist,
- *indefinit*, falls es $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\langle \xi, A\xi \rangle > 0$ und $\langle \eta, A\eta \rangle < 0$.

Ist eine symmetrische Matrix $A \in M(n, \mathbb{R})$ positiv definit, dann definiert $\langle x, y \rangle_A := \langle x, Ax \rangle$ ein neues Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ auf \mathbb{R}^n . Nach Satz 50.14 aus dem 2. Semester folgt positive Definitheit aus der Positivität aller Eigenwerte. Ein besseres Kriterium ist das Determinantenkriterium aus Satz 50.15 des 2. Semesters.

Satz 3.7 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. In einem Punkt $x \in U$ gelte $(\text{grad } f)(x) = 0$.

- i) Ist $(\text{Hess } f)(x)$ positiv definit, so besitzt f in x ein striktes lokales Minimum.

- ii) Ist $(\text{Hess } f)(x)$ negativ definit, so besitzt f in x ein striktes lokales Maximum.
- iii) Ist $(\text{Hess } f)(x)$ indefinit, so besitzt f in x kein lokales Extremum.

Beweis. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei $A := (\text{Hess } f)(x)$. In einer Umgebung V von x gilt

$$f(x + \xi) = f(x) + \frac{1}{2}\langle \xi, A\xi \rangle + \phi(\xi) \quad \text{mit } \phi(\xi) = o(\|\xi\|^2).$$

Es gibt also zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|\phi(\xi)| < \epsilon\|\xi\|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$.

i) Die $(n - 1)$ -Sphäre $S^{n-1} := \{\eta \in \mathbb{R}^n : \|\eta\| = 1\}$ ist kompakt. Nach Extremwertsatz nimmt die stetige Funktion $g : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(\eta) := \langle \eta, A\eta \rangle$ auf S^{n-1} ihr Supremum und ihr Infimum an. Es gibt also ein $\mu > 0$ (wegen der positiven Definitheit) mit

$$\mu := \min_{\eta \in S^{n-1}} \{\langle \eta, A\eta \rangle\}.$$

Da für beliebiges $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\frac{1}{\|\xi\|}\xi \in S^{n-1}$, folgt $\langle \xi, A\xi \rangle \geq \mu\|\xi\|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ (für $\xi = 0$ trivialerweise). Wählen wir δ so klein, daß $|\phi(\xi)| \leq \frac{\mu}{4}\|\xi\|^2$, so gilt $\frac{1}{2}\langle \xi, A\xi \rangle + \phi(\xi) \geq \frac{\mu}{4}\|\xi\|^2$. Folglich haben wir

$$f(x + \xi) \geq f(x) + \frac{\mu}{4}\|\xi\|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|\xi\| < \delta.$$

Also hat f in x ein striktes lokales Minimum. Analog beweist man ii).

iii) Wir zeigen, daß es $y_1, y_2 \in U$ gibt mit $f(y_1) < f(x) < f(y_2)$. Nach Voraussetzung gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle \xi, A\xi \rangle := \mu > 0$. Dann gilt für hinreichend kleine $t > 0$

$$f(x + t\xi) = f(x) + \frac{\mu}{2}t^2 + \phi(t\xi).$$

Wie zuvor finden wir ein $\delta > 0$, so daß $|\phi(t\xi)| \leq \frac{\mu}{4}t^2$ gilt für alle $0 < t < \delta$. Dann ist $f(x + t\xi) > f(x)$ für alle $0 < t < \delta$. Ebenso folgt aus der Existenz eines $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle \eta, A\eta \rangle := -\mu' < 0$, daß $f(x + t'\eta) < f(x)$ für alle $0 < t' < \delta'$. \square

Ist die Hessesche Matrix im Punkt x positiv oder negativ semidefinit, so muß man höhere Ordnungen in der Taylorsche Formel betrachten, um Aussagen über Extrema von f mit $(\text{grad } f)(x) = 0$ zu gewinnen.

Beispiel 3.8 i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = 1 + x^2 + xy + y^2$.

Es gilt $(\text{grad } f)(x, y) = (2x+y, 2y+x) \stackrel{!}{=} (0, 0)$, also $x = y$ (Differenz) und dann $(0, 0)$ als einziger Kandidat für ein lokales Extremum. Wir testen $(\text{Hess } f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Nach Determinantenkriterium (Satz 50.15, 2. Semester) ist $(\text{Hess } f)(0, 0)$ positiv definit, und f hat im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = 1 + x^2 + 4xy + y^2$.

Es gilt $(\text{grad } f)(x, y) = (2x + 4y, 2y + 4x) \stackrel{!}{=} (0, 0)$, also $x = y$ (Differenz) und dann $(0, 0)$ als einziger Kandidat für ein lokales Extremum. Es folgt $A := (\text{Hess } f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\det A < 0$ aber $a_{11} > 0$. Somit ist $(\text{Hess } f)(0, 0)$ indefinit: $\langle (1, 1), A(1, 1) \rangle = 12 > 0$ und $\langle (1, -1), A(1, -1) \rangle = -4 < 0$. Insgesamt hat f im Punkt $(0, 0)$ kein Extremum. \triangleleft

4 Der Satz über implizite Funktionen

Es geht nun um Funktionen, die implizit definiert sind, z.B. durch Gleichungen der Form $0 = F(x, f(x)) = (f(x))^2 + x^2 - 1$. Wir werden untersuchen, unter welchen Bedingungen sich derartige Gleichungen zumindest im Prinzip nach $f(x)$ auflösen lassen und welche Differenzierbarkeitseigenschaften die Lösungen haben. Im obigen Beispiel ist offenbar $f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Differentiation von $F(x, f(x))$ nach der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} 0 &= F'(x, f(x)) = (\partial_1 F)(x, f(x)) + (\partial_2 F)(x, f(x))f'(x) \\ \Rightarrow f'(x) &= -\frac{(\partial_1 F)(x, f(x))}{(\partial_2 F)(x, f(x))} = -\frac{x}{f(x)}, \end{aligned}$$

falls $(\partial_2 F)(x, f(x))$ invertierbar ist. Die Verallgemeinerung dieser Invertierbarkeitsbedingung ist zentral für die lokale Auflösbarkeit.

Wir werden die Lösung des impliziten Problems iterativ konstruieren. Dazu benötigen wir:

Satz 4.1 (Banachscher Fixpunktsatz) Sei $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums X (d.h. eines vollständigen normierten Vektorraums $(X, \|\cdot\|)$). Die Abbildung $\Phi : A \rightarrow A$ sei eine Kontraktion, d.h. es gibt eine Konstante $\theta \in]0, 1[$, so daß

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\| \leq \theta \|f - g\| \quad \text{für alle } f, g \in A.$$

Dann gilt:

- i) Φ besitzt genau einen Fixpunkt f_* , d.h. es gibt ein eindeutig bestimmtes $f_* \in A$ mit $\Phi(f_*) = f_*$.
- ii) Für einen beliebigen Anfangspunkt $g \in A$ konvergiert die durch

$$f_0 := g, \quad f_{k+1} = \Phi(f_k) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

definierte Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen f_* , d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f_*$.

Beweis. 1) Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit des Fixpunktes. Gäbe es zwei Fixpunkte f_*, g_* , dann ist

$$\|f_* - g_*\| = \|\Phi(f_*) - \Phi(g_*)\| \leq \theta \|f_* - g_*\|,$$

und damit $\|f_* - g_*\| = 0$ wegen $0 < \theta < 1$. Das bedeutet $f_* = g_*$.

2) Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie oben definiert. Dann ist

$$\|f_{k+1} - f_k\| = \|\Phi(f_k) - \Phi(f_{k-1})\| \leq \theta \|f_k - f_{k-1}\| \leq \dots \leq \theta^k \|f_1 - f_0\|.$$

Für $m > l$ betrachten wir

$$\begin{aligned} \|f_m - f_l\| &= \left\| \sum_{k=l}^{m-1} (f_{k+1} - f_k) \right\| \leq \sum_{k=l}^{m-1} \|f_{k+1} - f_k\| \leq \sum_{k=l}^{m-1} \theta^k \|f_1 - f_0\| \\ &= \frac{(1 - \theta^m) - (1 - \theta^l)}{1 - \theta} \|f_1 - f_0\| \leq \theta^l \frac{\|f_1 - f_0\|}{1 - \theta}. \end{aligned}$$

Damit ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die wegen der Vollständigkeit des Banach-Raums gegen einen Punkt f_* konvergiert. Da A abgeschlossen, liegt der Grenzwert f_* sogar in A . Aus $f_* = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ und $f_{k+1} = \Phi(f_k)$ folgt $\Phi(f_*) = f_*$. \square

Im Beweis des Satzes über implizite Funktionen werden wir den Banachschen Fixpunktsatz auf den Banach-Raum der stetigen und beschränkten Funktionen anwenden. Wir zitieren Satz 33.4 aus dem 2. Semester:

Satz 33.4 [2. Semester]. *Es sei X ein metrischer Raum und*

$$\mathcal{C}_b(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}, \quad \|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

der Vektorraum der stetigen und beschränkten komplexwertigen Funktionen auf X . Dann ist $(\mathcal{C}_b(X), \|\cdot\|)$ vollständig (d.h. Banach-Raum) bezüglich der Supremums-Norm $\|\cdot\|$. Insbesondere ist $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|)$ Banach-Raum, falls X kompakt ist.

Satz 4.2 (über implizite Funktionen) *Seien $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen und $F = (F_1, \dots, F_m) : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $(a, b) \in U_1 \times U_2$ ein Punkt mit $F(a, b) = 0$, und im Punkt (a, b) sei die Jacobi-Matrix bezüglich der 2. Komponente*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(a, b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} (a, b) \in GL(m, \mathbb{R})$$

invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung $V_1 \subseteq U_1$ von a und eine Umgebung $V_2 \subseteq U_2$ von b sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : V_1 \rightarrow V_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, so daß

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in V_1.$$

Mit anderen Worten: Ist eine implizit gegebene Gleichung $F(x, g(x)) = 0$ in einem Punkt a lösbar mit $g(a) = b$ und $F(a, b) = 0$, dann ist sie (unter den gegebenen Voraussetzungen) sogar in einer Umgebung V_1 von a lösbar, und diese Lösung ist sogar differenzierbar.

Beweis. Wir setzen $B := \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(a, b) \in GL(m, \mathbb{R})$. Damit werde eine Abbildung $G : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$G(x, y) := y - B^{-1} \cdot F(x, y), \quad x \in U_1, y \in U_2 \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Die Jacobi-Matrix von G im Punkt $(x, y) \in U_1 \times U_2$ ist

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)(x, y) = E_m - B^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x, y) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)(a, b) = 0 \in M(m \times m, \mathbb{R}).$$

Somit ist $\left\| \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)(a, b) \right\|_{op} = 0$. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial G}{\partial y}$ gibt es Umgebungen $W_1 \subseteq U_1$ von a und $W_2 \subseteq U_2$ von b , so daß

$$\left\| \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)(x, y) \right\|_{op} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } (x, y) \in W_1 \times W_2. \quad (1)$$

Entscheidend ist die Beobachtung

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = G(x, y) \quad (2)$$

und insbesondere $b = G(a, b)$. Damit führen wir die Lösung von $F(x, y) = 0$ nach y auf ein Fixpunktproblem zurück.

Wir konstruieren zunächst g als stetige Funktion. Die Gebiete können dann etwas größer gewählt werden. Nach dem Satz von Taylor gilt

$$G(x, y) - G(x, \eta) = \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)(x, \eta) \cdot (y - \eta) + \phi(y - \eta), \quad \phi(y - \eta) = o(\|y - \eta\|),$$

für alle $(x, y), (x, \eta) \in W_1 \times W_2$. Es gibt also ein $r > 0$, so daß

$$\|\phi(y - \eta)\| \leq \frac{1}{4} \|y - \eta\| \quad \text{für alle } y \in W_2 \text{ mit } \|y - \eta\| < \frac{5}{2}r. \quad (3)$$

Da $G(a, b) = b$, gibt es wegen der Stetigkeit von F eine offene Umgebung $V_1 \subseteq W_1$ von a , so daß

$$\sup_{x \in V_1} \|G(x, b) - b\| \leq \frac{r}{4}. \quad (4)$$

Wir betrachten den Banachraum $\mathcal{C}_b(V_1, \mathbb{R}^m)$. Zu gegebenem $\gamma \in \mathcal{C}_b(V_1, \mathbb{R}^m)$, mit $\|\gamma\| = \sup_{x \in V_1} \|\gamma(x)\|$, werde eine Abbildung $\psi : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$\psi(x) := G(x, \gamma(x)) = \gamma(x) - B^{-1} \cdot F(x, \gamma(x)).$$

Wegen der Stetigkeit von F ist ψ ebenfalls stetig. Wir zeigen nun: die Zuordnung $\gamma \mapsto \psi = \Phi(\gamma)$ definiert eine Abbildung Φ , welche die abgeschlossene Teilmenge

$$A := \{\gamma \in \mathcal{C}_b(V_1, \mathbb{R}^m) : \|\gamma - b\| \leq r\} \subseteq \mathcal{C}_b(V_1, \mathbb{R}^m)$$

des Banachraums $\mathcal{C}_b(V_1, \mathbb{R}^m)$ auf sich selbst abbildet. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\psi - b\| &= \sup_{x \in V_1} |\psi(x) - b| = \sup_{x \in V_1} |G(x, \gamma(x)) - G(x, b) + G(x, b) - b| \\ &\leq \sup_{x \in V_1} \underbrace{|G(x, \gamma(x)) - G(x, b)|}_{\text{Taylor}} + \sup_{x \in V_1} \underbrace{\|G(x, b) - b\|}_{\leq \frac{r}{4} \text{ nach (4)}} \\ &\leq \frac{r}{4} + \sup_{x \in V_1} \left\| \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) (x, b) \cdot (\gamma(x) - b) + \phi(\gamma(x) - b) \right\|. \end{aligned}$$

Nach (3) gilt $\|\phi(\gamma(x) - b)\| \leq \frac{1}{4} \|\gamma(x) - b\| \leq \frac{r}{4}$ unter der Voraussetzung $\|\gamma - b\| \leq r$. Nach (1) und Definition der Operatornorm folgt

$$\left\| \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) (x, b) \cdot (\gamma(x) - b) \right\| \leq \left\| \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) (x, b) \right\|_{op} \|\gamma(x) - b\| \leq \frac{r}{2}$$

für alle $x \in V_1 \subseteq W_1$ und $|\gamma(x) - b| \leq r$. Damit ist $\|\psi - b\| \leq r$ falls $|\gamma - b\| \leq r$, und $\Psi : A \rightarrow A$ bewiesen. Schließlich gilt wieder nach Taylor

$$\begin{aligned} \|\Phi(\gamma_1) - \Phi(\gamma_2)\| &= \sup_{x \in V_1} \|G(x, \gamma_1(x)) - G(x, \gamma_2(x))\| \\ &= \sup_{x \in V_1} \left\| \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) (x, \gamma_2(x)) \cdot (\gamma_1(x) - \gamma_2(x)) + \phi(\gamma_1(x) - \gamma_2(x)) \right\| \end{aligned}$$

Wegen $\|\gamma_1(x) - \gamma_2(x)\| \leq \|\gamma_1(x) - b\| + \|b - \gamma_2(x)\| \leq 2r < \frac{5}{2}r$ gilt $\|\phi(\gamma_1(x) - \gamma_2(x))\| < \frac{1}{4} \|\gamma_1 - \gamma_2\|$ nach (3), und nach Definition der Operatornorm und (1) ist

$$\left\| \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) (x, \gamma_2(x)) \cdot (\gamma_1(x) - \gamma_2(x)) \right\| \leq \frac{1}{2} \|\gamma_1 - \gamma_2\|$$

Damit ist $\|\Phi(\gamma_1) - \Phi(\gamma_2)\| \leq \frac{3}{4} \|\gamma_1 - \gamma_2\|$ für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in A$ bewiesen, somit Φ eine Kontraktion in A . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es genau einen Fixpunkt $\gamma_* \in \mathcal{C}_b(V_1, \mathbb{R}^m)$, und die eindeutige stetige Abbildung $g = \gamma_* : V_1 \rightarrow V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ löst die Gleichung $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in V_1$. (Dabei ist $V_2 = \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - b\| \leq r\}$ die Kugel um b mit Radius r).

Nun zur partiellen Differenzierbarkeit der Lösung. Die Jacobi-Matrix $(\frac{\partial F}{\partial y})(x, y) \in M(m, \mathbb{R})$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Da die Determinante als Polynom der Matrixelemente eine stetige Funktion der Matrixelemente ist und $\det B = \det((\frac{\partial F}{\partial y})(a, b)) \neq 0$ ist, gibt es eine Umgebung $V'_1 \subseteq V_1$ von a , so daß $(\frac{\partial F}{\partial y})(x, g(x))$ invertierbar ist für alle $x \in V'_1$.

Über die Lösung $g = (g_1, \dots, g_m) : V'_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ definieren wir eine Abbildung $\tilde{F} : V'_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $\tilde{F}(x) := F(x, g(x))$. Da $\tilde{F}(x) = 0$ für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in V'_1$, verschwinden auch alle partiellen Ableitungen von \tilde{F} :

$$0 = \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_j} \right) (x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) (x, y) \Big|_{y=g(x)} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \right) (x, y) \Big|_{y=g(x)} \cdot \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) (x).$$

Sind $K_{il}(x, y)$ die Matrixelemente der inversen Matrix $J^{-1} = (K_{il}(x, y))$ der Jacobi-Matrix

$$J = (J_{li}(x, y)) \in M(m, \mathbb{R}), \quad J_{li}(x, y) = \left(\frac{\partial F_l}{\partial y_i} \right) (x, y),$$

von F im Punkt (x, y) , dann erhalten wir

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) (x) = - \sum_{l=1}^m K_{il}(x, y) \left(\frac{\partial F_l}{\partial x_j} \right) (x, y) \Big|_{y=g(x)}.$$

Insbesondere ist $g : V'_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar. Aus der stetigen Differenzierbarkeit von F und der Stetigkeit der Bildung der inversen Matrix folgt, daß die $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ stetig sind. Nach Satz 1.8 ist g dann total differenzierbar. \square

Wichtig an diesem Beweis ist, daß er nicht nur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von $F(x, y(x)) = 0$ beweist, sondern auch ein konstruktives Verfahren angibt, mit der die Lösung beliebig genau approximiert werden kann. Dieses Verfahren kann insbesondere auf dem Computer implementiert werden.

Beispiel 4.3 Es sei $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ mit einer Lösung $F(0, 1) = 0$. Natürlich sind diese Gleichung auch exakt zu lösen, soll aber zur Veranschaulichung über das Fixpunktverfahren approximiert werden. Es ist $B = (\partial_y F)(0, 1) = 2$, also $G(x, y) = y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1)$. Ohne nähere Diskussion der Gebiete versuchen wir die Fixpunkt-Konstruktion

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{2}(x^2 + y_n^2 - 1), \quad y_0 = 1.$$

Die Konvergenz solcher rekursiv definierter Folgen hatten wir bereits im 1. Semester untersucht. Man zeigt, daß für $|x| \leq 1$ die Folge (y_n) monoton fallend und nach unten durch $1 - x^2$ beschränkt ist. Für $x = \frac{1}{2}$ sind die ersten Folgeglieder

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{7}{8}, \quad y_2 = \frac{111}{128}, \quad y_3 = \frac{28383}{32768} = 0.866180\dots$$

Zum Vergleich: $\sqrt{\frac{3}{4}} = 0.866025\dots$ \triangleleft

Weitere Informationen über die Lösung einer implizit definierten Funktion kann man aus dem Taylor-Polynom gewinnen.

Beispiel 4.4 Durch $F(x, y) = \cos x + \sin y - xy - 1$ werde implizit eine Funktion $y(x)$ mit $y(0) = 0$ erklärt. Dann ist $(\partial_y F)(0, 0) = 1$, das Fixpunkt-Verfahren also anwendbar. Für die Lösung gilt

$$y'(x) = -\frac{(\partial_x F)(x, y(x))}{(\partial_y F)(x, y(x))} = \frac{\sin x + y(x)}{\cos(y(x)) - x}$$

und dann weiter nach Quotienten- und Kettenregel

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\cos x + y'(x)}{\cos(y(x)) - x} - \frac{\sin x + y(x)}{(\cos(y(x)) - x)^2} (-y'(x) \sin(y(x)) - 1) \\ &= \frac{\cos x}{\cos(y(x)) - x} + 2 \frac{\sin x + y(x)}{(\cos(y(x)) - x)^2} + \sin(y(x)) \frac{(\sin x + y(x))^2}{(\cos(y(x)) - x)^3}. \end{aligned}$$

Damit ist das Taylor-Polynom 2. Ordnung von $y(x)$ im Punkt $x = 0$ gegeben durch

$$(T_2 y)(x; 0) = \frac{1}{2} x^2. \quad \triangleleft$$

Eine weitere wichtige Anwendung des Satzes über implizite Funktionen ist das lokale Invertieren einer Abbildung $f : V \rightarrow U$ mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Satz 4.5 Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung in einem Punkt $b \in V$. Das Differential von f sei invertierbar in $b \in V$, d.h. $(Df)(b) \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V_0 \subseteq V$ von b und eine offene Umgebung $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ von $a := f(b)$ so daß $f : V_0 \rightarrow U_0$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung $g = f^{-1} : U_0 \rightarrow V_0$ stetig differenzierbar ist. Außerdem gilt $(Dg)(a) = ((Df)(b))^{-1}$.

Beweis. Wir verwenden den Satz über implizite Funktionen mit $F : \mathbb{R}^n \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $F(x, y) := x - f(y)$. Ziel ist lokale Auflösung nach $y = g(x) = f^{-1}(x)$.

Es gilt $F(a, b) = 0$ und $(\frac{\partial F}{\partial y})(a, b) = -(Df)(b) \in GL(n, \mathbb{R})$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine offene Umgebung U' von a , eine Umgebung $V' \subseteq V$ von b und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \rightarrow V'$, so daß

$$F(x, g(x)) = x - f(g(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in U'.$$

Wegen der Stetigkeit von f gibt es eine offene Umgebung $V_0 \subseteq V'$ von b mit $f(V_0) := U_0 \subseteq U'$. Aus der Stetigkeit von g folgt, daß U_0 offen ist. Also ist $f : V_0 \rightarrow U_0$ bijektiv mit $f^{-1} = g : U_0 \rightarrow V_0$.

Aus $y = g(f(y))$ und der Kettenregel folgt

$$(D(g \circ f))(y) = E_n = (Dg)(f(y)) \cdot (Df)(y) \quad \text{für alle } y \in V_0$$

und insbesondere $(Dg)(a) = ((Df)(b))^{-1}$. □

Definition 4.6 Unter einem *Diffeomorphismus* zwischen offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ versteht man eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung $f : V \rightarrow U$, so daß f^{-1} ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Der Satz 4.5 über die lokale Invertierbarkeit besagt also, daß sich jede differenzierbare Abbildung $f : V \rightarrow U$, deren Differential in einem Punkt $b \in V$ invertierbar ist, zu einem lokalen Diffeomorphismus fortsetzen läßt. Wir werden das an vielen Stellen benötigen, z.B. in der Theorie der Untermannigfaltigkeiten, die man lokal “geradebiegen” kann, oder bei der höherdimensionalen Verallgemeinerung der Substitutionsregel in Integralen.

Beispiel 4.7 (Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten) Sei $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(r, \phi) := (r \cos \phi, r \sin \phi)$. Das totale Differential (Jacobi-Matrix) ist

$$(Df)(r, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi} \end{pmatrix} (r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

Damit gilt $\det((Df)(r, \phi)) = r > 0$, die Jacobi-Matrix ist also in jedem Punkt $(r, \phi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ invertierbar. Folglich ist f in jedem Punkt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ lokal invertierbar. Das ist in diesem Fall auch direkt zu erhalten: Ist $f(r, \phi) = (x, y)$, dann ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\cos \phi = \frac{x}{r}$, $\sin \phi = \frac{y}{r}$. Damit erhalten wir die Jacobi-Matrix für eine lokale Umkehrung $g : U \rightarrow V$ mit $f(g(x, y)) = (x, y)$ zu

$$(Dg)(x, y) = ((Df)(r, \phi))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\frac{\sin \phi}{r} & \frac{\cos \phi}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Eine Bijektion läßt sich z.B. finden zwischen

$$f : \mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

Für $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ setzen wir dann $g(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right)$. Es existiert aber keine globale Bijektion $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, da f periodisch im Winkel ϕ ist. \triangleleft

5 Untermannigfaltigkeiten

Definition 5.1 Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ heißt *n-dimensionale Untermannigfaltigkeit*, wenn zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ von a und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ existieren, so daß

- i) $U \cap M = f^{-1}(0)$,
- ii) für alle $x \in U$ mit $f(x) = 0 \in \mathbb{R}^k$ hat das Differential $(Df)(x) \in M(k \times (n+k), \mathbb{R})$ den maximalen Rang k .

Mit diesen Bezeichnungen heißt k die *Kodimension* von M .

Beispiel 5.2 (Sphäre S^n) Dazu sei $U := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^1$ gegeben durch $f(x) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$. Dann ist $\text{rang}((Df)(x)) = \text{rang}(2(x_1, \dots, x_{n+1})) = 1$ für alle $x \in U$. Somit ist

$$U \cap S^n = S^n = f^{-1}(0) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Die Kodimension ist 1. ◁

Definition 5.3 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ Untermannigfaltigkeit, $a \in M$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ die die Untermannigfaltigkeit M definierende differenzierbare Abbildung mit $a \in U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$. Dann heißt der Untervektorraum

$$T_a(M) := \ker((Df)(a)) = \{v \in \mathbb{R}^{n+k} : (Df)(a) \cdot v = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$$

der *Tangentialraum* von M im Punkt $a \in M$. Sei orthogonales Komplement bezüglich des kanonischen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im \mathbb{R}^{n+k} ,

$$N_a(M) := T_a(M)^\perp := \{w \in \mathbb{R}^{n+k} : \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } v \in T_a(M)\}$$

heißt der *Normalenvektorraum* von M im Punkt a . Elemente $v \in T_a(M)$ bzw. $w \in N_a(M)$ heißen *Tangentialvektoren* bzw. *Normalenvektoren* an M im Punkt a .

Als Kern einer linearen Abbildung ist $T_a(M) \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ ein Untervektorraum. Wegen $\dim(\mathbb{R}^{n+k}) = \dim(\ker(Df)) + \text{rang}(Df)$ ist $\dim(T_a(M)) = n$ für alle $a \in M$. Nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren ist $N_a(M)$ ein k -dimensionaler Vektorraum.

Beispiel 5.4 Es sei $M = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die Untermannigfaltigkeit aus Beispiel 5.2 zu $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ und $a = (\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta) \in S^2$, mit $\alpha \in [0, 2\pi]$ und $\beta \in [0, \pi]$. Dann ist $(Df)(a) = 2a \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$. Auflösung des linearen Gleichungssystems ergibt nach sinnvoller Wahl der Skalierung

$$T_a S^2 = \text{span} \left(\left(\begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix} \right) \right).$$

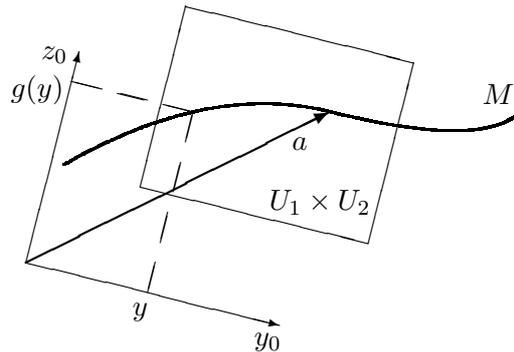
Sinnvollerweise haben wir die aufspannenden Vektoren als Orthonormalsystem gewählt. Schließlich wird der Normalenvektorraum durch den Radiusvektor aufgespannt, $N_a S^2 = \mathbb{R}a$. ◁

Definition 5.5 Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\phi : T \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ heißt *Immersion*, wenn $\text{rang}((D\phi)(t)) = n$ für alle $t \in T$.

Satz 5.6 (lokales Koordinatensystem) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq M$, eine offene Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Immersion $\phi : T \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, die T homöomorph auf V abbildet.

Ein Homöomorphismus war eine bijektive stetige Abbildung ϕ mit stetigem Inversen ϕ^{-1} .

Lemma 5.7 (angepaßte Koordinaten) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem $a \in M$ eine Zerlegung $\mathbb{R}^{n+k} = T_a(M) \oplus N_a(M) \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ mit offenen Mengen $U_1 \subseteq T_a(M) \simeq \mathbb{R}^n$ und $U_2 \subseteq N_a(M) \simeq \mathbb{R}^k$ sowie eine differenzierbare Abbildung $g : U_1 \rightarrow U_2$, so daß $M \cap (U_1 \times U_2) = \{(y, g(y)) : y \in U_1\}$.



Beweis: Im \mathbb{R}^{n+k} werde ein Koordinatensystem so gewählt, daß die ersten n Koordinatenrichtungen den Tangentialraum $T_a(M)$ aufspannen und die letzten k Koordinatenrichtungen den Normalenvektorraum $N_a(M)$. In diesen Koordinaten habe $x \in M$ die Darstellung $x = (y, z)$ mit $y \in \mathbb{R}^n$ und $z \in \mathbb{R}^k$. Speziell ist $a = (y_0, z_0)$. Seien $V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von y_0 und $V_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ eine offene Umgebung von z_0 , so daß $\text{rang}((Df)((y, z))) = k$ für alle $(y, z) \in M \cap (V_1 \times V_2)$. Sei $(Df)(x, y) =: (a_{ij}(y, z))$ mit $a_{ij}(y, z) = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y, z)$ für $1 \leq j \leq n$ und $a_{i, n+j}(y, z) = \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(y, z)$ für $1 \leq j \leq k$. Die Jacobi-Matrix bezüglich der 2. Komponente ist invertierbar in (y_0, z_0) , d.h. $\frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) \in GL(k, \mathbb{R})$: Für $w \neq 0$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \in (\ker((Df)(y_0, z_0)))^\perp$, also $0 \neq (Df)(y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) \cdot w$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0)$ ist injektiv, wegen der Gleichheit der Dimensionen dann bijektiv. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine offene Umgebung $U_1 \subseteq V_1$ von y_0 und eine offene Umgebung $U_2 \subseteq V_2$ von z_0 sowie eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Abbildung $g : U_1 \rightarrow U_2$ mit $f(y, g(y)) = 0$ für alle $y \in U_1$. \square

Beispiel 5.8 Wir sehen uns diese Konstruktion für die S^2 aus Beispiel 5.4 an. Für $a, x \in S^2$ war $T_a S^2 = \text{span}(u, v)$ und $N_a S^2 = \text{span}(a)$ mit

$$a = \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \cos \sigma \sin \tau \\ \sin \sigma \sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren (a, u, v) bilden ein Orthonormalsystem. Deshalb ist die Zerlegung $x = (y, z)$ entsprechend $\mathbb{R}^{n+k} = T_a S^2 \oplus N_a S^2$ die orthogonale Projektion

$$\begin{aligned} y &= P_{T_a S^2}(x) = \langle u, x \rangle u + \langle v, x \rangle v \\ &= \sin(\alpha - \sigma) \sin \tau \cdot u + (\sin \tau \cos \beta \cos(\alpha - \sigma) - \cos \tau \sin \beta) v =: y_1 u + y_2 v \end{aligned}$$

und

$$z = P_{N_a S^2}(x) = \langle a, x \rangle a = (\sin \tau \sin \beta \cos(\alpha - \sigma) - \cos \tau \cos \beta) a =: z_1 a .$$

Die Aussage des Lemmas ist nun, daß es eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U_1 \rightarrow U_2$, mit $U_1 \subseteq T_a S^2$ und $U_2 \subseteq N_a S^2$ gibt mit $f(y, g(y)) = 0$. Diese Abbildung ist $g(y) = z_1(y_1, y_2) = \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}$. \triangleleft

Beweis von Satz 5.6. Nach Lemma 5.7 existieren offene Teilmengen $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $U_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U_1 \rightarrow U_2$, so daß $M \cap (U_1 \times U_2) = \{(y, g(y)) : y \in U_1\}$. Wir setzen $V = M \cap (U_1 \times U_2)$ und $T = U_1$ sowie $\phi(y) = (y, g(y))$. Surjektivität von $\phi : T \rightarrow V$ folgt aus der Konstruktion und Injektivität aus der Eindeutigkeit von g . Dann ist $\phi^{-1} : (y, g(y)) \mapsto y$ die Projektion auf die erste Komponente, und damit stetig.

Schließlich gilt $(D\phi)(y) = \begin{pmatrix} E_n \\ (Dg)(y) \end{pmatrix}$. Da g differenzierbar auf T ist, ist auch ϕ differenzierbar in y , und es gilt $\text{rang}((D\phi)(y)) = n$. Damit ist $\phi : T \rightarrow V$ eine Immersion. \square

Beispiel 5.9 Wir diskutieren die Immersion $\phi : T \rightarrow V$ für das Beispiel 5.8. Aus dem geometrischen Bild der Orthogonalprojektion der Sphäre auf ihren Tangentialraum ist klar, daß wir $T = K_r(0) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 < r^2\}$ für beliebiges $0 < r < 1$ wählen können. Die Aussage des Satzes ist nun, daß es eine differenzierbare bijektive Umrechnung ϕ mit differenzierbarem Inversen zwischen Punkten $(y_1, y_2) \in T$ und Punkten $x = (\alpha, \beta) \in V \subseteq S^2$ einer Teilmenge der Sphäre gibt. Diese Umkehrabbildung $\phi^{-1} : V \rightarrow T$ ist gegeben durch

$$\phi^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha - \sigma) \sin \tau \\ \sin \tau \cos \beta \cos(\alpha - \sigma) - \cos \tau \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

Sie ist nach Konstruktion umkehrbar. \triangleleft

Es sei bemerkt, daß auch die Umkehrung von Satz 5.6 gilt: Ist eine Immersion ϕ mit diesen Eigenschaften gegeben, dann kann man zeigen, daß M Untermannigfaltigkeit ist. Die Immersion ϕ ist nicht eindeutig. Man kann die Konstruktion im Beweisen von Satz 5.6 mit beliebigen Diffeomorphismen von T deformieren, ohne daß sich an der Aussage etwas ändert.

Satz 5.10 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit, lokal definiert durch die Abbildung $f = (f_1, \dots, f_k) : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, mit $U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ offen. Sei $a \in M \cap U$ ein Punkt und $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n+k}) : T \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ die nach Satz 5.6 existierende Immersion (z.B. konstruiert aus f), die $T \subseteq \mathbb{R}^n$ homöomorph auf eine Umgebung $V \subseteq M$ von $\phi(t_a) = a \in M$ abbildet. Dann gilt (unabhängig von der konkreten Wahl von ϕ):

- i) Zu jedem Tangentialvektor $v \in T_a(M)$ im Sinne von Definition 5.5 gibt es eine Kurve $c :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ durch $a = c(0)$, so daß v Tangentialvektor an c im Punkt a ist.
- ii) Ist umgekehrt v ein Tangentialvektor an eine Kurve $c : I \rightarrow M$ durch $a \in M$, dann gilt $v \in \ker(Df)(a) = T_a(M)$.
- iii) Die Familie $((\partial_j \phi)(t_a))_{j=1, \dots, n}$ der Vektoren $(\partial_j \phi)(t_a) \in \mathbb{R}^{n+k}$ ist eine Basis von $T_a(M)$.
- iv) Die Familie $((\text{grad } f_i)(a))_{i=1, \dots, k}$ der Vektoren $(\text{grad } f_i)(a) \in \mathbb{R}^{n+k}$ ist eine Basis von $N_a(M)$.

Beweis. Sei $c : I \rightarrow M$ eine Kurve auf M durch $c(0) = a$, wobei das Intervall $I =]-\epsilon, \epsilon[$ so gewählt sei, daß die Kurve $\gamma = \phi^{-1} \circ c : I \rightarrow T$ durch $t_a = \gamma(0) = \phi^{-1}(a)$ vollständig in T liegt. Wegen $f(\phi(t)) = 0$ für alle $t \in T$ gilt

$$0 = (D(f \circ \phi))(t_a) = (Df)(a) \cdot (D\phi)(t_a) \in M(k \times n, \mathbb{R}). \quad (*)$$

Schreiben wir $(D\phi)(t_a) = (v_1, \dots, v_n) \in M((n+k) \times n, \mathbb{R})$, mit Spaltenvektoren $v_j = (\partial_j \phi)(t_a) \in \mathbb{R}^{n+k}$, so folgt $v_j \in \ker((Df)(a)) = T_a(M)$ für alle $1 \leq j \leq n$.

iii) Wegen $\text{rang}((D\phi)(t)) = \text{rang}((\partial_j \phi_i)(t)) = n$ ist die Familie $(v_j)_{j=1, \dots, n}$ linear unabhängig und spannt somit einen n -dimensionalen Untervektorraum von \mathbb{R}^{n+k} auf, der wegen der Gleichheit der Dimensionen identisch mit $T_a(M)$ ist. Also ist $((\partial_j \phi)(t_a))_{j=1, \dots, n}$ eine Basis von $T_a(M)$.

i) Damit läßt sich jeder Vektor $v \in T_a(M)$ schreiben als $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Zum entsprechenden Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ wählen wir die Kurven $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow T$ mit $\gamma(\tau) = t_a + \tau \alpha$ und $c(\tau) = \phi(\gamma(\tau))$. Dann ist

$$\begin{aligned} c'(0) &= (D(\phi \circ \gamma))(0) = (D\phi)(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \sum_{i=1}^n (\partial_i \phi)(t_a) \frac{d\gamma_i}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \\ &= \sum_{i=1}^n (\partial_i \phi)(t_a) \alpha_i = v. \end{aligned}$$

ii) Sei $c : I \rightarrow M$ mit $c(\tau_a) = a$. Dann ist $(f \circ c)(\tau) = 0$ für alle $\tau \in I$, so daß das Differential verschwindet:

$$(D(f \circ c))(\tau_a) = (Df)(a) \cdot c'(\tau_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad c'(\tau_a) \in T_a(M).$$

iv) Wegen $(Df)(a) = (a_{ij}) \in M(k \times (n+k), \mathbb{R})$, $a_{ij} = (\partial_j f_i)(a)$ sind die Zeilen von $(Df)(a)$ gegeben durch die Vektoren $(\text{grad } f_i)(a)$, $i = 1, \dots, k$. Nach (*) gilt $(Df)(a) \cdot v = 0$ für alle $v \in T_a(M)$ und somit $(\text{grad } f_i)(a) \in N_a(M)$. Wegen $\text{rang}((Df)(a)) = k$ ist die Familie $((\text{grad } f_i)(a))_{i=1, \dots, k}$ linear unabhängig und damit wegen der Gleichheit der Dimensionen eine Basis von $N_a(M)$. \square

Satz 5.11 (Extrema mit Nebenbedingungen) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit, lokal definiert durch die Abbildung $f = (f_1, \dots, f_k) : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, für $U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ offen, mit $M \cap U = f^{-1}(0)$ und $(\text{rang}(Df)(x)) = k$ für alle $x \in M \cap U$.

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, so daß die Einschränkung $F|_M : M \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in M$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum) besitzt, d.h. es gibt eine Umgebung $V \subseteq M \cap U$ von a , so daß

$$F(b) \leq F(a) \quad \text{bzw.} \quad F(b) \geq F(a) \quad \text{für alle } b \in V.$$

Dann gilt $(\text{grad } F)(a) \in N_a(M)$, es gibt also Konstanten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, so daß

$$(\text{grad } F)(a) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\text{grad } f_i)(a).$$

Diese Konstanten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ heißen Lagrange-Multiplikatoren.

Beweis. Da $F|_M$ in $a \in M$ ein lokales Extremum hat, hat die nochmalige Einschränkung auf eine beliebige Kurve $c :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ durch $c(0) = a$ ein lokales Extremum in $t = 0$:

$$0 = \left(\frac{d}{d\tau} (F \circ c) \right) (0) = (DF)(a) \cdot c'(0).$$

Da $c'(0) \in T_a(M)$ als beliebiger Tangentialvektor gewählt werden kann, ist $(DF)(a) = (\text{grad } F)(a) \in (T_a(M))^\perp = N_a(M)$. \square

Wir geben einige Anwendungen. Der folgende Satz liefert ein numerisch umsetzbares Verfahren, um den größten und kleinsten Eigenwert einer symmetrischen Matrix zu bestimmen:

Satz 5.12 Für eine symmetrische Matrix $A = A^t \in M(n, \mathbb{R})$ nimmt die Einschränkung der durch $F(x) = \langle x, Ax \rangle$ definierten Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf die Einheitssphäre S^{n-1} ihr Maximum und Minimum in einem Eigenvektor an, und der Lagrange-Multiplikator ist der Eigenwert.

Beweis. Die S^{n-1} ist Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n definiert durch die Nebenbedingung $f(x) = \langle x, x \rangle - 1$. Als stetige Abbildung auf dem kompakten Raum S^{n-1}

nimmt $F : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ das Supremum in einem Punkt $v \in S^{n-1}$ an. In diesem Punkt gilt nach Satz 5.11

$$(\text{grad } F)(v) = 2Av = \lambda(\text{grad } f)(v) = 2\lambda v ,$$

also $Av = \lambda v$ und dann $\langle v, Av \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda$. Analog für das Infimum. \square

Die Methode läßt sich fortsetzen, um iterativ sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu bestimmen. Sind v_1, \dots, v_k Eigenvektoren zu $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$, dann betrachtet man iterativ die Einschränkung von F auf $M_k := S^{n-1} \cap (\text{span}(v_1, \dots, v_k))^\perp$, gegeben durch die Nebenbedingungen $F_{k+1}(x) = \langle x, x \rangle - 1$ und $F_j = 2\langle v_j, x \rangle$ für $1 \leq j \leq k$. Die Differentiale $(DF_{k+1})(x) = 2x^t$ und $(DF_j)(x) = 2v_j^t$ sind linear unabhängig. Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen, damit ist M_k kompakt, und F nimmt wieder ihr Supremum in einem Punkt $v_{k+1} \in M_k$ an. Somit gibt es $\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}$ mit

$$(\text{grad } F)(v_{k+1}) = 2Av_{k+1} = 2\lambda_{k+1}v_{k+1} + 2 \sum_{j=1}^k \mu_j v_j .$$

Skalarprodukt mit v_{k+1} liefert unter Verwendung von $\langle v_j, v_{k+1} \rangle = \delta_{j,k+1}$ wie zuvor $\lambda_{k+1} = F(v_{k+1})$. Insbesondere ist so bewiesen, daß jede symmetrische Matrix $A = A^t \in M(n, \mathbb{R})$ diagonalisierbar ist und daß es im \mathbb{R}^n eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A gibt.

Satz 5.13 (Arithmetisches \geq geometrisches Mittel)

Für beliebige $a_1, \dots, a_n \geq 0$ gilt

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

mit Gleichheit genau für $a_1 = \dots = a_n$.

Beweis. i) Es sei M die $n - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, f(x) := x_1 + \dots + x_n - 1 = 0\} ,$$

betrachtet als Durchschnitt von $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ mit $f^{-1}(0)$. Dann hat $(Df)(x) = (1, \dots, 1)$ maximalen Rang. Wir betrachten die Einschränkung der Funktion $F(x) = x_1 x_2 \dots x_n$ auf den kompakten Abschluß \overline{M} von M . Nach Extremwertsatz nimmt F das Supremum in einem Punkt $y \in \overline{M}$ an, und da $F(x) = 0$ für $x \in \overline{M} \setminus M$, gilt sogar $y \in M$. Somit gibt es ein λ mit

$$(\partial_i F)(y) = \frac{y_1 \dots y_n}{y_i} = \lambda(\partial_i f)(y) = \lambda \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n ,$$

also $y_1 = y_2 = \dots = y_n = \frac{1}{n}$ und damit $x_1 \cdot x_2 \dots x_n \leq \frac{1}{n^n}$ für alle $x \in M$ mit Gleichheit genau für $x = y$.

ii) Seien nun $a_1, \dots, a_n > 0$ und $a := a_1 + \dots + a_n$. Wir setzen $x_i = \frac{a_i}{a}$, dann gilt nach i)

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{a^n} \leq \frac{1}{n^n}.$$

Elementare Umformungen liefern die Behauptung. Für Randpunkte mit $a_i = 0$ ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt. \square

Durch ähnliche Techniken erhält man einen weiteren Beweis der Hölderschen Ungleichung $\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$ für $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Untermannigfaltigkeiten spielen eine wichtige Rolle in der Mechanik. Gegeben sei ein mechanisches System aus N Teilchen (gleicher Masse m). Eine Konfiguration des Systems wird beschrieben durch einen Punkt $x = (x_1, \dots, x_{3N}) \in \mathbb{R}^{3N}$ (Angabe aller Koordinaten zu gegebenem Zeitpunkt). Dem System werden k holonome Zwangsbedingungen auferlegt, beschrieben durch k Gleichungen $f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0$. Wir setzen voraus, daß die aus den partiellen Ableitungen $a_{ij}(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)(x)$ gebildete Matrix der partiellen Ableitungen maximalen Rang hat, $\text{rang}(a_{ij}(x)) = k$ für alle $x \in M$. Dann definieren die Gleichungen eine $n = (3N - k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{3N}$. Konfigurationen des Systems mit Zwangsbedingungen sind dann durch Punkte aus M zu beschreiben. Die Dimension von M entspricht der Zahl der Freiheitsgrade.

Nach Satz 5.6 gibt es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq M$ sowie eine Umgebung $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Immersion $\phi : T \rightarrow M$, die T homöomorph auf V abbildet. Die Koordinaten (q_1, \dots, q_n) eines Punktes $q \in T$ heißen verallgemeinerte Koordinaten.

Sei $(K(a)) \in \mathbb{R}^{3N}$ eine Familie von Kräften, die auf die Teilchen wirken. Dann wird die Beschleunigung der Teilchen beschrieben durch das d'Alembertsche Prinzip

$$\langle m\ddot{x}(a) - K(a), v \rangle = 0 \quad \text{für beliebige } v \in T_a M.$$

Die Forderung besagt, daß die durch $Z(a) := m\ddot{x}(a) - K$ definierte Zwangskraft keine virtuelle Arbeit verrichtet bzw. ein Normalenvektor ist. Somit gibt es Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_l, l = 1, \dots, k$ mit $Z(a) = \sum_{l=1}^k \lambda_l(a) (\text{grad } f_l)(a)$. Es liegt dann nahe, die Zwangskraft mit dem Gradienten einer Funktion $W : U \rightarrow \mathbb{R}$ in Verbindung zu setzen, deren Einschränkung auf M im Punkt a ein lokales Extremum hat. Diese Funktion ist die Wirkung und die Extremalitätsforderung heißt *Hamiltonsches Prinzip*.

Beispiel 5.14 Eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^2$ werde durch $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(l^2 - x_1^2 - x_2^2) = 0$ definiert. Das ist relevant für die Dynamik eines ebenen Pendels, bestehend aus einem Massenpunkt aufgehängt an einem masselosen Seil der Länge l . Es gilt

$$(Df)(x) = (-x_1, -x_2), \quad \text{rang}((Df)(x)) = 1 \quad \text{für } x_1^2 + x_2^2 \neq 0.$$

Damit bildet $n(x) := (\text{grad } f)(x) = (-x_1, -x_2)$ eine Basis von $N_{(x_1, x_2)}(M)$ und $v(x) = (-x_2, x_1)$ eine Basis von $T_{(x_1, x_2)}(M)$. Auf den Massepunkt wirke die Kraft $(K_1, K_2) = (0, -mg)$. Das d'Alembertsche Prinzip liefert

$$\left(m\ddot{x}_1, m\ddot{x}_2 + mg \right) = \lambda(x) (-x_1, -x_2) . \quad (*)$$

Zusammen mit der Gleichung $f = 0$ haben wir 3 Gleichungen zur Bestimmung der 3 Funktionen x_1, x_2, λ . Skalarprodukt von (*) mit (\dot{x}_1, \dot{x}_2) und Verwendung von $x_1^2 + x_2^2 = l^2$, also $x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 0$, liefert den Energieerhaltungssatz

$$E = \frac{m}{2}((\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2) + mgx_2 = \text{const} .$$

Skalarprodukt von (*) mit (x_1, x_2) und Verwendung von $x_1\ddot{x}_1 + x_2\ddot{x}_2 + (\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 = 0$ liefert

$$\lambda = \frac{m}{l^2}((\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 - gx_2) = \frac{1}{l^2}(2E - 3mgx_2) .$$

Die Zwangskraft $Z = (-\lambda x_1, -\lambda x_2)$ ist dann die Seilspannung. Die Gleichungen lassen sich in Polarkoordinaten $x_1 = l \sin \phi$ und $x_2 = -l \cos \phi$ entkoppeln ($\phi = 0$ ist die Ruhelage). Der Betrag der Seilspannung ist dann $\|Z\| = ml\dot{\phi}^2 + mg \cos \phi = \frac{mv^2}{l} + mg \cos \phi$, mit $v^2 := \|\dot{x}\|^2 = l^2\dot{\phi}^2$. \triangleleft

In der Statistischen Physik spielt die Boltzmann-Verteilung eine wichtige Rolle, die sich ebenfalls aus einem Extremalproblem mit Nebenbedingung ergibt:

Beispiel 5.15 (Boltzmann-Verteilung) Ein System besitze N Energieniveaus E_1, \dots, E_N , wobei das Niveau E_i mit Wahrscheinlichkeit p_i angenommen wird. Die Gesamtenergie ist dann $U = \sum_{i=1}^N E_i p_i$ unter der Nebenbedingung $f(p_i) = \sum_{i=1}^N p_i - 1 = 0$. Der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird eine Entropie $S = -k_B \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i$ zugeordnet, wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist. Es wird nun jene Verteilung realisiert, die die freie Energie $F = U - TS$ minimiert, wobei T die Temperatur ist. Somit gilt

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = E_i + k_B T (1 + \ln p_i) = \lambda \frac{\partial f}{\partial p_i} = \lambda 1 ,$$

oder $p_i = \exp\left(\frac{\lambda}{k_B T} - 1 - \frac{E_i}{k_B T}\right)$. Die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ erzwingt

$$\exp\left(\frac{\lambda}{k_B T} - 1\right) = \frac{1}{Z} \quad \text{mit} \quad Z = \sum_{i=1}^N e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Dabei heißt Z die Zustandssumme, und insgesamt folgt $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$. \triangleleft

6 Differenzierbare Kurven

Eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n ist eine differenzierbare Kurve mit nicht verschwindendem Tangentialvektor, denn die zugehörige Immersion $\phi = c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bildet ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ homöomorph auf die Teilmenge $M = c(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ ab. Diese Teilmenge heißt die *Spur* der Kurve c . Die Umkehrung gilt nicht immer: Wenn die Spur der Kurve sich selbst schneidet, ist c nicht bijektiv. Die Rangbedingung ist verletzt für $c'(t) = 0$.

Definition 6.1 Eine differenzierbare Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, falls $c'(t) \neq 0$.

Im folgenden beschränken wir uns auf reguläre Kurven. Selbstschnittpunkte der Spur sind zugelassen.

Satz 6.2 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre stetig differenzierbare Kurve mit $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ und $c'_1 \neq 0$ auf I . Dann gilt:

- i) $c_1 : I \rightarrow J$ ist eine Diffeomorphismus zwischen offenen Intervallen.
- ii) Es sei $M = c(I)$ die Spur der Kurve. Auf der Teilmenge $U = J \times \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert eine differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ mit $\text{rang}((Df)(x)) = n - 1$ und $M \cap U = f^{-1}(0)$. Insbesondere ist M eine Untermannigfaltigkeit.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $c_1 : I \rightarrow J$ ein Diffeomorphismus mit Umkehrung $c_1^{-1} : J \rightarrow I$. Setze $f = (f_2, \dots, f_n)$ mit $f_j = x_j - c_j(c_1^{-1}(x_1))$. Dann ist das Differential nach Kettenregel gegeben in Blockdarstellung durch $(Df)(x) = (v(x_1), E_{n-1}) \in M((n-1) \times n, \mathbb{R})$ mit $v_i(x_1) = c'_{i+1}(c_1^{-1}(x_1)) \cdot (c'_1(c_1^{-1}(x_1)))^{-1}$, hat somit maximalen Rang. Zusammen mit $t = c_1^{-1}(x_1)$ definieren die Nullstellen $x_j = c_j(t)$ die Spur. \square

Offenbar verhindert die Bedingung $c'_1 \neq 0$ Selbstschnittpunkte, denn c_1 bleibt monoton wachsend bzw. fallend.

Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve und $T = \{t_0, \dots, t_m\}$ eine endliche Teilmenge von I mit $t_0 < t_1 < \dots, t_m$. Dann definieren die zugehörigen Kurvenpunkte $c(t_1), \dots, c(t_m)$ ein der Kurve einbeschriebenes *Sehnenpolygon* der Länge

$$L(c(t_1), \dots, c(t_m)) = \sum_{i=1}^m \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|.$$

Nach Dreiecksungleichung wächst die Länge des Sehnenpolygons, wenn weitere Kurvenpunkte hinzugefügt werden.

Definition 6.3 Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve. Falls die Menge der Längen von einbeschriebenen Sehnenpolynomen beschränkt ist, dann heißt das Supremum dieser Menge die *Bogenlänge der Kurve* c .

Satz 6.4 Eine Kurve $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die auf $] \alpha, \beta [$ stetig differenzierbar ist, hat die Bogenlänge

$$L(c) = \int_{\alpha}^{\beta} dt \|c'(t)\| = \int_{\alpha}^{\beta} dt \sqrt{\langle c'(t), c'(t) \rangle}.$$

Beweis. i) Nach dem Mittelwertsatz 1.15 gilt mit $f = \text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$c(t_i) - c(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt c'(t)$$

und dann mit der an diesen Satz dort anschließenden Abschätzung

$$\|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \|c'(t)\|.$$

Somit gilt für jede Unterteilung des Intervalls $[\alpha, \beta]$ die Abschätzung $L(c(t_0), \dots, c(t_m)) \leq L(c)$.

ii) Wir zeigen: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Unterteilung mit $L(c) - L(c(t_0), \dots, c(t_m)) < \epsilon$. In der Standardbasis (e_j) des \mathbb{R}^n sei $c(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t)e_j$. Da die $c'_j(t)$ als stetige Funktionen Riemann-integrierbar sind, gibt es Treppenfunktionen $\phi_j : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|c'_j(t) - \phi_j(t)| < \frac{\epsilon}{2n|\beta - \alpha|}$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Mit $\phi(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(t)e_j$ folgt nach Dreiecksungleichung $\|c'(t) - \phi(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2|\beta - \alpha|}$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Wir wählen eine Unterteilung $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$, so daß ϕ auf jedem offenen Teilintervall $]t_{i-1}, t_i[$ konstant ist. Nach Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \phi(t) \right\| &\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt (\phi(t) - c'(t)) \right\| + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt c'(t) \right\| \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \|\phi(t) - c'(t)\| + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt c'(t) \right\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2|\beta - \alpha|} (t_i - t_{i-1}) + \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|. \end{aligned}$$

Da ϕ auf $]t_{i-1}, t_i[$ konstant ist, gilt $\left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \phi(t) \right\| = \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \|\phi(t)\|$ und somit nach Summieren über i

$$\sum_{i=1}^m \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \geq \int_{\alpha}^{\beta} dt \|\phi(t)\| - \frac{\epsilon}{2}.$$

Andererseits ist $\|c'(t)\| \leq \|c'(t) - \phi(t)\| + \|\phi(t)\|$, also $\|\phi(t)\| \geq \|c'(t)\| - \frac{\epsilon}{2|\beta - \alpha|}$.

Integrieren über $[\alpha, \beta]$ liefert dann die Behauptung $\sum_{i=1}^m \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \geq$

$$\int_{\alpha}^{\beta} dt \|c'(t)\| - \epsilon. \quad \square$$

Beispiel 6.5 Der ebene Kreisbogen $c : [\phi_1, \phi_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$ hat die Bogenlänge

$$L(c) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} dt \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r(\phi_2 - \phi_1) .$$

Insbesondere hat der Kreis vom Radius r , realisiert durch die Kurve $c : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$ den Umfang $L(c) = 2\pi r$. \triangleleft

Beispiel 6.6 Für $0 < b < a$ werde die Ellipsenkurve $c : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$. Ausgedrückt durch $\epsilon^2 := \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ hat sie die Bogenlänge

$$L(c) = \int_0^{2\pi} dt \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = a \int_0^{2\pi} dt \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} = a \cdot E(2\pi; \epsilon) .$$

Das verbleibende sogenannte *elliptische Integral* kann nicht mehr elementar gelöst werden. Für den Viertelbogen findet man durch Potenzreihenentwicklung und Beispiel 31.3 aus dem 2. Semester

$$\begin{aligned} E(2\pi; \epsilon) &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-\epsilon^2)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin^{2k} t \\ &= 2\pi \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{2k} \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^k k!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)(2k-1)}{2^k k!} \right) \\ &= 2\pi \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^{2k}}{2k-1} \left(\frac{\prod_{j=1}^k (2j-1)}{2^k k!} \right)^2 \right) . \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Für ebene Kurven $c :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}^2$ ist es oft zweckmäßig, sie in Polarkoordinaten $c(t) = (r(t) \cos \phi(t), r(t) \sin \phi(t))$ darzustellen. Dann ist

$$c'(t) = (r'(t) \cos \phi(t) - r(t) \phi'(t) \sin \phi(t), r'(t) \sin \phi(t) + r(t) \phi'(t) \cos \phi(t))$$

und folglich

$$L(c) = \int_{\alpha}^{\beta} dt \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2 (\phi'(t))^2} .$$

Entscheidend bei der Interpretation der Bogenlänge ist die Invarianz unter Reparametrisierung:

Satz 6.7 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre differenzierbare Kurve und $\phi^{-1} : I \rightarrow J$ ein Diffeomorphismus. Dann ist auch $\tilde{c} := c \circ \phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre differenzierbare Kurve, und es gilt $L(c) = L(\tilde{c})$.

Beweis. Sei $I =]\alpha, \beta[$. Der Diffeomorphismus ϕ ist insbesondere monoton. Sei zunächst $(\phi^{-1})'(t) > 0$ für alle $t \in I$, dann ist $J =]\phi^{-1}(\alpha), \phi^{-1}(\beta)[$. Differenzierbarkeit von $c \circ \phi(\tau)$ folgt aus der Kettenregel, mit $\tilde{c}'(\tau) = c'(\phi(\tau)) \cdot \phi'(\tau)$. Damit gilt für die Bogenlänge unter Verwendung der Substitutionsregel für das Riemann-Integral

$$\begin{aligned} L(\tilde{c}) &= \int_{\phi^{-1}(\alpha)}^{\phi^{-1}(\beta)} d\tau \|\tilde{c}'(\tau)\| = \int_{\phi^{-1}(\alpha)}^{\phi^{-1}(\beta)} d\tau \|c'(\phi(\tau))\| \cdot |\phi'(\tau)| \\ &= \int_{\phi^{-1}(\alpha)}^{\phi^{-1}(\beta)} d\tau \|c'(\phi(\tau))\| \cdot \phi'(\tau) = \int_{\phi(\phi^{-1}(\alpha))}^{\phi(\phi^{-1}(\beta))} d\phi \|c'(\phi)\| = \int_{\alpha}^{\beta} d\phi \|c'(\phi)\|. \end{aligned}$$

Ist $(\phi^{-1})' < 0$ auf I , dann ist $J =]\phi^{-1}(\beta), \phi^{-1}(\alpha)[$. Das dann entstehende Vorzeichen beim Vertauschen der Integrationsgrenzen wird kompensiert durch das Vorzeichen in $|\phi'(\tau)| = -\phi'(\tau)$, so daß die Bogenlänge unabhängig vom Vorzeichen von ϕ' ist. \square

Folglich ist die Bogenlänge einer Kurve allein eine Eigenschaft der Spur der Kurve. Die konkrete Parametrisierung ist unerheblich und kann möglichst sinnvoll gewählt werden. Oft bringt die *Parametrisierung nach Bogenlänge* Vorteile:

Definition 6.8 Eine reguläre differenzierbare Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *nach Bogenlänge parametrisiert*, wenn $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

Satz 6.9 Zu jeder regulären stetig differenzierbaren Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es eine diffeomorphe Reparametrisierung $\phi^{-1} : I \rightarrow J$, so daß $\tilde{c} := c \circ \phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Beweis. Es sei $I =]\alpha, \beta[$. Wir definieren

$$\phi^{-1}(\tau) := \int_{\alpha}^{\tau} dt \|c'(t)\|.$$

Dann ist ϕ^{-1} Stammfunktion zu $\|c'(t)\|$, d.h. $(\phi^{-1})'(\tau) = \|c'(\tau)\|$ und somit

$$\tilde{c}'(\phi^{-1}(\tau)) = (D(c \circ \phi))(\phi^{-1}(\tau)) = c'(\tau) \cdot \phi'(\phi^{-1}(\tau)) = c'(\tau) \cdot \frac{1}{(\phi^{-1})'(\tau)} = \frac{c'(\tau)}{\|c'(\tau)\|}.$$

Folglich ist $\|\tilde{c}'(\phi^{-1}(\tau))\| = 1$. \square

7 Variationsrechnung

In der Variationsrechnung sucht man Extremwerte (genauer: stationäre Werte) von Funktionen (genauer: Funktionalen) auf unendlich-dimensionalen normierten

Vektorräumen. Es ist die wichtigste Methode zur Gewinnung von Bewegungsgleichungen in Mechanik und Feldtheorie. Wir nehmen vereinfachend Fréchet-Differenzierbarkeit an, tatsächlich genügt das unendlich-dimensionale Analogon der Richtungsableitung.

Abkürzend bezeichnen wir mit $X^k = \mathcal{C}^k([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$ den (unendlich-dimensionalen) Vektorraum der k -mal stetig differenzierbaren Kurven $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Man kann zeigen, daß X^k zusammen mit der Norm

$$\|c\|_{(k)} = \sum_{l=0}^k \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|c^{(l)}(t)\|$$

ein Banach-Raum ist. Das *Wirkungsfunktional* ist eine Abbildung $S : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für *stationäre* Punkte von S , d.h. Kurven $c \in X^2$ mit $(DS)(c) = 0$, wobei wir die Randpunkten der Kurve $a = c(\alpha)$ und $c = c(\beta)$ festgehalten.

In wichtigen Fällen läßt sich die Wirkung S schreiben als Riemann-Integral über die *Lagrange-Funktion* \mathcal{L} der Kurve,

$$S(c) = \int_{\alpha}^{\beta} dt \mathcal{L}(t, c(t), c'(t)) .$$

Dabei wird $\mathcal{L} : [\alpha, \beta] \times X^2 \times X^1 \rightarrow \mathbb{R}$ als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Betrachten wir $(t, q, v) \in [\alpha, \beta] \times X^2 \times X^1 \rightarrow \mathbb{R}$ als Variablen, dann ist

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(t + \tau, q + r, v + w) \\ &= \mathcal{L}(t, q, v) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right)(t, q, v) \circ \tau + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\right)(t, q, v) \circ r + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\right)(t, q, v) \circ w \\ &+ o(\|(t, r, w)\|) \end{aligned}$$

mit $\tau \in \mathbb{R}$, $r \in X^2$ und $w \in X^1$ derart, daß $(t + \tau, q + r, v + w)$ in der gewählten Umgebung von (t, q, v) bleibt. Zweimalige Differenzierbarkeit von \mathcal{L} bedeutet, daß die Abbildungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right) &: \mathbb{R} \times X^2 \times X^1 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) , \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\right) &: \mathbb{R} \times X^2 \times X^1 \rightarrow \text{Hom}(X^2, \mathbb{R}) , \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\right) &: \mathbb{R} \times X^2 \times X^1 \rightarrow \text{Hom}(X^1, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

selbst wieder differenzierbar sind in (t, q, v) .

Es sei $U \subseteq X^2$ die Teilmenge der zweimal stetig differenzierbaren Kurven $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit festgehaltenen Randpunkten $a = c(\alpha)$ und $c = c(\beta)$. Um das

Differential zu berechnen, ist $S(c + \xi)$ mit $S(c)$ zu vergleichen. Dabei ist $\xi \in X^2$ so zu wählen, daß $c + \xi \in U$ liegt, d.h. ξ verschwindet an den Randpunkten. Wir bezeichnen mit

$$X_0^2 := \{\xi \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n), \xi(\alpha) = \xi(\beta) = 0\}$$

den Untervektorraum der zweimal stetig differenzierbaren Kurven, die am Rand verschwinden. Dann gilt für $\xi \in X_0^2$ für eine zweimal stetig differenzierbare Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} S(c + \xi) &= \int_{\alpha}^{\beta} dt \mathcal{L}(t, c(t) + \xi(t), c'(t) + \xi'(t)) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} dt \left\{ \mathcal{L}(t, c(t), c'(t)) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) (t, c(t), c'(t)) \circ \xi(t) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) (t, c(t), c'(t)) \circ \xi'(t) + o(\|\xi\|) + o(\|\xi'\|) \right\}. \end{aligned}$$

Es gilt $\int_{\alpha}^{\beta} dt (o(\|\xi\|) + o(\|\xi'\|)) = o(\|\xi\|_{(2)})$. Für die festgehaltene Kurve $c \in X^2$ können wir das Differential $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) (t, c(t), c'(t))$ auffassen als Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) (t, c(t), c'(t)) \in \text{Hom}(X^1, \mathbb{R})$$

Nach Kettenregel und allen Voraussetzungen ist diese Funktion stetig differenzierbar auf $]\alpha, \beta[$ mit stetiger Fortsetzung auf $[\alpha, \beta]$, so daß wir partiell integrieren dürfen:

$$\begin{aligned} (DS)(c) \circ \xi &= \int_{\alpha}^{\beta} dt \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) (t, c(t), c'(t)) \circ \xi(t) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) (t, c(t), c'(t)) \circ \xi'(t) \right\} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} dt \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) (t, c(t), c'(t)) - \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) (t, c(t), c'(t)) \right)' \right\} \circ \xi(t) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) (t, c(t), c'(t)) \circ \xi(t) \Big|_{\alpha}^{\beta}. \end{aligned}$$

Der Randbeitrag in der letzten Zeile verschwindet wegen $\xi(\alpha) = \xi(\beta) = 0$. Unter Verwendung des weiter unten angegebenen *Fundamentallemmas der Variationsrechnung* haben wir somit bewiesen:

Satz 7.1 (Euler-Lagrange-Gleichungen) *Über eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L} : [\alpha, \beta] \times X^2 \times X^1 \rightarrow \mathbb{R}$ werde durch*

$$S(c) := \int_{\alpha}^{\beta} dt \mathcal{L}(t, c(t), c'(t))$$

ein Wirkungsfunktional $S : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Banach-Raum X^2 der zweimal stetig differenzierbaren Kurven $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert. Dann gilt: Das Wirkungsfunktional ist auf der Teilmenge $U \subseteq X^2$ der zweimal stetig differenzierbaren Kurven

mit festgehaltenen Randpunkten genau dann stationär in einem Punkt $c \in U$, d.h. $(DS)(c) = 0$, wenn für die Kurve c die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) (t, c(t), c'(t)) \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) (t, c(t), c'(t)) = 0$$

in jedem Punkt $t \in [\alpha, \beta]$ gelten.

Nach obiger Diskussion ist nur die Richtung $(DS)(c) = 0 \Rightarrow$ Euler-Lagrange zu zeigen. Sie ergibt sich aus

Lemma 7.2 (Fundamentallemma der Variationsrechnung) Für eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}([\alpha, \beta])$ gelte $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t) = 0$ für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $g \in \mathcal{C}_0^2([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, welche am Rand verschwinden. Dann ist $f(t) = 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit von f genügt es, $f(t) = 0$ für alle $t \in]\alpha, \beta[$ zu zeigen. Angenommen, es gibt ein $t_0 \in]\alpha, \beta[$ mit $f(t_0) = \epsilon > 0$. (Der Beweis für $f(t_0) = -\epsilon < 0$ ist analog.) Wegen der Stetigkeit von f gibt es dann ein $\delta > 0$, so daß $f(t) > \frac{\epsilon}{2}$ für alle $t \in K_{\delta}(t_0) \subseteq]\alpha, \beta[$. Dann gibt es (sogar beliebig oft) differenzierbare nichtnegative Funktionen g , die außerhalb $K_{\delta}(t_0)$ identisch verschwinden. Eine Wahl ist z.B.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq t_0 - \delta \text{ oder } t \geq t_0 + \delta \\ e^{-\frac{1}{t-(t_0-\delta)} - \frac{1}{(t_0+\delta)-t}} & \text{für } t_0 - \delta < t < t_0 + \delta \end{cases}$$

Damit ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} dt f(t)g(t) = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} dt f(t)g(t) > \frac{\epsilon}{2} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} dt g(t) > 0,$$

im Widerspruch zur Annahme. Daraus folgt $f(t) = 0$ für alle t und schließlich die Gültigkeit der Euler-Lagrange-Gleichungen. \square

In den Euler-Lagrange-Gleichungen ist zunächst

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) (t, c(t), c'(t)) \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) (t, c(t), c'(t)) \in \text{Hom}(X^2, \mathbb{R})$$

eine lineare Abbildung. Evaluiert im Punkt $t \in]\alpha, \beta[$ geht aber nur der Vektor $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ ein, so daß es genügt, die Gleichungen in den Vektoren der Standardbasis des \mathbb{R}^n auszuwerten. Somit sind die Euler-Lagrange-Gleichungen äquivalent zum System

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) (t, c(t), c'(t)) \circ e_k \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) (t, c(t), c'(t)) \circ e_k &= 0 \\ \text{für alle } k = 1, \dots, n \text{ und } t \in]\alpha, \beta[. \end{aligned}$$

Beispiel 7.3 Wir betrachten noch einmal das Pendel der Fadenlänge l aus Beispiel 5.14. Die Nebenbedingung definiert eine Untermannigfaltigkeit $M = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, auf der die Bewegung stattfindet. Die Lagrange-Funktion ist dann auf einer lokalen Karte (T, ϕ) dieser Untermannigfaltigkeit definiert. Sinnvollerweise wählt man $T \subseteq \mathbb{R}$ als abgerollten Kreisbogen und dann die Kurve $[\alpha, \beta] \ni t \mapsto c(t) \in T \subseteq \mathbb{R}$ als Zuordnung des Auslenkungswinkels zum Zeitpunkt t . Dann sei die Lagrange-Funktion gegeben als

$$\mathcal{L}(t, c(t), c'(t)) = \frac{ml^2}{2}(c'(t))^2 + mgl \cos(c(t)) .$$

Nach Definition der Einschränkungen der Jacobi-Matrix ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, c(t) + r, c'(t)) &= \mathcal{L}(t, c(t), c'(t)) + mgl(\cos(c(t) + r) - \cos(c(t))) \\ &= \mathcal{L}(t, c(t), c'(t)) + mgl(\cos(c(t))(\cos r - 1) - \sin(c(t)) \sin r) \\ &= \mathcal{L}(t, c(t), c'(t)) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\right)(t, c(t), c'(t)) \circ r + o(\|r\|) \end{aligned}$$

mit $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\right)(t, c(t), c'(t)) = -mgl \sin(c(t))$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, c(t), c'(t) + w) &= \frac{ml^2}{2}(c'(t) + w)^2 + mgl \cos(c(t)) \\ &= \mathcal{L}(t, c(t), c'(t)) + ml^2 c'(t)w + \frac{m}{2}w^2 \\ &= \mathcal{L}(t, c(t), c'(t)) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\right)(t, c(t), c'(t)) \circ w + o(\|w\|) \end{aligned}$$

mit $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\right)(t, c(t), c'(t)) = mc'(t)$. Somit lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$(ml^2 c'(t))' - (-mgl \sin(c(t))) = 0 \quad \Rightarrow \quad c''(t) + \omega^2 \sin(c(t)) = 0$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Das ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung zur Lösung der Integralkurve $c(t)$. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß zu ihrer eindeutigen Lösung Anfangsbedingungen $c(t_0)$ und $c'(t_0)$ vorzugeben sind. \triangleleft

Diese Methode, sich die Bahnkurven eines mechanischen Systems zu verschaffen, heißt *Hamiltonsches Prinzip*: Von allen möglichen Bahnkurven eines mechanischen Systems zwischen festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten ist jene Kurve realisiert, für die die Wirkung stationär ist. In vielen Fällen sind die stationären Punkte Minima der Wirkung.

Symmetrien der Lagrange-Funktion führen auf Erhaltungsgrößen (Noether-Theorem). Wenn \mathcal{L} nicht *explizit* vom Kurvenparameter abhängt, sondern nur in

der Form $\mathcal{L}(c(t), c'(t))$, dann führt diese Translationssymmetrie auf den *Energieerhaltungssatz*

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0; \quad E(t) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(c(t), c'(t)) \right) \circ c'(t) - \mathcal{L}(c(t), c'(t))$$

für die Kurve, in der die Wirkung stationär ist:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(c(t), c'(t)) \right) \circ c'(t) \right\} \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(c(t), c'(t)) \right) \circ c'(t) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(c(t), c'(t)) \right) \circ c''(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{L}(c(t), c'(t)). \end{aligned}$$

Beispiel 7.4 (Brachistochrone, Johann Bernoulli 1696) Die Brachistochrone ist jene Kurve $c(t) = (x(t), z(t))$ in der x - z -Ebene zwischen den festgehaltenen Punkten $(0, h)$ und $(a, 0)$, mit $h, a > 0$, die ein darauf reibungsfrei unter dem Einfluß der Gravitationskraft gleitender Massepunkt in kürzester Zeit durchläuft, wobei der Massepunkt in $(0, h)$ ruht. Die zeitunabhängige Lagrange-Funktion (e_z ist der Einheitsvektor in z -Richtung)

$$\mathcal{L}(c(t), c'(t)) = \frac{m}{2} \langle c'(t), c'(t) \rangle - mg \langle c(t), e_z \rangle$$

führt auf den Energieerhaltungssatz

$$\frac{m}{2} \langle c'(t), c'(t) \rangle + mg \langle c(t), e_z \rangle = mgh = \text{const.}$$

Wir können $x' > 0$ annehmen, so daß wir die Spur der Kurve nach dem Kurvenparameter auflösen können: $z(t) = z(x(t))$. Dann gilt nach Kettenregel

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{m}{2} (x'(t))^2 \left(1 + \left(\frac{dz(x)}{dx} \right)^2 \right) + mgz(x) \\ \Rightarrow \quad \frac{dt(x)}{dx} &= \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{d(h-z(x))}{dx} \right)^2}{2g(h-z(x))}}. \end{aligned}$$

Somit gilt für die Gesamtzeit T , in der der Massepunkt die Kurve durchläuft,

$$T = \int_0^a dx \left(\frac{dt(x)}{dx} \right) = \int_0^a dx \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2}{2gy(x)}}, \quad y(x) = h - z(x).$$

Damit ist nach Identifikation von x mit einem neuen Kurvenparameter die Bestimmung der schnellsten Kurve $y(x)$ äquivalent zur Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung für die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(y(x), y'(x)) = \sqrt{\frac{1 + \langle y'(x), y'(x) \rangle}{y(x)}}, \quad y : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Da die neue Lagrange-Funktion zeitunabhängig ist, gilt wieder der Energieerhaltungssatz

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\langle y'(x), y'(x) \rangle}{\sqrt{y(x)}\sqrt{1 + \langle y'(x), y'(x) \rangle}} - \sqrt{\frac{1 + \langle y'(x), y'(x) \rangle}{y(x)}} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{y(x)}\sqrt{1 + \langle y'(x), y'(x) \rangle}}, \\
 \Rightarrow \quad (y')^2 - \frac{1}{E^2 y} &= -1
 \end{aligned}$$

für die Kurve, für die die Wirkung stationär wird. Solche Differentialgleichungen betrachten wir im nächsten Kapitel. Wir beschränken uns hier auf Angabe der Lösung in Parameterform:

$$y(\tau) = \frac{1}{2E^2}(1 - \cos \tau), \quad x(\tau) = \frac{1}{2E^2}(\tau - \sin \tau).$$

Dann ist nach Kettenregel

$$y'(x) = \frac{\frac{dy}{d\tau}}{\frac{dx}{d\tau}} = \frac{\sin \tau}{1 - \cos \tau} \quad \Rightarrow \quad (y')^2 - \frac{1}{E^2 y} = \frac{\sin^2 \tau - 2(1 - \cos \tau)}{(1 - \cos \tau)^2} = -1.$$

Somit ist die Brachistochrone in Parameterform gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = \frac{1}{2E^2} \begin{pmatrix} \tau \\ 2E^2 h - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2E^2} \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um die Spiegelung der Kurve des Randpunktes eines rollendes Rades vom Radius $R = \frac{1}{2E^2}$. ◁

Wiederholung

- Differenzierbarkeit, Differential, Jacobi-Matrix. Beziehungen zu partieller Ableitung, Richtungsableitung, Stetigkeit
- Kettenregel
- differenzierbare Kurve, reguläre Kurve, Ableitung entlang Kurve, Bogenlänge
- Definition von Vektorfeldern, Gradient, Divergenz
- mehrdimensionale Taylorsche Formel, Extremwertdiskussion über Gradient und Hessesche Matrix
- Banachscher Fixpunktsatz, Satz über implizite Funktionen
- Untermannigfaltigkeiten definiert über Nebenbedingungen sowie über Kartenabbildungen (d.h. lokales Koordinatensystem)

- Tangentialraum und Normalenvektorraum. Extrema mit Nebenbedingungen
- Euler-Lagrange-Gleichungen, Energieerhaltungssatz

Teil II

Gewöhnliche Differentialgleichungen

8 Definition und Interpretation

Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung zwischen einer Funktion $x(t)$, ihren Ableitungen $x', x'', \dots, x^{(n)}$ und der Variablen t , genauer:

Definition 8.1 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $G \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ eine Teilmenge mit $n \geq 1$ und $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion, so daß für $t \in I$ gilt $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in G$. Die Funktion x erfüllt eine *gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung*, wenn es eine Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I .$$

Läßt sich diese Gleichung nach $x^{(n)}(t)$ auflösen zu

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) , \quad (*)$$

dann heißt die Differentialgleichung *explizit*.

Eine explizite Differentialgleichung n -ter Ordnung (*) läßt sich identifizieren mit einer Differentialgleichung erster Ordnung für eine Bahnkurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Setzt man

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} ,$$

so ergibt die Ableitung unter Verwendung von (*) das äquivalente *System von Differentialgleichungen 1. Ordnung*

$$c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \end{pmatrix} =: v(t, c(t)) .$$

Dieses können wir als Differentialgleichung $c'(t) = v(t, c(t))$ einer Bahnkurve interpretieren. Solche Bewegungsgleichungen entstehen z.B. aus den Euler-Lagrange-Gleichungen nach Übergang in die Hamiltonsche Formulierung (Legendre-Transformation).

Ist allgemeiner $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $v : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein *zeitabhängiges Vektorfeld*, dann definiert die Differentialgleichung $c'(t) = v(t, c(t))$

zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ eine *Schar von Kurven* durch jeden Punkt $y \in U$ derart, daß der Tangentialvektor $c'(t)$ im Punkt $y = c(t)$ gegeben ist durch den Vektor $v(t, y)$. Diese Kurvenschar heißt die *Integralkurve* des Vektorfeldes. Anschaulich interpretiert man die Integralkurven als Stromlinien des Feldes v . Zur Bestimmung einer konkreten Integralkurven ist der Startpunkt $y_0 = y(t_0)$ vorzugeben. Wir werden sehen, daß dann unter geeigneten Stetigkeitsbedingungen an das Vektorfeld die Integralkurve in einer offenen Umgebung des Startpunktes eindeutig bestimmt ist. Andere Startpunkte liefern entweder verschiedene Kurven oder setzen eine bisherige Kurve fort, so daß U schließlich durch eine Schar von Kurven überdeckt wird.

9 Elementare Lösungsmethoden

Wir beginnen mit einigen einfachen Klassen gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Definition 9.1 (DGL 1. Ordnung mit getrennten Variablen) Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Dann heißt

$$x'(t) = f(t)g(x(t))$$

Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Satz 9.2 Zu gegebenem Anfangspunkt $(t_0, x_0) \in I \times J$ definieren wir Funktionen $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(t) := \int_{t_0}^t ds f(s), \quad G(x) := \int_{x_0}^x \frac{dy}{g(y)}.$$

Ist $I' \subseteq I$ ein offenes Intervall mit $F(I') \subseteq G(J)$, dann gibt es genau eine Lösung $x : I' \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $x'(t) = f(t)g(x(t))$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Diese Lösung erfüllt die Gleichung

$$G(x(t)) = F(t) \quad \text{für alle } t \in I'.$$

Beweis. i) Wir nehmen die Gültigkeit von $G(x(t)) = F(t)$ an. Wegen $G'(x) = \frac{1}{g(x)} \neq 0$ für alle $x \in J$ ist G streng monoton (und stetig differenzierbar), so daß nach dem Satz über implizite Funktionen eine eindeutige stetig differenzierbare Umkehrfunktion $G^{-1} : G(J) \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall $G(J)$ existiert.

ii) Nach dem Satz über implizite Funktionen ist $H := G^{-1} \circ F : I' \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$H'(t) = (G^{-1})'(F(t)) \cdot F'(t) = \frac{1}{G'(G^{-1}(F(t)))} \cdot F'(t) = g(H(t)) \cdot f(t),$$

d.h. H erfüllt die Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $H(t_0) = G^{-1}(F(t_0)) = G^{-1}(0) = x_0$. Also existiert eine Lösung.

iii) Sei $x(t)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = f(t)g(x(t))$ mit $x(t_0) = x_0$. Wir setzen $t \mapsto s$ und integrieren über s von t_0 nach t :

$$\int_{t_0}^t ds \frac{x'(s)}{g(x(s))} = \int_{t_0}^t ds f(s).$$

Nach Substitution $y = x(s)$ ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{t_0}^t ds f(s).$$

Damit erfüllt *jede* Lösung von $x'(t) = f(t)g(x(t))$ mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ die Gleichung $G(x(t)) = F(t)$. Nach dem Satz über implizite Funktionen besitzt $G(x(t)) = F(t)$ in einer Umgebung von t_0 genau eine Lösung $x(t)$. \square

Zu beachten ist, daß die Umkehrfunktion G^{-1} im allgemeinen nicht durch elementare Funktionen auszudrücken ist.

Beispiel 9.3 Wir betrachten die Differentialgleichung $x'(t) = e^{x(t)} \sin t$ zu beliebigem Anfangspunkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist $F(t) = \cos t_0 - \cos t$ und $G(x) = e^{-x_0} - e^{-x}$, also

$$e^{-x(t)} = \cos t - \cos t_0 + e^{-x_0}.$$

Wegen $e^{-x_0} > 0$ gibt es ein offenes Intervall $I' \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I'$, so daß $\cos t - \cos t_0 + e^{-x_0} > 0$ für alle $t \in I'$. Dann ergibt sich die Lösung zu

$$x(t) = -\ln(\cos t - \cos t_0 + e^{-x_0})$$

für alle $t \in I'$. \triangleleft

Definition 9.4 (lineare Differentialgleichung 1. Ordnung) Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ und $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

eine *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*. Diese heißt für $b = 0$ *homogen*, sonst *inhomogen*.

Satz 9.5 *Es sei $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $x'(t) = a(t)x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$, nämlich*

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t ds a(s)\right).$$

Beweis. Es handelt sich um einen Spezialfall einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen. \square

Der inhomogene Fall wird durch *Variation der Konstanten* gelöst. Darunter versteht man den Ansatz $x(t) = \tilde{x}(t)u(t)$, wobei $\tilde{x}(t)$ die homogene Gleichung $\tilde{x}'(t) = a(t)\tilde{x}(t)$ mit $\tilde{x}(t_0) = 1$ löst. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} x'(t) &= \tilde{x}'(t)u(t) + \tilde{x}(t)u'(t) = (a(t)u(t) + u'(t))\tilde{x}(t) \\ &= a(t)u(t)\tilde{x}(t) + b(t), \end{aligned}$$

also $u'(t)\tilde{x}(t) = b(t)$ mit Anfangsbedingung $u(t_0) = x_0$. Das ist wieder eine spezielle Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit der eindeutigen Lösung

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds \frac{b(s)}{\tilde{x}(s)}.$$

Somit ist bewiesen:

Satz 9.6 (Variation der Konstanten) *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sowie $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $x'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$, nämlich*

$$x(t) = \tilde{x}(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t ds \frac{b(s)}{\tilde{x}(s)} \right) \quad \text{mit} \quad \tilde{x}(s) = \exp \left(\int_{t_0}^s dr a(r) \right).$$

Beispiel 9.7 Betrachtet werde die Differentialgleichung $x'(t) = 2tx(t) + t$ mit $x(0) = c$. Dann hat die homogene Gleichung $\tilde{x}'(t) = 2t\tilde{x}(t)$ mit $\tilde{x}(0) = 1$ die Lösung

$$\tilde{x}(t) = \exp \left(\int_0^t ds 2s \right) = e^{t^2}.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{t^2} \left(c + \int_0^t ds se^{-s^2} \right) = e^{t^2} \left(c + \frac{1}{2} (1 - e^{-t^2}) \right) \\ &= \frac{2c+1}{2} e^{t^2} - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Beispiel 9.8 (Freier Fall mit Reibung) Der freie Fall eines Massenpunktes (in x - z -Ebene) wird bei geschwindigkeitsproportionaler Reibungskraft beschrieben durch die Differentialgleichungen

$$mz''(t) = -mg - rz'(t), \quad mx''(t) = -rx'(t).$$

Als Anfangsbedingung sei $z'(0) = v_z$ und $x'(0) = v_x$ gegeben. Damit ergeben sich die Geschwindigkeiten zu

$$\begin{aligned}x'(t) &= v_x \exp\left(\int_0^t ds \left(-\frac{r}{m}\right)\right) = v_x e^{-\frac{r}{m}t}, \\z'(t) &= e^{-\frac{r}{m}t}\left(v_z - \int_0^t ds g e^{\frac{r}{m}s}\right) = v_z e^{-\frac{r}{m}t} - \frac{mg}{r}(1 - e^{-\frac{r}{m}t}),\end{aligned}$$

Für $t \rightarrow \infty$ fällt der Massenpunkt also mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{mg}{r}$ in negative z -Richtung. Die Anfangsgeschwindigkeiten sind exponentiell gedämpft.

Beide Lösungen sind selbst Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. Sind die Anfangsbedingungen $z(0) = h$ und $x(0) = 0$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t ds v_x e^{-\frac{r}{m}s} = \frac{v_x m}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right), \\z(t) &= h + \int_0^t ds \left(v_z e^{-\frac{r}{m}s} - \frac{mg}{r}(1 - e^{-\frac{r}{m}s})\right) \\&= h + \frac{v_z m}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right) - \frac{mg}{r} \left(t - \frac{m}{r}(1 - e^{-\frac{r}{m}t})\right).\end{aligned}\quad \triangleleft$$

Manchmal findet man Substitutionen, durch die zunächst kompliziertere Differentialgleichungen auf obige Situationen zurückgeführt werden:

Beispiel 9.9 (Bernoullische Differentialgleichung) Die Bernoullische Differentialgleichung lautet

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)(y(t))^\alpha, \quad \alpha \neq 0, 1.$$

Zu unterscheiden ist $\alpha \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} > 0$. Für $\alpha > 0$ gibt es zumindest die triviale Lösung $y = 0$. Für $(\alpha < 0, \alpha \notin \mathbb{Z})$ ist nur $y(t) > 0$ sinnvoll.

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $y(t_0) > 0$. Wir substituieren $x(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ und erhalten nach Kettenregel in einer Umgebung von $(x(t_0), t_0)$

$$x'(t) = (1 - \alpha)(y(t))^{-\alpha} y'(t) = (1 - \alpha) \left(a(t)x(t) + b(t)\right).\quad \triangleleft$$

Viele Probleme der Physik führen auf Differentialgleichungen 2. Ordnung. Das typische Beispiel ist das Newtonsche Gesetz für die eindimensionale Bewegung der Mechanik $x'' = f(x, x')$, dabei ist f die durch die Masse dividierte Kraft. Die übliche Anfangsbedingung ist die Vorgabe von Ort und Geschwindigkeit zur Zeit t_0 , d.h. $x(t_0) = x_0$ und $x'(t_0) = v_0$. Diese Differentialgleichung läßt sich in ein System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung überführen und dann mit den vorzustellenden Methoden lösen. Ist die Kraft $f(y)$ unabhängig von der Geschwindigkeit, aber z.B. nichtlinear, dann bietet sich noch ein anderer Weg an: Wir werden zeigen, daß das Potential

$$U(x) := - \int_{x_0}^x ds f(s)$$

unabhängig vom Integrationsweg definiert ist und $\frac{dU}{dx}(x) = -f(x)$ erfüllt. Durch Skalarprodukt des Newtonschen Gesetzes mit der Geschwindigkeit x' ergibt sich dann

$$0 = x''x' + \frac{dU}{dx}x' = \left(\frac{1}{2}x'^2 + U(x)\right)'.$$

Die Lösung ist der Energieerhaltungssatz $\frac{1}{2}x'^2 + U(x) = E = \frac{1}{2}v_0^2 + U(y_0) = \text{const.}$ Das ist nun eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit der Lösung

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{2(E - U(s))}} =: T(x).$$

Der Ort selbst bestimmt sich dann durch die Umkehrfunktion zu $x(t) = T^{-1}(t - t_0)$.

Beispiel 9.10 Die Differentialgleichung des mathematischen Pendels ist $x'' = -\omega^2 \sin x$. Dabei ist x der Auslenkungswinkel und $\omega^2 = \frac{g}{L}$, mit g der Schwerebeschleunigung und L der Fadenlänge. Für kleine Winkel ist $\sin x \approx x$, und es wird die einfachere lineare Schwingungsdifferentialgleichung erhalten. Wir stellen aber nicht die Bedingung kleiner Winkel. Das Potential ergibt sich zu

$$U(x) = - \int_0^x ds (-\omega^2 \sin s) = \omega^2(1 - \cos x) = 2\omega^2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Dieses entspricht der Gesamtenergie im maximalen Auslenkungswinkel $a = x(0)$, so daß sich folgende Lösung ergibt:

$$t = \frac{1}{2\omega} \int_x^a \frac{ds}{\sqrt{\sin^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{s}{2}}}$$

Es interessiert die Zeit $\frac{T}{2}$ einer halben Schwingung zum anderen Umkehrpunkt $x = -a$. Wir substituieren $\sin \frac{s}{2} = \sin \frac{a}{2} \sin u$, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos \frac{s}{2} ds &= \sin \frac{a}{2} \cos u du \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{s}{2}} ds = \sin \frac{a}{2} \sqrt{1 - \sin^2 u} du \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 u} ds = \sqrt{\sin^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{s}{2}} du. \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 u}} = \frac{2}{\omega} K(\sin \frac{a}{2}),$$

wobei $K(x) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 u}}$ ein elliptisches Integral ist. In Beispiel (34.5 aus dem 2. Semester hatten wir

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right)^2 \sin^{2n} \frac{a}{2} \right)$$

gezeigt. Insbesondere ist $\lim_{a \rightarrow 0} T = \frac{2\pi}{\omega}$. ◁

10 Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Wir betrachten im weiteren die Differentialgleichung $x'(t) = v(t, x(t))$ mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Genauer sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, gesucht ist eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $x'(t) = v(t, x(t))$, so daß $(t, x(t)) \in G$ für alle $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Meist sucht man Lösungen mit vorgegebener Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Diese Problemstellung heißt *System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung*.

Wir lösen das System von Differentialgleichungen durch Zurückführen auf eine *Integralgleichung*.

Satz 10.1 *Es sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung sowie $(t_0, x_0) \in G$. Dann gilt: Eine stetige Abbildung $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eines Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und $(t, x(t)) \in G$ für alle $t \in I$ löst genau dann die Differentialgleichung $x'(t) = v(t, x(t))$ zur Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$, wenn folgende Integralgleichung gilt:*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds v(s, x(s)) \quad \text{für alle } t \in I .$$

Beweis. (\Leftarrow) Für $t = t_0$ folgt $x(t_0) = x_0$. Wegen der Stetigkeit von x und v ist auch die Abbildung $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(s) := v(s, x(s))$ stetig auf I . Damit gilt nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t ds v(s, x(s)) = v(t, x(t)) ,$$

d.h. x ist sogar differenzierbar mit $x'(t) = v(t, x(t))$.

(\Rightarrow) Es gilt

$$\int_{t_0}^t ds v(s, x(s)) = \int_{t_0}^t ds x'(s) = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0 ,$$

d.h. die Integralgleichung ist erfüllt. □

Es wird sich zeigen, daß Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bewiesen werden kann, wenn die Funktion f einer *Lipschitz-Bedingung* genügt.

Definition 10.2 Sei $(t, x) \in G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ genügt einer *Lipschitz-Bedingung* (bezüglich der Variablen x), wenn es ein $L \geq 0$ gibt, so daß

$$\|v(t, x) - v(t, \tilde{x})\| \leq L \|x - \tilde{x}\| \quad \text{für alle } (t, x), (t, \tilde{x}) \in G .$$

Die Funktion v genügt einer *lokalen Lipschitz-Bedingung*, wenn jeder Punkt $(t_0, x_0) \in G$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ besitzt, so daß v in $G \cap U$ einer Lipschitz-Bedingung mit möglicherweise von U abhängiger Lipschitz-Konstanten $L(U)$ genügt.

Hinreichend ist stetige Differenzierbarkeit:

Satz 10.3 Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar in den letzten n Koordinatenrichtungen x_1, \dots, x_n . Dann genügt f in G lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Beweis. Wegen der Offenheit von G gibt es zu beliebigem $(t_0, x_0) \in G$ ein $r > 0$, so daß

$$V := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq r, \|x - x_0\| \leq r\} \subseteq G.$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Schrankensatz 1.16 für V , und die Lipschitz-Konstante ist $L := \sup_{(t,x) \in V} \|(Dv)(t, x)\|$. \square

Satz 10.4 (Eindeutigkeitsatz) Es sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Sind x, \tilde{x} zwei Lösungen derselben Differentialgleichung $x'(t) = v(t, x(t))$ und $\tilde{x}'(t) = v(t, \tilde{x}(t))$ über einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, und in einem Punkt $t_0 \in I$ gelte $x(t_0) = \tilde{x}(t_0)$, so folgt

$$x(t) = \tilde{x}(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit wird stückweise vom Punkt t_0 aus ausgedehnt.

i) Sei dazu $x(a) = \tilde{x}(a)$ für ein $a \in I$. Dann gilt für alle $t \in I$ die Integralgleichung

$$x(t) - \tilde{x}(t) = \int_a^t ds (v(s, x(s)) - v(s, \tilde{x}(s))).$$

Da v lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, gibt es reelle Zahlen $L \geq 0$ und $\delta > 0$, so daß

$$\|v(s, x(s)) - v(s, \tilde{x}(s))\| \leq L\|x(s) - \tilde{x}(s)\| \quad \text{für alle } s \in I \cap K_\delta(a).$$

Wie üblich ist $K_\delta(a) := \{t \in \mathbb{R} : |t - a| < \delta\}$. Sei nun $\epsilon := \min(\delta, \frac{1}{2L})$ und

$$M := \sup_{s \in I \cap K_\epsilon(a)} \|x(s) - \tilde{x}(s)\|.$$

Dann folgt für alle $t \in I \cap K_\epsilon(a)$

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq L \left| \int_a^t ds \|x(s) - \tilde{x}(s)\| \right| \leq LM\epsilon \leq \frac{M}{2}.$$

Das bedeutet $M = \sup_{t \in I \cap K_\epsilon} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \frac{M}{2}$ und damit $M = 0$, d.h. die Funktionen x, \tilde{x} stimmen sogar auf $I \cap K_\epsilon(a)$ überein.

ii) Wir zeigen nun $x(t) = \tilde{x}(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$. Dazu sei

$$t_1 := \sup \{s \in I : x(s) = \tilde{x}(s)\}.$$

Für $t_1 = +\infty$ oder t_1 gleich dem Intervallende ist nichts mehr zu zeigen. Ansonsten gibt es ein $\delta > 0$ mit $]t_1, t_1 + \delta[\subseteq I$. Da x, \tilde{x} als Lösungen der Differentialgleichung insbesondere stetig sind, gilt $x(t_1) = \tilde{x}(t_1)$. Dann aber gibt es nach i) ein $\epsilon > 0$, so daß $x(t) = \tilde{x}(t)$ für alle $x \in I \cap K_\epsilon(t_1)$, im Widerspruch zur Definition von t_1 . Analog wird der Fall $t \leq t_0$ behandelt. \square

Satz 10.5 (Picard-Lindelöf) Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $v : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem $(t_0, x_0) \in G$ ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung $x : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $x'(t) = v(t, x(t))$ mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Nach Satz 10.4 ist diese Lösung eindeutig.

Beweis. Der Beweis verwendet den Banachschen Fixpunktsatz für die zugehörige Integralgleichung auf dem Banach-Raum $\mathcal{C}([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ der stetigen Abbildungen $\phi : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Supremumsnorm

$$\|\phi\|_{\text{sup}} := \sup_{t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]} \|\phi(t)\| .$$

Gewählt sei ein Quader

$$Q_{\delta, r} := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq \delta, \|x - x_0\| \leq r\}$$

mit $\delta, r > 0$, so daß die Abbildung v in $Q_{\delta, r}$ einer Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten L genügt. Da v stetig und $Q_{\delta, r}$ kompakt ist, gibt es eine reelle Zahl $M > 0$, so daß $\|v(t, x)\| \leq M$ für alle $(t, x) \in Q_{\delta, r}$. Mit diesen Daten sei $\epsilon := \min(\delta, \frac{r}{M}, \frac{1}{2L})$. Wir betrachten die abgeschlossene Teilmenge

$$A := \{\phi \in \mathcal{C}([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \mathbb{R}^n), \|\phi - x_0\|_{\text{sup}} \leq r\}$$

des Banachraums. Wir zeigen, daß

$$(T(\phi))(t) := x_0 + \int_{t_0}^t ds v(s, \phi(s))$$

eine Kontraktion $T : A \rightarrow A$ definiert.

i) Zunächst ist $T(\phi) \in A$ zu zeigen für alle $\phi \in A$. Nach Konstruktion ist

$$(s, \phi(s)) \in Q_{\delta, r} \subseteq G \quad \text{für alle } s \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] .$$

Damit ist v sinnvoll erklärt und stetig in s . Es gilt

$$\|(T(\phi))(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t ds v(s, \phi(s)) \right\| \leq |t - t_0| M \leq \epsilon M \leq r ,$$

also $T(\phi) \in A$.

ii) Seien $\phi_1, \phi_2 \in A$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|(T(\phi_1) - T(\phi_2))(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t ds (v(s, \phi_1(s)) - v(s, \phi_2(s))) \right\| \\ &\leq |t - t_0| L \sup_{s \in [t_0, t]} \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\| \leq \frac{1}{2} \|\phi_1 - \phi_2\|_{\text{sup}} . \end{aligned}$$

Also ist $T : A \rightarrow A$ eine Kontraktion auf einer abgeschlossenen Teilmenge eines Banachraums. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es damit einen Fixpunkt $x \in A$ mit $T(x) = x$, also

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ds v(s, x(s)) ,$$

d.h. eine (eindeutige) Lösung der Differentialgleichung. □

Es sei betont, daß die Größe des Intervalls 2ϵ durch die Lipschitz-Bedingung an v und die Norm $\|v\|$ bestimmt ist. Wenn $\|v(t, x)\|$ mit x also anwächst, wird die Fortsetzbarkeit der Lösung immer kleiner.

Beispiel 10.6 Betrachtet werde die Differentialgleichung $x'(t) = 2t(x(t))^2$. Die Funktion $v(t, x) = 2tx^2$ ist auf ganz \mathbb{R}^2 nach x partiell differenzierbar, genügt also auf ganz \mathbb{R}^2 einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Die eindeutige Lösung zu $x(0) = 0$ ist offenbar $x = 0$. Sei dann $x(0) = \frac{1}{C} > 0$, so daß die Methode der Trennung der Variablen anwendbar ist. Es gilt

$$G(x(t)) = F(t) , \quad G(x(t)) = \int_{\frac{1}{C}}^{x(t)} dy \frac{1}{y^2} = C - \frac{1}{x(t)} , \quad F(t) = \int_0^t ds 2s = t^2 ,$$

d.h. $x(t) = \frac{1}{C-t^2}$. Die Lösung läßt sich also nur bis zu $]-\sqrt{C}, \sqrt{C}[$ fortsetzen. Im umgekehrten Fall $x(0) = -\frac{1}{C} < 0$ ergibt sich $x(t) = -\frac{1}{C+t^2}$, so daß die Lösung auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden kann. ◁

Ohne Beweis erwähnen wir, daß die *Existenz* einer Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = v(t, x(t))$ bereits durch die *Stetigkeit* von v garantiert ist:

Satz 10.7 (Peano) *Es sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und*

$$Q_{\delta, r} := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq \delta , \|x - x_0\| \leq r\}$$

für $\delta, r > 0$. Die Funktion $v : Q_{\delta, r} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig (also beschränkt) mit $M := \max_{(t, x) \in Q_{\delta, r}} \|v(t, x)\|$. Dann gibt es mindestens eine Lösung $x : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $x'(t) = v(t, x(t))$ mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$, wobei $\epsilon := \min(\delta, \frac{r}{M})$ ist (mit $\epsilon := \delta$ für $M = 0$).

Der Beweis ohne die Lipschitz-Bedingung ist aber aufwendiger und wird deshalb weggelassen.

Beispiel 10.8 Betrachtet werde die Differentialgleichung $x' = (x^2)^{\frac{1}{3}}$ mit $x(0) = 0$. Die Funktion $v(t, x) = (x^2)^{\frac{1}{3}}$ ist stetig auf ganz \mathbb{R}^2 , aber nicht stetig partiell differenzierbar in $x = 0$, und tatsächlich genügt v in keiner Umgebung von $(0, 0)$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Nach dem Existenzsatz von Peano gibt es lokal eine Lösung der Differentialgleichung, z.B. $x(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das ist aber nicht die einzige Lösung. Durch Trennen der Variablen findet man, daß $x_c(t) := \frac{1}{27}(t-c)^3$ die Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $x(c) = 0$ erfüllt. Durch Verkleben mit der Nulllösung konstruieren wir zu $c, c' \geq 0$ die Lösung

$$x_{cc'}(t) := \begin{cases} \frac{1}{27}(t-c)^3 & \text{für } t \geq c \geq 0 \\ 0 & \text{für } -c' \leq t \leq c \\ \frac{1}{27}(t+c')^3 & \text{für } t \leq -c' \leq 0 \end{cases}$$

Man rechnet nach, daß $x_{cc'}$ tatsächlich stetig differenzierbar ist. ◁

Das Verfahren von Picard-Lindelöf über den Banachschen Fixpunktsatz ist konstruktiv und kann deshalb leicht numerisch implementiert werden.

Beispiel 10.9 Gegeben sei die Differentialgleichung $x'(t) = 2tx(t)$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. In einer gewissen Umgebung $[-\epsilon, \epsilon]$ von 0 konvergiert deshalb die Folge $(x_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen mit $x_0(t) = y_0$ und

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t ds v(s, x_k(s))$$

gegen die eindeutige Lösung. Wir finden

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + \int_0^t ds 2sx_0 = x_0(1 + t^2) \\ x_2(t) &= x_0 + \int_0^t ds 2sx_0(1 + s^2) = x_0 \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2} \right) \\ x_k(t) &= y_0 \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \dots + \frac{t^{2k}}{k!} \right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lösung $x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x_0 e^{t^2}$, was man natürlich auch mit elementaren Methoden finden kann. ◁

11 Lineare Differentialgleichungen

Wir spezifizieren nun den Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf Systeme linearer Differentialgleichungen $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$. Dabei ist $A(t)$ eine Matrix und $b(t)$ ein Vektor. Im Hinblick auf die Diagonalisierbarkeit von A erweist es sich als nützlich, mit komplexen Matrizen zu arbeiten. Sei dazu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Variable t bleibt aber reell.

Definition 11.1 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A = (a_{ij}) : I \rightarrow M(n, \mathbb{K})$ eine stetige Abbildung und $b = (b_1, \dots, b_n)^t : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion. Dann heißt $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ ein *inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem* und $x'(t) = A(t)x(t)$ ein (bzw. das zugehörige) *homogene(s) lineare(s) Differentialgleichungssystem*.

Gesucht sind Lösungen $x : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, wobei für $\mathbb{K} = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ die Differenzierbarkeit komponentenweise betrachtet wird.

Satz 11.2 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A = (a_{ij}) : I \rightarrow M(n, \mathbb{K})$ eine stetige Abbildung und $b = (b_1, \dots, b_n)^t : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion. Dann gibt es zu jedem $t_0 \in I$ und jedem $x_0 \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der linearen Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$.*

Beweis. Für jedes kompakte Intervall $J \subseteq I$ ist die durch $v(t, x) = A(t)x + b(t)$ definierte Abbildung $v : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten $L = \sup_{t \in J} \|A(t)\|_{op}$. Damit folgt Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nach Picard-Lindelöf. Insbesondere konvergiert die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{k+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t ds v(s, x_k(s)), \quad x(t_0) = x_0,$$

auf J gleichmäßig gegen die Lösung x . □

Ähnlich wie in der linearen Algebra bilden die Lösungen der homogenen Differentialgleichung, *wenn man keine Anfangsbedingung stellt*, einen Vektorraum:

Satz 11.3 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (nicht-triviales) Intervall und $A : I \rightarrow M(n, \mathbb{K})$ stetig. Dann bildet die Menge V_A aller Lösungen der homogenen Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ einen n -dimensionalen Vektorraum über \mathbb{K} .*

Ein n -Tupel von Lösungen $x_{(1)}, \dots, x_{(n)} \in V_A$ bildet genau dann eine Basis von V_A , wenn die Vektoren $x_{(1)}(t), \dots, x_{(n)}(t) \in \mathbb{K}^n$ für wenigstens ein $t \in I$, und damit für jedes $t \in I$, eine Basis von \mathbb{K}^n bilden.

Beweis. Klar ist, daß V_A ein Untervektorraum des (unendlich-dimensionalen) Vektorraums $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ ist, denn

$$\begin{aligned} (\lambda_1 x_{(1)} + \lambda_2 x_{(2)})' &= \lambda_1 x_{(1)}' + \lambda_2 x_{(2)}' = \lambda_1 (A(t)x_{(1)}) + \lambda_2 (A(t)x_{(2)}) \\ &= A(t) \cdot (\lambda_1 x_{(1)} + \lambda_2 x_{(2)}) . \end{aligned}$$

Sei $x \in V_A$ und $t_0 \in I$ beliebig, dann definiert $V_A \ni x \mapsto F_{t_0}(x) := x(t_0) \in \mathbb{K}^n$ eine lineare Abbildung $F_{t_0} : V_A \rightarrow \mathbb{K}^n$. Diese lineare Abbildung ist surjektiv, denn zu jedem $x_0 \in \mathbb{K}^n$ gibt es ein $x \in V_A$ mit $x(t_0) = x_0$. Außerdem ist F_{t_0} wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems injektiv. Nach dem

Dimensionsatz für Vektorräume gilt dann $\dim(V_A) = n$. Da der Anfangspunkt $t_0 \in I$ beliebig ist, ist F_{t_0} für alle $t_0 \in I$ ein Isomorphismus, überführt also Basen wieder in Basen. \square

Definition 11.4 Unter einem *Lösungs-Fundamentalsystem* der Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ versteht man eine Basis $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ des Vektorraums V_A der Lösungen von $x'(t) = A(t)x(t)$.

Schreibt man das Lösungs-Fundamentalsystem als Matrix $\Phi = (x_{ij})$, mit $x_{ij} := x_{(j)}(t_i)$ (die j -te Spalte von Φ ist $x_{(j)}$), dann gilt offenbar $\det \Phi(t_0) \neq 0$ für wenigstens einen (und damit für jeden) Punkt $t_0 \in I$. Eine beliebige Lösung schreibt sich damit als $x(t) = \Phi(t) \cdot \lambda$ mit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t \in \mathbb{K}^n$. Dann folgt in Matrix-Schreibweise die Differentialgleichung $\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$. Aus dieser ergibt sich folgende nützliche Beziehung:

Lemma 11.5 $\frac{d}{dt}(\det \Phi)(t) = \text{Spur}(A(t)) \det \Phi(t)$

Beweis. Für $B \in GL(n, \mathbb{K})$ und $A \in M(n, \mathbb{K})$ gilt $\det(B + A) = \det B \det(E_n + AB^{-1}) = \det B + (D \det)(B) \circ A + o(\|A\|)$. Nach der Formel von Leibniz gilt

$$\begin{aligned} \det(E_n + AB^{-1}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n (\delta_{i\sigma(i)} + (AB^{-1})_{i\sigma(i)}) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \left\{ \left(\prod_{i=1}^n \delta_{i\sigma(i)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^{k-1} \delta_{i\sigma(i)} \right) (AB^{-1})_{k\sigma(k)} \left(\prod_{i=k+1}^n \delta_{i\sigma(i)} \right) + o(\|A\|) \right\} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (AB^{-1})_{kk} + o(\|A\|) = 1 + \text{Spur}(AB^{-1}) + o(\|A\|), \end{aligned}$$

da die Fixierung der anderen Permutationen $\sigma(i) = i$ für $i \neq k$ für die verbleibende Permutation $\sigma(k) = k$ erzwingt. Somit gilt $(D \det)(B) \circ A = \det B \text{Spur}(AB^{-1})$, und die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det \Phi)(t) &= (D \det)(\Phi(t)) \circ \Phi'(t) = (D \det)(\Phi(t)) \circ (A(t)\Phi(t)) \\ &= \det(\Phi(t)) \text{Spur}(A(t)\Phi(t)(\Phi(t))^{-1}) = \det(\Phi(t)) \text{Spur}(A(t)). \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 11.6 Gegeben sei die Schwingungsdifferentialgleichung $z'' + \omega^2 z = 0$. Wir setzen $x_1 := z$ und $x_2 := -\frac{1}{\omega} z'$, was also auf das Differentialgleichungssystem $x'_1 = -\omega x_2$ und $x'_2 = \omega x_1$ führt. In Matrixschreibweise ergibt sich $x' = Ax$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$. Die Lösungstheorie dieses Problems mit konstanten Koeffizienten behandeln wir später. Man bestätigt durch Nachrechnen, daß folgende Funktionen $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ Lösungen der Differentialgleichung sind:

$$x_{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}, \quad x_{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Diese sind in $t_0 = 0$ und damit auf ganz \mathbb{R} linear unabhängig, was man auch durch

$$\det \Phi(t) = \det \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} = 1$$

sieht. Da A spurfrei ist, ist $\det \Phi$ konstant. ◁

Wir charakterisieren nun den Lösungsraum der inhomogenen Differentialgleichung:

Satz 11.7 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (nicht-triviales) Intervall und $A : I \rightarrow M(n, \mathbb{K})$ und $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen. Dann gilt: Die Menge aller Lösungen*

$$L_{A,b} := \{x : I \rightarrow \mathbb{K}^n : x'(t) = A(t)x(t) + b(t)\}$$

der inhomogenen Differentialgleichung ist der affine Raum

$$L_{A,b} = \tilde{x} + V_A,$$

wobei V_A der Vektorraum aller Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ und $\tilde{x} \in L_{A,b}$ eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Mit anderen Worten: die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe aus einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Beweis. i) Sei $x \in L_{A,b}$ eine Lösung von $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$, dann erfüllt $u := x - \tilde{x}$ die homogene Differentialgleichung $u'(t) = A(t)u(t)$. Das bedeutet $u \in V_A$, also $x \in \tilde{x} + V_A$ und damit $L_{A,b} \subseteq \tilde{x} + V_A$.

ii) Sei umgekehrt $x \in \tilde{x} + V_A$ gegeben, also $x = \tilde{x} + u$ mit $u'(t) = A(t)u(t)$. Dann gilt

$$x'(t) = \tilde{x}'(t) + u'(t) = (A(t)\tilde{x}(t) + b(t)) + A(t)u(t) = A(t)x(t) + b(t),$$

also $\tilde{x} + V_A \subseteq L_{A,b}$. □

Die spezielle Lösung \tilde{x} bekommt man wie in den elementaren Lösungsmethoden durch "Variation der Konstanten":

Satz 11.8 (Variation der Konstanten) Sei $\Phi = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) : I \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$. Dann wird eine Lösung \tilde{x} der inhomogenen Differentialgleichung $\tilde{x}' = A(t)\tilde{x}(t) + b(t)$ erhalten durch den Ansatz $\tilde{x}(t) = \Phi(t) \cdot y(t)$, wobei die differenzierbare Abbildung $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der Differentialgleichung $\Phi(t)y'(t) = b(t)$ genügt. Ihre Lösung ist somit

$$y(t) = \int_{t_0}^t ds \Phi^{-1}(s) \cdot b(s) + \text{const.}$$

Beweis. Es gilt

$$\tilde{x}'(t) = \Phi'(t) \cdot y(t) + \Phi(t)y'(t) = A(t) \cdot \Phi(t) \cdot y(t) + \Phi(t)y'(t) \stackrel{!}{=} A(t)\tilde{x}(t) + b(t),$$

also $y'(t) = \Phi^{-1}(t) \cdot b(t)$. Umzuschreiben in eine Integralgleichung ergibt sich die Lösung. \square

Beispiel 11.9 Gegeben sei die Schwingungsdifferentialgleichung mit periodischer äußerer Kraft $z'' + \omega^2 z = b \cos(\Omega t)$. Mit $x_1 := z$ und $x_2 := -\frac{1}{\omega} z'$ ergibt sich $x_1' = -\omega x_2$ und $x_2' = \omega x_1 - \frac{b}{\omega} \cos(\Omega t)$. Die spezielle Lösung ist für $\Omega \neq \pm\omega$ damit

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0}^t ds \begin{pmatrix} \cos \omega s & \sin \omega s \\ -\sin \omega s & \cos \omega s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b}{\omega} \cos \Omega s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{b}{2\omega} \int_{t_0}^t ds \begin{pmatrix} \sin(\omega s + \Omega s) + \sin(\omega s - \Omega s) \\ \cos(\omega s + \Omega s) + \cos(\omega s - \Omega s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} - \frac{b}{2\omega(\omega + \Omega)} \begin{pmatrix} -\cos(\omega t + \Omega t) \\ \sin(\omega t + \Omega t) \end{pmatrix} - \frac{b}{2\omega(\omega - \Omega)} \begin{pmatrix} -\cos(\omega t - \Omega t) \\ \sin(\omega t - \Omega t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} + \frac{b}{\omega(\omega^2 - \Omega^2)} \begin{pmatrix} \omega \cos \omega t \cos \Omega t + \Omega \sin \omega t \sin \Omega t \\ -\omega \sin \omega t \cos \Omega t + \Omega \cos \omega t \sin \Omega t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$x(t) = \Phi(t) \cdot y(t) = \begin{pmatrix} c_1' \cos \omega t - c_2' \sin \omega t \\ c_1' \sin \omega t + c_2' \cos \omega t \end{pmatrix} + \frac{b}{(\omega^2 - \Omega^2)} \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \frac{\Omega}{\omega} \sin \Omega t \end{pmatrix}.$$

Für $\Omega^2 \rightarrow \omega^2$ wird die Amplitude der speziellen Lösung unendlich (Resonanz). Tatsächlich muß das Integral in diesem Fall anders berechnet werden.

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{b}{2\omega} \int_{t_0}^t ds \begin{pmatrix} \sin(2\omega s) \\ \cos(2\omega s) + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} - \frac{b}{4\omega^2} \begin{pmatrix} -\cos(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) + 2\omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x(t) = \Phi(t) \cdot y(t) &= \begin{pmatrix} c'_1 \cos \omega t - c'_2 \sin \omega t \\ c'_1 \sin \omega t + c'_2 \cos \omega t \end{pmatrix} \\ &+ \frac{b}{4\omega^2} \begin{pmatrix} \cos \omega t \cos 2\omega t + \sin \omega t \sin 2\omega t + 2\omega t \sin \omega t \\ \sin \omega t \cos 2\omega t - \cos \omega t \sin 2\omega t - 2\omega t \cos \omega t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c'_1 + \frac{b}{4\omega^2}) \cos \omega t - c'_2 \sin \omega t \\ (c'_1 - \frac{b}{4\omega^2}) \sin \omega t + c'_2 \cos \omega t \end{pmatrix} + \frac{b}{2\omega} \begin{pmatrix} t \sin \omega t \\ -t \cos \omega t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Amplitude wächst also mit der Zeit t an. Wir werden später eine einfachere Berechnungsmethode für diese Differentialgleichung angeben. \triangleleft

Wir übertragen nun die Aussagen zu linearen Differentialgleichungssystemen auf lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung.

Definition 11.10 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $b, a_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen für $k = 0, 1, \dots, n-1$. Dann heißt

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = b(t)$$

eine *lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung*. Sie heißt *homogen* für $b = 0$, sonst *inhomogen*.

Satz 11.11 In den Bezeichnungen von Definition 11.10 gilt:

- i) Die Menge V_a aller Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung ist ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} .
- ii) Die Menge $L_{a,b}$ aller Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung ist der affine Raum $L_{a,b} = \tilde{x} + V_a$, wobei \tilde{x} eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.
- iii) Ein n -Tupel $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ von Lösungen der homogenen Differentialgleichung ist genau dann linear unabhängig, wenn in einem (und damit jedem) Punkt $t \in I$ die "Wronski-Determinante"

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} x_{(1)}(t) & x_{(2)}(t) & \dots & x_{(n)}(t) \\ x'_{(1)}(t) & x'_{(2)}(t) & \dots & x'_{(n)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(1)}^{(n-1)}(t) & x_{(2)}^{(n-1)}(t) & \dots & x_{(n)}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

ungleich Null ist.

Beweis. Alle Aussagen folgen sofort aus der in Abschnitt 8 gegebenen Umschreibung

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

in ein System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung und den dafür bewiesenen Sätzen. Insbesondere ist $W(t) = \det \hat{\Phi}(t)$. \square

Beispiel 11.12 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x''(t) - \frac{1}{2t}x'(t) + \frac{1}{2t^2}x(t) = 1 \quad \text{auf } I := \mathbb{R}_+^\times.$$

Der Ansatz $x = t^\alpha$ führt für die zugehörigen homogene Gleichung auf

$$\left(\alpha(\alpha - 1) - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)t^{\alpha-2} = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)t^{\alpha-2} = 0$$

und damit auf $x_{(1)}(t) = t$ und $x_{(2)}(t) = \sqrt{t}$. Die Wronski-Determinante ist damit

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} t & \sqrt{t} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\sqrt{t} \neq 0,$$

d.h. (t, \sqrt{t}) ist ein Lösungsfundamentalsystem. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, nutzt man, daß für $x = ct^2$ jeder Summand der linken Seite eine Konstante ist. Damit findet man $c = \frac{2}{3}$ in der speziellen Lösung und

$$x(t) = \frac{2}{3}t^2 + c_1t + c_2\sqrt{t}$$

als allgemeine Lösung der Differentialgleichung. \triangleleft

12 Potenzreihenansatz und spezielle Funktionen

Falls die Einträge der Matrix $A(t)$ Polynome in t sind, führt ein Potenzreihenansatz für $x(t)$ auf Rekursionsgleichungen, die manchmal lösbar sind bzw. nützliche Funktionen definieren.

Beispiel 12.1 (Schwingungs-DGL) Gegeben sei die Differentialgleichung $x''(t) + \omega^2x(t) = 0$ mit $\omega \in \mathbb{R}$. Ist $\omega = 0$, so ist $x(t) = at + b$ mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ die allgemeine Lösung. Ansonsten versuchen wir den Potenzreihenansatz

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + \omega^2 a_n \right) t^n = 0.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen führt das auf das System von Gleichungen $(n+2)(n+1)a_{n+2} + \omega^2 a_n = 0$. Gibt man $a_0 = a$ und $a_1 = b$ vor, so findet man

$$a_2 = -\frac{\omega^2}{1 \cdot 2}a, \quad a_4 = -\frac{\omega^2}{3 \cdot 4}a_2 = \frac{\omega^4}{4!}a, \quad a_6 = -\frac{\omega^2}{5 \cdot 6}a_4 = -\frac{\omega^6}{6!}a,$$

allgemein $a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a$ und

$$a_3 = -\frac{\omega^2}{2 \cdot 3} b, \quad a_5 = -\frac{\omega^2}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{\omega^4}{5!} b, \quad a_7 = -\frac{\omega^2}{6 \cdot 7} a_5 = -\frac{\omega^6}{7!} b,$$

allgemein $a_{2n+1} = (-1)^n \frac{\omega^{2n+1}}{(2n+1)!} b$. Wir erkennen die Koeffizienten der Kosinus- und Sinusreihe:

$$x(t) = a \cos(\omega t) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega t).$$

Nach Beispiel 11.6 ist es für zwei linear unabhängige Koeffizientenvektoren $\begin{pmatrix} a_{(1)} \\ b_{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{(2)} \\ b_{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ die allgemeine Lösung. Die zunächst beliebigen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ werden z.B. durch Anfangsbedingungen festgelegt. Z.B. ist $x(0) = a$ der Anfangsort und $x'(0) = b$ die Anfangsgeschwindigkeit.

Eine andere Problemstellung sind Randbedingungen. Fordert man z.B. $x(0) = 0$ und $x(L) = 0$, was einer eingespannten (unendlich dünnen) Saite der Länge L entspricht, dann ist $a = 0$ und $\omega = \frac{k\pi}{L}$ für ein $k \in \mathbb{N}^\times$. Die Frequenz der eingespannten Saite kann nur ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz $\frac{\pi}{L}$ betragen. ◀

Beispiel 12.2 Die *Besselsche Differentialgleichung* zum Parameter $p \in \mathbb{R}_+$ ist

$$x''(r) + \frac{1}{r} x'(r) + \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right) x(r) = 0.$$

Dabei ist die "Zeitvariable" zunächst ein Radius $r \in \mathbb{R}_+^*$, jedoch kann man die Gleichung auf $r \mapsto z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ausdehnen. Die Besselsche Differentialgleichung tritt auf bei zweidimensionalen Schwingungen und Wellen in Radialkoordinaten. Die Gleichung $\Delta u = -u$ auf $U \subset \mathbb{R}^2$ liefert mit dem Ansatz $u(r, \phi) = f(r) e^{ip\phi}$ die Besselsche Differentialgleichung für $y(x) \mapsto f(r)$. Die Gleichung $\Delta u = -u$ entsteht z.B. aus der Wellengleichung $(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \psi = 0$ mit dem Ansatz $\psi(r, \phi, t) = u(r, \phi) e^{it}$.

Die Lösungen der Besselschen Differentialgleichung heißen *Zylinderfunktionen*. Die einfachste wird durch den Potenzreihenansatz $x(t) = r^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ gewonnen. Nach Indexverschiebung entsteht

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+p+2)(n+p+1)a_{n+2} + (n+p+2)a_{n+2} + a_n - p^2 a_{n+2} \right) r^{n+p},$$

also $a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+2p+2)}$. Startend mit $n = 0$ erhalten wir:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot (2+2p)}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot (4+2p)} = \frac{a_0 \Gamma(p+1)}{4^2 \cdot 2! \cdot \Gamma(p+3)},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot (6+2p)} = -\frac{a_0 \Gamma(p+1)}{4^3 \cdot 3! \cdot \Gamma(p+4)}, \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0 \Gamma(p+1)}{4^n \cdot n! \cdot \Gamma(p+n+1)},$$

somit mit der willkürlichen Konvention $a_0 = \frac{1}{\Gamma(p+1)2^p}$ die Lösung $x(r) = J_p(r)$ mit

$$J_p(r) = \frac{r^p}{2^p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{2n}}{4^n \cdot n! \cdot \Gamma(p+n+1)}.$$

Die Potenzreihe $J_p(r)$ heißt *Besselfunktion* zum Parameter $p \in \mathbb{R}_+$. Es gibt nützliche Integraldarstellungen der Besselfunktion, z.B.

$$J_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(n\theta - r \sin \theta), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt $|J_n(r)| \leq 1$ für alle $r \in \mathbb{R}$, was aus der Reihenformel nicht offensichtlich ist. Bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen sind elementar berechenbar (zumindest tabelliert). Ihre Bedeutung ist vergleichbar mit Sinus und Cosinus bzw. Exponentialfunktion. Die Nullstellen der Besselfunktion sind wichtig bei zweidimensionalen *Randwertproblemen*, z.B. bei Schwingungen einer am Rand eingespannten Membran.

Entsprechend der allgemeinen Lösungstheorie muß die Besselsche Differentialgleichung eine weitere linear unabhängige Lösung haben. Ist $p \notin \mathbb{N}$, so folgt aus der Rechnung, daß die über die Fortsetzung der Gamma-Funktion definierte Potenzreihe $J_{-p}(r)$ eine Lösung ist. Für $p \in \mathbb{N}$ ist anders vorzugehen. Als weitere Lösung der Besselschen Differentialgleichung nimmt man entweder die Neumannsche Funktion $N_n(r)$ oder, insbesondere für $z \in \mathbb{C}$, die komplexen Linearkombinationen $H_p(z) = J_p(z) \pm iN_p(z)$ (Hankel-Funktionen). \triangleleft

Man kann zeigen, daß diese zweite linear unabhängige Lösung solcher Differentialgleichungen 2. Ordnung durch folgendes Reduktionsverfahren erhalten werden kann:

Satz 12.3 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Es sei $x_{(1)} : I \rightarrow \mathbb{K}$ eine Lösung der Differentialgleichung $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ und in einem Intervall $J \subseteq I$ gelte $x_{(1)}(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Dann erhält man auf J eine zweite linear unabhängige Lösung $x_{(2)} : J \rightarrow \mathbb{K}$ der Differentialgleichung durch den Ansatz $x_{(2)}(t) = u(t)x_{(1)}(t)$, wobei u dann eine nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung*

$$u''(t) + \left(2 \frac{x'_{(1)}(t)}{x_{(1)}(t)} + a(t) \right) u'(t) = 0$$

ist, die im ersten Schritt zu

$$u'(t) = \frac{1}{x_{(1)}^2(t)} \exp \left(- \int_{t_0}^t ds a(s) \right)$$

integriert werden kann.

Beispiel 12.4 Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator lautet nach Skalierung

$$\psi''(x) + (E - x^2)\psi(x) = 0 .$$

Für große $|x|$ kann $E\psi$ vernachlässigt werden, und $\psi_0(x) = e^{-x^2/2}$ wäre Lösung von $\psi_0'' + (1 - x^2)\psi_0 = 0$. Man setzt also $\psi(x) = y(x)e^{-x^2/2}$ und erhält

$$y''(x) - 2xy'(x) + (E - 1)y(x) = 0 .$$

Mit dem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ergibt sich die Rekursionsformel

$$(n + 2)(n + 1)a_{n+2} + (E - 2n - 1)a_n = 0 .$$

Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, z.B. $N > E^2$, so daß für alle $n \geq N$ gilt $a_{2(k+1)} > (1 - \frac{1}{N})\frac{a_{2k}}{k+1}$ und damit $y(x) > e^{(1-\frac{1}{N})x^2} a_0 + P_N(x)$ für ein Polynom P_N vom Grad $\leq N$. Damit wächst die Gesamtlösung $\psi(x) = y(x)e^{-x^2/2}$ wie $e^{+(1-2/N)x^2/2}$ für $|x| \rightarrow \infty$ und erlaubt keine Wahrscheinlichkeitsinterpretation mehr. Der Ausweg besteht in der Abbruchbedingung $E = 2n + 1$, die dann $a_{n+2} = 0$ und somit $a_k = 0$ für alle $k > n$ erzwingt. Somit sind nur diskrete bzw. quantisierte Energieniveaus möglich. Es entsteht die *Hermiteische Differentialgleichung* zum Parameter $n \in \mathbb{N}$

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0 , \quad x \in \mathbb{R} , n \in \mathbb{N} .$$

Man kann nachrechnen, daß eine Lösung $y(x) = H_n(x)$ gegeben ist durch das *Hermiteische Polynom n-ter Ordnung*

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2} . \quad \triangleleft$$

Beispiel 12.5 Die *Legendresche Differentialgleichung* auf dem Intervall $I =]-1, 1[$ ist gegeben durch

$$(1 - t^2)x''(t) - 2tx'(t) + n(n + 1)x(t) = 0 , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Sie entsteht bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$\Delta\psi + U(r)\psi = 0$$

in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) . Dabei ist Δ der Laplace-Operator. Der Ansatz $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ mit anschließendem Potenzreihenansatz für $R(r)$ läßt nur dann eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation zu, wenn wieder eine durch $n \in \mathbb{N}$ parametrisierte Abbruchbedingung gestellt wird (Quantisierung der Energieniveaus). Eine Lösung der Legendresche Differentialgleichung ist gegeben durch das *Legendresche Polynom n-ter Ordnung*

$$P_n(t) := \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t^2 - 1)^n .$$

Zum Beweis rechnet man $z^{(n+1)}$ für die Funktion $z(t) := (t^2 - 1) \frac{d}{dt} (t^2 - 1)^n = 2nt(t^2 - 1)^n$ über die mehrfache Leibniz-Regel $(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}$ aus.

Man findet (bis auf Vorfaktoren) $\Theta_l(\theta) = P_l(\cos \theta)$. \triangleleft

Sehr ähnlich entsteht:

Beispiel 12.6 Die *Laguerresche Differentialgleichung* zum Parameter $n \in \mathbb{N}$ ist

$$tx''(t) + (1-t)x'(t) + nx(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Eine Lösung ist das *Laguerresche Polynom* n -ter Ordnung

$$L_n(t) := \frac{1}{n!} e^t \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t^n e^{-t}).$$

Es tritt auf als Lösung der zweidimensionalen Schrödinger-Gleichung in Radialkoordinaten für das Potential $U(x) = \frac{1}{2} \omega^2 r^2$ eines harmonischen Oszillators. \triangleleft

Beispiel 12.7 Die *hypergeometrische Differentialgleichung* zu den 3 Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist

$$t(1-t)x''(t) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)t)x'(t) - \alpha\beta x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

Eine Lösung ist gegeben durch die *hypergeometrische Funktion*

$$F\left(\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| t\right) := 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot \frac{t^1}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots$$

Ist α oder β eine negative ganze Zahl $-n$ (und γ geeignet), dann bricht die Reihe ab, und $F\left(\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| t\right)$ wird ein Polynom n -ter Ordnung in t .

Durch die sehr allgemeine 3-parametrische Form lassen sich viele andere spezielle Funktionen durch hypergeometrische ausdrücken. Viele Integrale berechnen sich zu hypergeometrischen Funktionen, wichtig ist dabei die Identität

$$F\left(\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| t\right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 ds s^{\beta-1} (1-s)^{\gamma-\beta-1} (1-ts)^{-\alpha}. \quad \triangleleft$$

13 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten können auf Eigenwertprobleme für lineare Abbildungen zurückgeführt werden, die wir in der Linearen Algebra behandelt haben.

Zur Fixierung der Bezeichnungen sei $\mathbb{C}[T]$ die Menge aller Polynome (endlicher Ordnung) in einer formalen Größe T , d.h. $P_n(T) := a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n \in \mathbb{C}[T]$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{C}$. Die Menge der Polynome $\mathbb{C}[T]$ bildet eine sogenannte Algebra, d.h. einen Vektorraum mit Produkt, wobei alle Distributiv-Gesetze gelten. Wir interessieren uns für die Menge $\mathbb{C}[\frac{d}{dt}]$ der *Differentialoperatoren*.

Ist $\mathcal{C}^k(I)$ der Vektorraum der k -mal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $P_n(\frac{d}{dt}) = a_0 + a_1 \frac{d}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n}{dt^n}$ mit $n \leq k$, dann ist dieser Differentialoperator n -ter Ordnung $P_n(\frac{d}{dt})$ eine lineare Abbildung

$$P_n(\frac{d}{dt}) : \mathcal{C}^k(I) \rightarrow \mathcal{C}^{k-n}(I), \quad f(t) \mapsto a_0 f(t) + a_1 f'(t) + \dots + a_n f^{(n)}(t).$$

Wir können $a_n = 1$ annehmen. Insbesondere ist $P_n(\frac{d}{dt})$ ein Endomorphismus des Vektorraums $\mathcal{C}^\infty(I)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Damit läßt sich die Eigenwerttheorie von Endomorphismen eines Vektorraums auf Differentialoperatoren übertragen. Zwar ist $\mathcal{C}^\infty(I)$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, aber nach Satz 11.11 ist der Vektorraum $\ker(P_n(\frac{d}{dt})) \subseteq \mathcal{C}^\infty(I)$ der Lösungen x von $P_n(\frac{d}{dt})x = 0$ *endlich-dimensional*.

Die gesamte Theorie der Differentialoperatoren $P_n(\frac{d}{dt})$ beruht auf der Beobachtung, daß

$$P_n(\frac{d}{dt})e^{\lambda t} = P_n(\lambda)e^{\lambda t}.$$

Folglich gilt:

Satz 13.1 *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms P , d.h. $P(\lambda) = 0$, dann ist $x = e^{\lambda t}$ eine Lösung der Differentialgleichung $P(\frac{d}{dt})e^{\lambda t} = 0$.*

Im einfachsten Fall sind alle n Nullstellen von P_n verschieden:

Satz 13.2 *Sei $P_n(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$ ein Polynom, welches n paarweise voneinander verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ habe. Dann bilden die Funktionen $x_{(1)}, \dots, x_{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$x_{(k)}(t) := e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, \dots, n,$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung

$$P_n(\frac{d}{dt})x = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0.$$

Beweis. Nach Satz 13.1 ist jede dieser Funktionen $x_{(k)}$ Lösung der Differentialgleichung. Zur Überprüfung der linearen Unabhängigkeit berechnen wir die Wronski-Determinante an der Stelle $t = 0$. Mit $x_{(k)}^{(j)}(t) = \lambda_k^j e^{\lambda_k t}$ ergibt sich

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Das ist genau die Vandermonde-Determinante (Aufgabe 3 von Blatt 10 aus dem 2. Semester),

$$W(0) = \prod_{k>l} (\lambda_k - \lambda_l) \neq 0 ,$$

da die Nullstellen paarweise verschieden sind. \square

Man sieht aber auch, daß für mehrfache Nullstellen die Lösungen $e^{\lambda_k t}$ nicht linear unabhängig sind.

Beispiel 13.3 Gegeben sei die Differentialgleichung $x'''(t) - 2x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0$. Sie schreibt sich als $P_3(\frac{d}{dx})y = 0$ mit

$$P_3(T) = T^3 - 2T^2 + T - 2 = (T - 2)(T^2 + 1) = (T - 2)(T - i)(T + i) .$$

Alle Nullstellen von P_3 sind paarweise verschieden, so daß

$$x_{(1)}(t) = e^{it} , \quad x_{(2)}(t) = e^{-it} , \quad x_{(3)}(t) = e^{2t}$$

ein Lösungsfundamentalsystem bildet. Wegen

$$c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} = (c_1 + c_2) \cos t + (ic_1 - ic_2) \sin t$$

bildet dann

$$x_{(1)}(t) = \cos t , \quad x_{(2)}(t) = \sin t , \quad x_{(3)}(t) = e^{2t}$$

ein reelles Fundamentalsystem. \triangleleft

Ganz allgemein gilt: Ist $\lambda = i\mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ eine rein imaginäre Nullstelle eines reellen Polynoms $P(T) \in \mathbb{R}[T]$, dann ist auch $\bar{\lambda} = -i\mu$ eine Nullstelle, so daß sich die Lösungen $e^{\pm i\mu t}$ der entsprechenden Differentialgleichung äquivalent durch $\cos(\mu t)$ und $\sin(\mu t)$ ausdrücken lassen.

Beispiel 13.4 Wir erinnern noch einmal an die Schwingungsdifferentialgleichung $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$. Mit $P_2(T) = T^2 + \omega^2 = (T - i\omega)(T + i\omega)$ finden wir sofort das Lösungsfundamentalsystem $x_{(1)}(t) = \cos(\omega t)$ und $x_{(2)}(t) = \sin(\omega t)$. \triangleleft

Es verbleibt die Diskussion mehrfacher Nullstellen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra können wir jedes Polynom $P_n(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ in Linearfaktoren zerlegen,

$$P_n(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \dots (T - \lambda_r)^{k_r} ,$$

mit paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $k_1 + \dots + k_r = n$. Wir benötigen zwei Hilfssätze:

Lemma 13.5 Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ sowie $I \subseteq \mathbb{R}$. Für jede k -mal stetig differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^k (f(t) e^{\lambda t}) = f^{(k)}(t) e^{\lambda t} .$$

Beweis. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen, und für $k = 1$ ergibt sich

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)(f(t) e^{\lambda t}) = f'(t) e^{\lambda t} + f(t) (e^{\lambda t})' - \lambda f(t) e^{\lambda t} = f'(t) e^{\lambda t} .$$

Der Induktionsschritt $k \mapsto k + 1$ ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^{k+1} (f(t) e^{\lambda t}) &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)(f^{(k)}(t) e^{\lambda t}) \\ &= (f^{(k)}(t))' e^{\lambda t} \end{aligned}$$

nach obiger Rechnung für $k = 1$. □

Lemma 13.6 Es sei $P_n(T) \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom und $\lambda \in \mathbb{C}$, so daß $P_n(\lambda) \neq 0$. Ist $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion k -ten Grades, so gilt

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right)(g_k(t) e^{\lambda t}) = h_k(t) e^{\lambda t} ,$$

wobei $h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ebenfalls eine Polynomfunktion k -ten Grades ist.

Beweis. Das Polynom $P_n(T)$ läßt sich (z.B. über den Satz von Taylor) umordnen nach Potenzen von $T - \lambda$:

$$P_n(T) = \sum_{j=0}^n c_j (T - \lambda)^j$$

mit $c_j \in \mathbb{C}$ und $c_0 = P_n(\lambda) \neq 0$. Damit gilt nach Lemma 13.5

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right)(g_k(t) e^{\lambda t}) = \sum_{j=0}^n c_j \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^j (g_k(t) e^{\lambda t}) = \sum_{j=0}^n c_j g_k^{(j)}(t) e^{\lambda t} .$$

Wegen $c_0 \neq 0$ ist $h_k(t) := \sum_{j=0}^n c_j g_k^{(j)}(t)$ wieder eine Polynomfunktion vom Grad k . □

Satz 13.7 Es sei $P_n(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \dots (T - \lambda_r)^{k_r}$ ein Polynom n -ten Grades mit paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_j \in \mathbb{C}$ der Vielfachheit k_j . Dann besitzt die Differentialgleichung $P_n\left(\frac{d}{dt}\right)x(t) = 0$ ein Lösungs-Fundamentalsystem aus den Funktionen

$$x_{(jm)}(t) := t^m e^{\lambda_j t} , \quad 1 \leq j \leq r , \quad 0 \leq m \leq k_j - 1 .$$

Beweis. i) Für gewähltes j läßt sich das Polynom P_n schreiben als $P_n(T) = Q_j(T)(T - \lambda_j)^{k_j}$ mit $Q_j(\lambda_j) \neq 0$. Dann gilt nach Lemma 13.5

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right)(t^m e^{\lambda_j t}) = Q_j\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right)^{k_j}(t^m e^{\lambda_j t}) = Q_j\left(\frac{d}{dt}\right)(t^m)^{(k_j)} e^{\lambda_j t} = 0$$

wegen $m < k_j$. Somit erfüllen alle Funktionen $x_{(jm)}$ die Differentialgleichung.

ii) Zu zeigen bleibt die lineare Unabhängigkeit der $x_{(jm)}$. Eine Linearkombination der $x_{(jm)}$ hat die Form $\tilde{x}(t) = \sum_{j=1}^r g_{(j)}(t)e^{\lambda_j t}$, wobei $g_{(j)}(t)$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leq k_j - 1$ ist (wir lassen den Polynomgrad zur Verbesserung der Lesbarkeit weg). Wir zeigen durch Induktion nach r , daß $\tilde{x} = 0$ genau dann, wenn $g_{(j)} = 0$ für alle j .

Für $r = 1$ folgt aus $\tilde{x}(t) = g_{(1)}(t)e^{\lambda_1 t} = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, daß $g_{(1)}(t) = 0$ ist.

Im Schritt von $r - 1$ nach r sei dann $\sum_{j=1}^{r-1} g_{(j)}(t)e^{\lambda_j t} = 0$. Ist eines der $g_{(j)}$ gleich Null, so sind wir nach Induktionsannahme fertig. Ansonsten wenden wir $(\frac{d}{dt} - \lambda_r)^{k_r}$ an und benutzen Lemma 13.5 und Lemma 13.6:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_r\right)^{k_r} \left(\sum_{j=1}^r g_{(j)}(t)e^{\lambda_j t}\right) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_r\right)^{k_r} \left(\sum_{j=1}^{r-1} g_{(j)}(t)e^{\lambda_j t}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=0}^{k_r} c_{ji} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right)^i \left(g_{(j)}(t)e^{\lambda_j t}\right) = \sum_{j=1}^{r-1} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k_r} c_{ji} g_{(j)}^{(i)}(t)\right)}_{h_{(j)}(t)} e^{\lambda_j t}, \end{aligned}$$

wobei $h_{(j)}(t)$ wegen $c_{j0} = (\lambda_j - \lambda_r)^{k_r} \neq 0$ wieder ein Polynom vom Grad $\leq k_j - 1$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $h_{(j)} = 0$ für alle j und weiter wegen $c_{j0} \neq 0$ auch $g_{(j)}^{(0)}(t) = 0$, im Widerspruch zur Annahme. \square

Beispiel 13.8 Gegeben sei die Schwingungsdifferentialgleichung mit kritischer Reibung

$$0 = x''(t) + 2\omega x'(t) + \omega^2 x(t) = P_2\left(\frac{d}{dt}\right)(x)$$

mit $P_2(T) = T^2 + 2\omega T + \omega^2 = (T + \omega)^2$. Die allgemeine Lösung ist deshalb $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\omega t}$. \triangleleft

Wir betrachten nun inhomogene lineare Differentialgleichungen $P_n\left(\frac{d}{dt}\right)x = b(t)$. Es bietet sich an, die Lösung der homogenen Gleichung zu bestimmen, sie in die Matrixform einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung zu überführen und dann durch Variation der Konstanten eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu berechnen. In manchen Fällen kommt man aber durch einen geeigneten Lösungsansatz schneller ans Ziel.

Zunächst folgende Beobachtung: Ist $b(t) = b_1(t) + \dots + b_k(t)$ und $x_{(k)}$ Lösung von $P_n\left(\frac{d}{dt}\right)x_{(k)} = b_k(t)$, so ist $x = x_{(1)} + \dots + x_{(k)}$ Lösung von $P_n\left(\frac{d}{dt}\right)x = b(t)$. Der Lösungsansatz funktioniert dann für rechte Seiten der Form $b(t) = g_m(t)e^{\mu t}$, wobei g_m eine Polynomfunktion vom Grad m ist.

Satz 13.9 Sei $P_n(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom und $\mu \in \mathbb{C}$, so daß $P(\mu) \neq 0$ (keine Resonanz). Dann gilt:

- i) Die Differentialgleichung $P_n(\frac{d}{dt})x = e^{\mu t}$ besitzt die spezielle Lösung $x(t) = \frac{1}{P_n(\mu)}e^{\mu t}$.
- ii) Ist $g_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad m , so besitzt die Differentialgleichung $P_n(\frac{d}{dt})x = g_m(t)e^{\mu t}$ eine spezielle Lösung der Form $x(t) = h_m(t)e^{\mu t}$, wobei $h_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ wieder eine Polynomfunktion vom Grad m ist.

Beweis. i) ist klar wegen $P_n(\frac{d}{dt})e^{\mu t} = P_n(\mu)e^{\mu t}$.

ii) mit Induktion nach m . Der Fall $m = 0$ ist Teil i). Nach Lemma 13.6 ist $P_n(\frac{d}{dt})(t^m e^{\mu t}) = \tilde{h}_m(t)e^{\mu t}$ für eine Polynomfunktion $\tilde{h}_m(t)$ vom Grad m . Wir schreiben $g_m(t) = c\tilde{h}_m(t) + g_{m-1}(t)$ für ein $c \in \mathbb{C}$ und ein Polynom $g_{m-1}(t)$ vom Grad $m - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Polynomfunktion $h_{m-1}(t)$ vom Grad $m - 1$, so daß $P_n(\frac{d}{dt})x = g_{m-1}(t)e^{\mu t}$ die spezielle Lösung $x(t) = h_{m-1}(t)e^{\mu t}$ hat. Dann hat $P_n(\frac{d}{dt})x = g_m(t)e^{\mu t}$ die spezielle Lösung $x(t) = (ct^m + h_{m-1}(t))e^{\mu t}$. \square

Beispiel 13.10 Gegeben sei die Differentialgleichung $x'''(t) - x(t) = t$, also $P_3(\frac{d}{dt})x = b(t)$ mit $P_3(T) = T^3 - 1 = (T - 1)(T^2 + T + 1) = (T - 1)(T - \tau_1)(T - \tau_2)$ und $b(t) = te^{0x}$. Damit ist $P_3(0) \neq 0$, so daß es eine spezielle Lösung $x(t) = c_1t + c_0$ der Differentialgleichung gibt. Wir testen

$$\left(\frac{d^3}{dt^3} - 1\right)(c_1t + c_0) = -c_1t - c_0 \stackrel{!}{=} t,$$

was auf $c_0 = 0$ und $c_1 = -1$ führt. Zusammen mit der allgemeinen Lösung $(\tau_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3})$ des homogenen Problem ergibt sich als allgemeinste Lösung

$$x(t) = -t + ae^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left(b \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right). \quad \triangleleft$$

Satz 13.11 Sei $P_n(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom und $g_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad m . Die komplexe Zahl $\mu \in \mathbb{C}$ sei eine k -fache Nullstelle von P_n (Resonanzfall). Dann besitzt die Differentialgleichung $P_n(\frac{d}{dt})y = g_m(t)e^{\mu t}$ eine spezielle Lösung der Form $x(t) = h_{m+k}(t)e^{\mu t}$, wobei $h_{m+k}(t) = \sum_{j=k}^{m+k} c_j t^j$ eine Polynomfunktion vom Grad $m+k$ ist, in der die untersten Potenzen t^j mit $j < k$ nicht auftreten.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Darstellung $P_n(T) = Q_{n-k}(T)(T - \mu)^k$ mit $Q_{n-k}(\mu) \neq 0$. Nach Satz 13.9 gibt es eine Polynomfunktion $\tilde{h}_m(t)$, so daß $Q_{n-k}(\frac{d}{dt})(\tilde{h}_m(t)e^{\mu t}) = g_m(t)e^{\mu t}$. Es gibt dann eine Polynomfunktion $h_{m+k}(t) =$

$\sum_{j=k}^{m+k} c_j t^j$, so daß $h_{m+k}^{(k)}(t) = \tilde{h}_m(t)$. Nach Lemma 13.5 gilt damit

$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{d}{dt}\right)(h_{m+k}(t)e^{\mu t}) &= Q_{n-k}\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d}{dt} - \mu\right)^k(h_{m+k}(t)e^{\mu t}) \\ &= Q_{n-k}\left(\frac{d}{dt}\right)(h_{m+k}^{(k)}(t)e^{\mu t}) = Q_{n-k}\left(\frac{d}{dt}\right)(\tilde{h}_m(t)e^{\mu t}) \\ &= g_m(t)e^{\mu t}. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 13.12 Wir betrachten noch einmal die Differentialgleichung $x''(t) + \omega^2 x(t) = b \cos(\Omega t) = \operatorname{Re}(be^{i\Omega t})$. Wir rechnen im Komplexen und nehmen am Ende den Realteil der Lösung. Wir haben $P_2(T) = (T - i\omega)(T + i\omega)$. Zunächst sei $\Omega^2 \neq \omega^2$. Wegen $P_2(i\Omega) = \omega^2 - \Omega^2$ ergibt sich für $\Omega \neq \omega$ die komplexe Lösung zu

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} + \frac{b}{\omega^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Der Realteil ist

$$\operatorname{Re}(x(t)) = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + \frac{b}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t, \quad a_1 = \operatorname{Re}(c_1 + c_2), \quad a_2 = \operatorname{Im}(c_2 - c_1).$$

Im Resonanzfall $\Omega = \pm\omega$ ist Ω eine einfache Nullstelle, so daß eine spezielle Lösung die Form $cte^{i\omega t}$ hat. Wegen

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)(cte^{i\omega t}) = 2ic\omega e^{i\omega t}$$

ergibt sich

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} + \frac{bt}{2i\omega} e^{i\omega t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Der Realteil ist

$$\operatorname{Re}(x(t)) = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + \frac{b}{2\omega} t \sin \omega t, \quad a_1 = \operatorname{Re}(c_1 + c_2), \quad a_2 = \operatorname{Im}(c_2 - c_1).$$

Wir bestätigen damit die zuvor in Beispiel 11.9 erhaltenen Lösungen. \triangleleft

Wiederholung

- Umformungen zwischen expliziter Differentialgleichung und vektorieller DGL $x'(t) = v(t, x(t))$; Interpretation von v als Geschwindigkeitsfeld und Lösungen $x(t)$ als Bahnkurven, Stromlinien, Feldlinien
- DGL mit getrennten Variablen, lineare DGL, Variation der Konstanten
- Beziehung zwischen Anfangswertproblem $x'(t) = v(t, x(t))$ mit $x(t_0) = x_0$ und Integralgleichung; lokale Existenz und Eindeutigkeit unter Lipschitz-Bedingung
- Lineare DGL: Lösungsfundamentalsystem, Variation der Konstanten im inhomogenen Fall. Potenzreihenansatz
- Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten: Ansatz für Lösungsfundamentalsystem und spezielle Inhomogenitäten mit Fallunterscheidungen nach Vielfachheit der Nullstellen

Teil III

Grundlagen der Funktionentheorie

14 Differentialformen und Kurvenintegrale

Definition 14.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Unter einer *Differentialform 1. Grades* bzw. einer *1-Form* auf U versteht man eine Abbildung

$$\omega : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}), \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Beispiel 14.2 Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist $\omega = Df$ eine 1-Form, $\omega(\xi) = (Df)(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linear. \triangleleft

Wir bezeichnen hier mit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ die Koordinaten auf U , um die Bezeichnung $x_i \in \mathcal{C}(U)$ für die *Koordinatenfunktionen* zu reservieren:

$$x_i(\xi) = \xi_i.$$

Dann ist $x_i(\xi + h) = \xi_i + h_i = x_i(\xi) + (Dx_i)(\xi) \circ h$. Für diese Differentiale Dx_i der Koordinatenfunktionen führt man die besondere Bezeichnung dx_i ein,

$$dx_i := Dx_i \quad \Rightarrow \quad dx_i(\xi) \circ h = h_i \quad \forall \xi \in U.$$

Beispiel 14.3 Sei $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann wird durch $\omega = \langle v, \cdot \rangle$, d.h. $\omega(\xi) \circ h = \langle v(\xi), h \rangle$ für $h \in \mathbb{R}^n$, eine 1-Form definiert. \triangleleft

Wegen der Linearität ist eine 1-Form ω durch ihre Werte auf den Basisvektoren $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ des \mathbb{R}^n bestimmt, also durch die Funktionen $\omega \circ e_i = \omega_i : U \rightarrow \mathbb{K}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \omega(\xi) \circ h &= \omega(\xi) \circ \sum_{i=1}^n h_i e_i = \sum_{i=1}^n h_i \omega(\xi) \circ e_i = \sum_{i=1}^n h_i \omega_i(\xi) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\xi) (dx_i)(\xi) \circ h \\ \Rightarrow \quad \omega(\xi) &= \sum_{i=1}^n \omega_i(\xi) dx_i(\xi), \quad dx_i \circ e_j = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Beispiel 14.4 i) Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt $Df = \sum_{i=1}^n (\partial_i f) dx_i$. Wir werden später das äußere Differential d einführen, welches für Funktionen, und nur diese, mit dem totalen Differential zusammenfällt: $df = DF$.

ii) Ist $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ ein stetiges Vektorfeld, dann gilt für die durch $\omega = \langle v, \cdot \rangle$

$$\text{definierte 1-Form } \omega = \sum_{i=1}^n v_i dx_i.$$

Höhere Differentialformen auf U werden multilineare antisymmetrische Abbildungen $\omega^{(k)} : U \rightarrow \text{Hom}(\underbrace{\mathbb{R}^n \otimes_{as} \cdots \otimes_{as} \mathbb{R}^n}_k, \mathbb{R})$. Wir vereinfachen diese Beschreibung, indem wir eine Basis von $\text{Hom}(\underbrace{\mathbb{R}^n \otimes_{as} \cdots \otimes_{as} \mathbb{R}^n}_k, \mathbb{R})$ angeben:

Definition 14.5 Der Vektorraum der k -fach antisymmetrischen Tensoren über \mathbb{R}^n wird erzeugt durch formale Produkte von k Koordinatendifferentialen,

$$\Lambda^k(\mathbb{R}^n) := \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = 0 \\ \text{span}(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n) & \text{für } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetige/partiell differenzierbare/... Abbildung $\omega^{(k)} : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ heißt *stetige/partiell differenzierbare/... k -Form* auf U . Der Raum der k -Formen auf U wird mit $\Omega^k(U)$ bezeichnet.

Eine k -Form ist also die Zuordnung eines k -fach antisymmetrischen Tensors zu jedem Punkt von U . Insbesondere sind 0-Formen auf U sind nichts anderes als Funktionen auf U , und 1-Formen haben wie zuvor die Form $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$.

Definition 14.6 Die durch die Vereinbarung $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ und lineare Fortsetzung entstehende assoziative Multiplikation

$$\wedge : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$$

heißt das *äußere Tensorprodukt* (auch *wedge-Produkt* wegen der englischen Bezeichnung "wedge" (Keil) für \wedge). Entsprechend heißt

$$\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^l(U) \rightarrow \Omega^{k+l}(U)$$

(wie oben erklärt, jedoch mit $\mathcal{C}(U)$ -linearer Fortsetzung) das *äußere Formenprodukt*.

Es gilt stets $dx_i \wedge dx_i = 0$. Sei z.B. $n \geq 3$ und $\omega^{(1)} = f dx_2$ und $\omega^{(2)} = g dx_1 \wedge dx_3$ für Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist

$$\omega^{(1)} \wedge \omega^{(2)} = (fg) \cdot (dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3) = -(fg) \cdot (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3).$$

Allgemein gilt für $\omega^{(k)} \in \Omega^k(U)$ und $\tilde{\omega}^{(l)} \in \Omega^l(U)$ die graduierte Kommutativität

$$\omega^{(k)} \wedge \tilde{\omega}^{(l)} = (-1)^{kl} \tilde{\omega}^{(l)} \wedge \omega^{(k)}$$

Offenbar gilt $\dim(\Lambda^k(\mathbb{R}^n)) = \binom{n}{k}$. Deshalb gibt es natürliche Vektorraum-Isomorphismen einerseits zwischen Funktionen und 0- bzw. n -Formen und ande-

erseits zwischen Vektorfeldern und 1- bzw. $(n-1)$ -Formen:

$$\begin{aligned}\varrho_0(f) &= f, \\ \varrho_1((v_1, \dots, v_n)) &= v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n, \\ \varrho_{n-1}(((v_1, \dots, v_n))) &= v_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - dx_1 \wedge v_2 dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} v_n, \\ \varrho_n(f) &= f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.\end{aligned}$$

Definition 14.7 Seien v, w Vektorfelder im \mathbb{R}^3 . Dann heißt das Vektorfeld $v \times w := \varrho_2^{-1}(\varrho_1(v) \wedge \varrho_1(w))$ das *Vektorprodukt* von v, w .

Definition 14.8 Die durch

$$d\omega := \sum_{i=1}^n dx_i \wedge \partial_i(\omega)$$

für eine partiell differenzierbare k -Form $\omega \in \Omega^k(U)$ definierte Abbildung $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ heißt *äußere Ableitung* oder *äußeres Differential*.

Beispiel 14.9 Im \mathbb{R}^3 sehen die äußeren Ableitungen wie folgt aus:

$$\begin{aligned}k = 0 : \quad df &= (\partial_1 f) dx_1 + (\partial_2 f) dx_2 + (\partial_3 f) dx_3 \\ k = 1 : \quad d(f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3) \\ &= (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) dx_1 \wedge dx_2 + (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) dx_2 \wedge dx_3 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) dx_3 \wedge dx_1 \\ k = 2 : \quad d(f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ &= (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\end{aligned}$$

Allgemein gilt unter Verwendung der zuvor eingeführten Isomorphismen ϱ_k für Funktionen f und Vektorfelder v :

$$\operatorname{grad} f = \varrho_1^{-1}(df), \quad \operatorname{div} v = \varrho_n^{-1}(d\varrho_{n-1}(v)).$$

Dazwischen liegt im \mathbb{R}^3 noch das Differential von 1-Formen:

$$U \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \operatorname{rot} v = \varrho_2^{-1}(d\varrho_1(v)).$$

Die drei Operationen $\operatorname{grad}, \operatorname{rot}, \operatorname{div}$ sind im \mathbb{R}^3 nichts anderes als die äußeren Differentiale von 0-, 1- und 2-Formen. \triangleleft

Satz 14.10 • Sind $\omega^{(k)} \in \Omega^k(U)$ und $\tilde{\omega}^{(l)} \in \Omega^l(U)$ partiell differenzierbare Formen, dann gilt die graduierte Leibniz-Regel

$$d(\omega^{(k)} \wedge \tilde{\omega}^{(l)}) = (d\omega^{(k)}) \wedge \tilde{\omega}^{(l)} + (-1)^k \omega^{(k)} \wedge (d\tilde{\omega}^{(l)}).$$

- Ist $\omega^{(k)} \in \Omega^k(U)$ zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt $d(d\omega^{(k)}) = 0$.

Beweis. i) folgt aus der Leibniz-Regel für die partielle Ableitung und der graduerte Kommutativität des \wedge -Produkts. iii) folgt aus dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen zusammen mit der Antisymmetrie $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. \square

Im \mathbb{R}^3 übersetzen sich die beiden Identitäten $ddf = 0$ und $dd\omega^{(1)} = 0$ für zweimal stetig differenzierbare Funktionen bzw. Vektorfelder in $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ und $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$.

Zu den wichtigsten Eigenschaften von k -Formen $\omega^{(k)} \in \Omega^k(U)$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gehört, daß sie über k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten $M \cap U$ des \mathbb{R}^n integriert werden können, $\int_{M \cap U} \omega^{(k)}$. Da wir bisher nur das eindimensionale Integral behandelt haben, beschränken wir uns auf Integrale von 1-Formen über (die Spur von) Kurven in U .

Das Riemann-Integral $\int_a^b dx f(x)$ einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wird hier interpretiert als das Kurvenintegral der 1-Form $f(x)dx$ über das Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^1$. Die einzuführende Verallgemeinerung auf Kurvenintegrale im \mathbb{R}^n ist z.B. für die Definition der Arbeit erforderlich, die ein Kraftfeld F , beschrieben durch eine 1-Form $F \in \Omega^1(U)$, an einem Massepunkt verrichtet, der sich auf einer Bahnkurve $c(t)$ bewegt:

$$W(F, c) = \int_c F := \int_\alpha^\beta dt F(c(t)) \circ c'(t), \quad F : U \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Im Spezialfall einer geradlinigen Bahn $c(t) = c_0 + vt$ mit $c_0, v \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [\alpha, \beta]$ sowie einem konstanten Kraftfeld $F(c(t)) = F \in \mathbb{R}^n$ reduziert sich diese Formel auf $W = \langle F, v(\beta - \alpha) \rangle$

Definition 14.11 Es sei $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Kurve im Definitionsbereich einer 1-Form $\omega : U \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Die 1-Form ω heißt *längs c integrierbar*, wenn es eine Zahl $I \in \mathbb{K}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für eine beliebige Zerlegung $\alpha \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq \beta$ mit $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ und beliebige Wahl von $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ gilt

$$\left| I - \sum_{k=1}^m \omega(c(\tau_k)) \circ (c(t_k) - c(t_{k-1})) \right| < \epsilon.$$

In diesem Fall heißt $I =: \int_c \omega$ das Integral der 1-Form ω längs c .

Es stellt sich heraus, daß selbst für stetige 1-Formen ω mehr als Stetigkeit der Kurve c gefordert werden muß, damit ω längs c integriert werden kann. Es genügt (stückweise) Differenzierbarkeit der Kurve:

Satz 14.12 Ist $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ stetig und $c = (c_1, \dots, c_n)$ stetig differenzierbar, dann ist ω längs c integrierbar, und es gilt

$$\int_c \omega = \int_\alpha^\beta dt \omega(c(t)) \circ c'(t) = \sum_{i=1}^n \int_\alpha^\beta dt \omega_i(c(t)) c'_i(t).$$

Beweis. Nach Satz 6.4 besitzt c eine Bogenlänge $L(c)$. Die stetigen Funktionen $\omega_i \circ c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{K}$ sind gleichmäßig stetig. Wähle $\delta > 0$ derart, daß für alle $t, t' \in [\alpha, \beta]$ mit $|t - t'| < \delta$ gilt

$$|\omega_i(c(t)) - \omega_i(c(t'))| < \frac{\epsilon}{nL(c)}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Wähle eine Unterteilung $\alpha \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq \beta$ mit $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ und $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_\alpha^\beta dt \omega_i(c(t)) c'_i(t) - \sum_{k=1}^m \omega_i(c(\tau_k)) (c_i(t_k) - c_i(t_{k-1})) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt (\omega_i(c(t)) - \omega_i(c(\tau_k))) c'_i(t) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt |\omega_i(c(t)) - \omega_i(c(\tau_k))| |c'_i(t)| \\ &< \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\epsilon}{nL(c)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt |c'_i(t)| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\epsilon}{nL(c)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \|c'(t)\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{L(c)} \int_\alpha^\beta dt \|c'(t)\| = \epsilon. \end{aligned}$$

Dabei haben wir Cauchy-Schwarz $|c'_i| = |\langle c', e_i \rangle| \leq \|c'\| \|e_i\|$ benutzt sowie die Formel für die Bogenlänge aus Satz 6.4. \square

Beispiel 14.13 Das Integral der durch ein homogenes Gravitationsfeld gegebenen 1-Form $\kappa = -mg dx_3$ soll längs der Kurven $c, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $c(t) = (1 - \cos(\pi t))e_1 + \sin(\pi t)e_2 + h(1 - t)e_3$ und $\gamma(t) = 2te_1 + h(1 - t^2)e_3$ berechnet werden. Es gilt $c(0) = \gamma(0) = (0, 0, h)$ und $c(1) = \gamma(1) = (2, 0, 0)$ sowie

$$\int_c \kappa = -mg \int_0^1 dt c'_3(t) = mgh, \quad \int_\gamma \kappa = -mg \int_0^1 dt \gamma'_3(t) = mgh. \quad (5)$$

Für dieses Beispiel ist die Arbeit unabhängig vom Weg. \triangleleft

Beispiel 14.14 Auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ heißt $\omega(\xi) := -\frac{\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} dx_1 + \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} dx_2$ die *Windungsform*. Wir integrieren ω längs des geschlossenen Weges $c : [0, 2\pi] \rightarrow U$, mit $c(t) = e_1 \cos t + e_2 \sin t$. Dann ist $c'(t) = -e_1 \sin t + e_2 \cos t$, somit

$$\omega(c(t)) \circ c'(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_c \omega = 2\pi. \quad \triangleleft$$

15 Exakte 1-Formen

Definition 15.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine differentielle k -Form $\omega^{(k)} \in \Omega^k(U)$ heißt

- i) *exakt*, falls es eine $(k-1)$ -Form $\tilde{\omega}^{(k-1)} \in \Omega^{k-1}(U)$ gibt mit $\omega^{(k)} = d\tilde{\omega}^{(k-1)}$,
- ii) *geschlossen*, falls $d\omega^{(k)} = 0$.

Eine zu einer exakten 1-Form $\omega \in \Omega^1(U)$ führende 0-Form $F \in \Omega^0(U)$ mit $\omega = dF (= DF)$ heißt *Stammfunktion* von ω .

Wegen $d^2 = 0$ ist jede exakte Differentialform auch geschlossen. Somit ist $d\omega^{(k)} = 0$ notwendig, *im allgemeinen jedoch nicht hinreichend*, für Exaktheit von $\omega^{(k)}$. Insbesondere ist notwendig für die Existenz einer Stammfunktion einer 1-Form $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$ die Gültigkeit der $\frac{n(n-1)}{2}$ *Integrationsbedingungen*

$$(d\omega)_{jk} = \partial_j \omega_k - \partial_k \omega_j = 0 \quad \text{für alle } j, k = 1, \dots, n.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besitzt jede stetige 1-Form $f dx$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine Stammfunktion F mit $F' = f$. Im Höherdimensionalen gibt es nicht-exakte 1-Formen. Es wird sich zeigen, daß die Exaktheit sogar vom Definitionsbereich U abhängt. Wenn U zusammenhängend ist, dann unterscheiden sich zwei Stammfunktionen (falls es sie gibt) nach Satz 1.17 nur um eine Konstante. Für exakte 1-Formen gilt das Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

Satz 15.2 Ist F Stammfunktion einer stetigen 1-Form ω auf U , so gilt für jede (stückweise) stetig differenzierbare Kurve $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U$

$$\int_c \omega = F(c(\beta)) - F(c(\alpha)).$$

Insbesondere ist $\int_c \omega = 0$ für jede geschlossene Kurve $c : I \rightarrow U$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $F \circ c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[\alpha, \beta]$ mit $(F \circ c)'(t) = (DF)(c(t)) \circ c'(t) = \omega(c(t)) \circ c'(t)$. Somit gilt

$$F(c(\beta)) - F(c(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} dt (F \circ c)'(t) = \int_{\alpha}^{\beta} dt \omega(c(t)) \circ c'(t) = \int_c \omega. \quad \square$$

Für eine exakte 1-Form ω auf U hängt das Integral $\int_c \omega$ nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab und nicht vom Wegverlauf dazwischen. Wie bei eindimensionalen Integralen ist es deshalb für exakte ω sinnvoll zu schreiben $\int_a^b \omega := \int_c \omega$, wobei für $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ eine beliebige Kurve mit $c(\alpha) = a$ und $c(\beta) = b$ gewählt werden kann.

Beispiel 15.3 Die Newtonsche Gravitationskraft einer Punktmasse M in $0 \in \mathbb{R}^3$, wirkend auf eine Punktmasse m in $\xi \in U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ist gegeben durch die 1-Form $\omega(\xi) = -\frac{\gamma Mm}{\|\xi\|^3} \sum_{i=1}^3 \xi_i dx_i$. Diese 1-Form ist exakt mit Stammfunktion (Potential) $\Phi = \frac{\gamma Mm}{\|\xi\|}$. Somit gilt für die Arbeit der Gravitationskraft längs einer beliebigen Bahnkurve c zwischen $\xi, \eta \in U$ die Formel $\int_c \omega = \Phi(\eta) - \Phi(\xi) = \gamma Mm \left(\frac{1}{\|\eta\|} - \frac{1}{\|\xi\|} \right)$. Insbesondere verrichtet die Gravitationskraft keine Arbeit auf einer geschlossenen Bahnkurve. \triangleleft

In Umkehrung von Satz 15.2 garantiert Wegunabhängigkeit der Integration die Existenz der Stammfunktion.

Satz 15.4 *Eine stetige 1-Form ω auf einer zusammenhängenden offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, die in U wegunabhängig integriert werden kann, besitzt in U die (bis auf Addition einer Konstanten eindeutige) Stammfunktion $F(\xi) = \int_a^\xi \omega$*

Beweis. Es gibt eine offene Kugel $K_r(\xi) \subseteq U$. Dann liegt für jedes $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < r$ die Kurve $c(t) = \xi + ht$ für $t \in [0, 1]$ in U , und es gilt

$$\begin{aligned} F(\xi + h) - F(\xi) - \omega(\xi) \circ h &= \left(\int_0^1 dt \omega(\xi + ht) \circ h \right) - \omega(\xi) \circ h \\ &= \int_0^1 dt (\omega(\xi + ht) - \omega(\xi)) \circ h . \end{aligned}$$

In der Standardbasis ist $(\omega(\xi + ht) - \omega(\xi)) \circ h = \sum_{i=1}^n (\omega_i(\xi + ht) - \omega_i(\xi)) h_i$. Wegen der Stetigkeit der ω_i folgt $F(\xi + h) - F(\xi) - \omega(\xi) \circ h = o(\|h\|)$. \square

Auch wenn zunächst unklar ist, ob eine 1-Form eine Stammfunktion besitzt, kann man zunächst das Integral $F(\xi) = \int_a^\xi \omega$ berechnen und nachträglich überprüfen, ob $dF = \omega$ gilt.

Beispiel 15.5 Zur Berechnung der Stammfunktion des homogenen Gravitationsfeldes $\omega = -mg dx_3$ im Punkt $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ integrieren wir ω entlang der Kurve $c(t) = \xi_1 t e_1 + \xi_2 t e_2 + \xi_3 t e_3$, $t \in [0, 1]$. Es gilt mit $c'(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$

$$\Phi(\xi) := \int_0^\xi \omega = \int_0^1 dt (-mg) \xi_3 = -mg \xi_3 .$$

Wie erwartet ist $D\Phi = \omega$. \triangleleft

Beispiel 15.6 Die Windungsform aus Beispiel 14.14 kann nicht exakt sein, da das Integral über S^1 nicht verschwindet. Dennoch ist die Windungsform in jedem

Punkt $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ geschlossen:

$$\begin{aligned}\partial_2 \omega_1 &= \partial_2 \left(-\frac{\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right) = -\frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + \frac{\xi_2 \cdot 2\xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} = \frac{\xi_2^2 - \xi_1^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}, \\ \partial_1 \omega_2 &= \partial_1 \left(+\frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right) = \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} - \frac{\xi_1 \cdot 2\xi_1}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} = \frac{\xi_2^2 - \xi_1^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2},\end{aligned}$$

also $\partial_1 \omega_2 - \partial_2 \omega_1 = 0$. Geschlossenheit ist im allgemeinen nicht hinreichend für Exaktheit! \triangleleft

Wir zeigen nun, daß auf *Sterngebieten* die Geschlossenheit einer 1-Form hinreichend ist für Exaktheit:

Satz 15.7 (Lemma von Poincaré) *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Sterngebiet, d.h. es gibt einen Punkt $a \in U$ (das Zentrum), so daß für jeden Punkt $\xi \in U$ die Verbindungstrecke $c_\xi(t) := a + (\xi - a)t$ für $t \in [0, 1]$ vollständig in U liegt. Ist eine differenzierbare 1-Form ω geschlossen auf dem offenen Sterngebiet U , so ist sie auf U auch exakt.*

Beweis. Für $\xi \in U$ setzen wir

$$F(\xi) := \int_{c_\xi} \omega = \int_0^1 dt \omega(a + (\xi - a)t) \circ (\xi - a)$$

Wegen der Offenheit gibt es ein $r > 0$, so daß $\xi + \eta, c_{(\xi+\eta)}(t) \in U$ für $\|\eta\| < r$ und $t \in [0, 1]$. Dann gilt für die partiellen Ableitungen (mit $|h| < r$)

$$\begin{aligned}(\partial_j F)(\xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(\xi + he_j) - F(\xi)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 dt \left(\omega(a + (\xi + he_j - a)t) \circ (\xi + he_j - a) - \omega(a + (\xi - a)t) \circ (\xi - a) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 dt \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i(a + (\xi + he_j - a)t) - \omega_i(a + (\xi - a)t)}{h} (\xi_i + h\delta_{ij} - a_i) \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 dt \omega_j(a + (\xi + he_j - a)t) \\ &= \int_0^1 dt \sum_{i=1}^n t(\partial_j \omega_i)(a + (\xi - a)t) (\xi_i - a_i) + \int_0^1 dt \omega_j(a + (\xi - a)t).\end{aligned}$$

Gelten die Integrationsbedingungen, so folgt mit Kettenregel $(\omega_j \circ c)'(t) = (D\omega_j)(c(t)) \circ c'(t)$

$$(\partial_j F)(\xi) = \int_0^1 dt \sum_{i=1}^n t(\partial_j \omega_i)(a + (\xi - a)t) (\xi_i - a_i) + \int_0^1 dt \omega_j(a + (\xi - a)t)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dt t \frac{d}{dt} (\omega_j(a + (\xi - a)t)) + \int_0^1 dt \omega_j(a + (\xi - a)t) \\
&= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} (t\omega_j(a + (\xi - a)t)) \\
&= (t\omega_j(a + (\xi - a)t)) \Big|_0^1 = \omega_j(\xi) . \quad \square
\end{aligned}$$

Beispiel 15.8 Da die Windungsform ω geschlossen ist, ist sie nach dem Lemma von Poincaré auf Sterngebieten exakt. Ein solches ist z.B. gegeben durch die geschlitzte Ebene $U = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ (die Punkte $(b, 0)$ mit $b \leq 0$ fehlen). Jeder Punkt $(a, 0)$ mit $a \geq 0$ ist mögliches Zentrum des Sterngebietes U . Legen wir das Potential in $(1, 0)$ fest zu $F(1, 0) = 0$, dann ist das Potential in $(\xi_1, \xi_2) = re^{i\phi}$, mit $|\phi| < \pi$ und $r > 0$ gegeben durch Integration von ω z.B. längs der reellen Achse zum Punkt $(r, 0)$ und dann längs des Kreisbogens von re^{i0} nach $re^{i\phi}$:

$$\begin{aligned}
F(re^{i\phi}) &= \int_0^1 dt \omega_1((1 + (r-1)t, 0)) \cdot (r-1) \\
&\quad + \int_0^1 dt \left(\omega_1((r \cos(\phi t), r \sin(\phi t))) \cdot (-r\phi \sin(\phi t)) \right. \\
&\quad \quad \left. + \omega_2((r \cos(\phi t), r \sin(\phi t))) \cdot (r\phi \cos(\phi t)) \right) \\
&= \int_0^1 dt \left(\phi \sin^2(\phi t) + \phi \cos^2(\phi t) \right) = \phi .
\end{aligned}$$

Zurückübersetzt in kartesische Koordinaten ist $F(\xi_1, \xi_2) = \arccos \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$. Dann ist für $\xi_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
(\partial_1 F)(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{-\sin\left(\arccos \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} - \frac{\xi_1^2}{(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})^3} \right) \\
&= -\frac{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}{\xi_2} \cdot \frac{\xi_2^2}{(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})^3} = -\frac{\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} , \\
(\partial_2 F)(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{-\sin\left(\arccos \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}\right)} \cdot \left(-\frac{\xi_1 \xi_2}{(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})^3} \right) \\
&= \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}{\xi_2} \cdot \frac{\xi_1 \xi_2}{(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})^3} = \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} .
\end{aligned}$$

Somit ist, nach stetiger Fortsetzung auch zu Punkten $(\xi_2 = 0, \xi_1 > 0)$, die Funktion $F(\xi_1, \xi_2) = \arccos \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$ auf der geschlitzten Ebene eine Stammfunktion zur Windungsform. ◁

16 Exakte Differentialgleichungen

Eine weiteres wichtiges Anwendungsfeld dieser Methoden ist die Klasse der *exakten Differentialgleichungen*. Dabei geht es ausschließlich um Differentialgleichungen 1. Ordnung für eine Funktion $y(x)$.

Definition 16.1 (Exakte Differentialgleichung) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend und $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung

$$g(x, y) + h(x, y)y'(x) = 0$$

heißt *exakt*, wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß $g(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ und $h(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$. In diesem Fall heißt F die *Stammfunktion* der Differentialgleichung.

Die Stammfunktion einer exakten Differentialgleichung ist bis auf eine Konstante eindeutig. Die Lösungen $y(x)$ einer exakten Differentialgleichung ergeben sich wie folgt: Ist $F(x, y)$ eine Stammfunktion, dann löse man die Gleichung $F(x, y(x)) = C$, für $C = \text{const}$, lokal mittels des Satzes über implizite Funktionen auf. Diese Lösung ist dann eine durch C parametrisierte Kurvenschar. Denn ist $h(x, y) = (\partial_y F)(x_0, y_0) \neq 0$, dann gilt in einer Umgebung von (x_0, y_0)

$$y'(x) = -\frac{(\partial_x F)(x, y)}{(\partial_y F)(x, y)} = -\frac{g(x, y)}{h(x, y)}.$$

Somit wird die exakte Differentialgleichung zurückerhalten.

Beispiel 16.2 Die Differentialgleichung $2y y' + 2x = 0$ ist exakt, denn $F(x, y) = x^2 + y^2$ ist Stammfunktion. Die Niveaukurven $F(x, y) = R^2$ sind konzentrische Kreise um den Nullpunkt. \triangleleft

Über die Verbindung $g(x, y) + h(x, y)y'(x) = 0 \Leftrightarrow \omega = g(x, y)dx + h(x, y)dy$ und die Identifizierung der Stammfunktionen erhalten wir:

Satz 16.3 (Notwendige Bedingung für Exaktheit) *Auf einer offenen und zusammenhängenden Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sei die Differentialgleichung $g(x, y) + h(x, y)y' = 0$ gegeben mit stetig differenzierbaren Abbildungen $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ist die Differentialgleichung exakt, so gilt*

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in U. \quad \square$$

Für Sterngebiete läßt sich die Stammfunktion über das Kurvenintegral berechnen:

Satz 16.4 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein offenes Sterngebiet. Die Abbildungen $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar, und es gelte $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$ für alle $(x, y) \in U$. Sei $(x_0, y_0) \in U$ ein beliebiger Anfangspunkt und $c(t) = (x(t), y(t))$ für $t \in [0, 1]$ eine beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurve in U mit $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ und $(x(1), y(1)) = (x, y)$. Dann ist

$$\begin{aligned} F(x, y) &:= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (g(x, y)dx + h(x, y)dy) \\ &= \int_0^1 dt (g(x(t), y(t))x'(t) + h(x(t), y(t))y'(t)) \end{aligned}$$

eine Stammfunktion der Differentialgleichung $g(x, y) + h(x, y)y' = 0$. \square

Beispiel 16.5 Gesucht wird für geeignete Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ eine Lösung $(x, y) \in I \times J$ der Differentialgleichung

$$\underbrace{\left(1 - \frac{2x}{y(x)}\right)}_{g(x,y)} + \underbrace{\left(\frac{2}{(y(x))^3} + \frac{x^2 - 1}{(y(x))^2}\right)}_{h(x,y)} y'(x) = 0$$

Wegen $\partial_y(1 - \frac{2x}{y}) = \frac{2x}{y^2} = \partial_x(\frac{2}{y^3} + \frac{x^2-1}{y^2})$ ist die zugehörige 1-Form $\omega = gdx + hdy$ geschlossen. Sei $J \subseteq \mathbb{R}_+^\times$. Da $I \times J$ ein Sterngebiet ist, ist eine Stammfunktion gegeben z.B. durch Integration von ω längs eines horizontalen Weges $c(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0)$ und dann längs eines vertikalen Weges $c(t) = (x, y_0 + t(y - y_0))$, für $(x_0, y_0) \in I \times J$ und jeweils $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^1 dt g(x_0 + t(x - x_0), y_0) \cdot (x - x_0) + \int_0^1 dt h(x, y_0 + t(y - y_0)) \cdot (y - y_0) \\ &= \int_0^1 dt \left(1 - \frac{2(x_0 + t(x - x_0))}{y_0}\right) (x - x_0) \\ &\quad + \int_0^1 dt \left(\frac{2}{(y_0 + t(y - y_0))^3} + \frac{x^2 - 1}{(y_0 + t(y - y_0))^2}\right) \cdot (y - y_0) \\ &= \left(1 - \frac{x + x_0}{y_0}\right) (x - x_0) - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y_0^2} - \frac{x^2 - 1}{y} + \frac{x^2 - 1}{y_0} \\ &= x - \frac{x^2 - 1}{y} - \frac{1}{y^2} - C_0, \quad C_0 = x_0 - \frac{x_0^2 - 1}{y_0} - \frac{1}{y_0^2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung der Differentialgleichung gegeben durch die implizit definierten Kurven $F(x, y) = C - C_0$, also $(x - C)y^2 - (x^2 - 1)y - 1 = 0$. Die Lösung ist

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1 \pm \sqrt{(x^2 - 1)^2 + 4(x - C)}}{2(x - C)} & \text{für } x > C, \\ -\frac{1}{C^2 - 1} & \text{für } x = C \neq 1, \\ \frac{1 - x^2 \pm \sqrt{(1 - x^2)^2 - 4(C - x)}}{2(C - x)} & \text{für } x < C, \quad (1 - x^2)^2 > 4(C - x). \end{cases}$$

Je nach Anfangsbedingung ist nur eines der Vorzeichen realisiert. Nehmen wir z.B. $C = 0$, dann ist in der Kurve durch $(x_0, y_0) = (1, 1)$ für $x > 0$ das positive Vorzeichen realisiert. Diese Lösung setzt sich stetig fort zu $-0.22527 \leq x \leq 0$, wobei das negative Vorzeichen realisiert ist. Der andere Zweig würde durch $(x_0, y_0) = (1, -1)$ gehen und sich zu $x > 0$ fortsetzen, ist aber durch die Bedingung $y > 0$ ausgeschlossen. \triangleleft

Manchmal ist eine Differentialgleichung $g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$ nicht exakt, aber durch Multiplikation mit einem *integrierenden Faktor* $m(x, y)$ exakt zu machen, d.h. $m(x, y) g(x, y) dx + m(x, y) h(x, y) dy = 0$ ist exakt. Ein integrierender Faktor kann relativ leicht gefunden werden, wenn er nur von x oder nur von y abhängt. Offenbar ist die zugehörige 1-Form $m(x)g(x, y)dx + m(x)h(x, y)dy$ genau dann geschlossen, wenn gilt

$$\frac{(\partial_y g)(x, y) - (\partial_x h)(x, y)}{h(x, y)} = \frac{m'(x)}{m(x)} = (\ln m)'(x) .$$

Das erfordert, daß die linke Seite unabhängig von y ist. Analog ist $m(y)g(x, y)dx + m(y)h(x, y)dy$ genau dann geschlossen, wenn

$$\frac{(\partial_x h)(x, y) - (\partial_y g)(x, y)}{g(x, y)} = \frac{m'(y)}{m(y)} = (\ln m)'(y) .$$

Beispiel 16.6 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\underbrace{(1 - x^2 y(x))}_g + \underbrace{(x^2 y(x) - x^3)}_h y'(x) = 0 .$$

Sie ist nicht exakt, aber

$$\frac{(\partial_y g)(x, y) - (\partial_x h)(x, y)}{h(x, y)} = \frac{-x^2 - (2xy - 3x^2)}{x^2 y - x^3} = -\frac{2}{x}$$

ist unabhängig von y . Somit führt $(\ln m)'(x) = -2(\ln x)'$ auf den integrierenden Faktor $m(x) = \frac{C}{x^2}$, d.h.

$$\left(\frac{1}{x^2} - y(x) \right) + (y(x) - x)y'(x) = 0$$

ist eine exakte Differentialgleichung. Eine Stammfunktion auf einem Sterngebiet

ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \int_0^1 dt \left(\frac{1}{(x_0 + (x - x_0)t)^2} - y_0 \right) (x - x_0) \\
 &\quad + \int_0^1 dt ((y_0 + (y - y_0)t) - x)(y - y_0) \\
 &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} - y_0(x - x_0) + (y_0 - x)(y - y_0) + \frac{1}{2}(y - y_0)^2 \\
 &= -\frac{1}{x} - xy + \frac{1}{2}y^2 - C_0, \quad C_0 = -\frac{1}{x_0} - x_0y_0 + \frac{1}{2}y_0^2.
 \end{aligned}$$

Die Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung sind somit

$$y(x) = x \pm \sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + C}. \quad \triangleleft$$

17 Holomorphe Funktionen

Wir behandeln nun die komplexe Differenzierbarkeit von komplexwertigen Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{C}$.

Definition 17.1 Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* im Punkt $z \in U$, falls der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z, w \neq z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

existiert. Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *holomorph* im Punkt $z \in U$, wenn f in einer offenen Umgebung $V \subseteq U$ von z komplex differenzierbar ist, und *holomorph auf U* , falls f in jedem Punkt von U holomorph ist.

Wie üblich wird die Konvergenz bezüglich des Abstands $|\cdot|$ auf \mathbb{C} definiert. Wie im Reellen folgt aus der komplexen Differenzierbarkeit die Stetigkeit, außerdem die lineare Approximierbarkeit nach Satz 23.4 aus dem 1. Semester: Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in $z_0 \in U$, dann gibt es ein $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \phi(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z)}{z - z_0} = 0.$$

Für komplex-differenzierbare Funktionen f, g gelten die üblichen Rechenregeln

$$\begin{aligned}
 (f + g)'(z) &= f'(z) + g'(z), & (f \cdot g)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \\
 (f \circ g)'(z) &= f'(g(z)) \cdot g'(z).
 \end{aligned}$$

Analog zu Satz 23.12 aus dem 1. Semester gilt:

Satz 17.2 Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ ist im Inneren ihres Konvergenzkreises $K_R(0)$ komplex differenzierbar und damit (für $R > 0$) holomorph in $K_R(0)$. Ihre Ableitung ist $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$. \square

Wir können $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auch auffassen als $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und komplexe und reelle Differenzierbarkeit vergleichen. Wir werden oft $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x + iy \in \mathbb{C}$ identifizieren.

Satz 17.3 Es sei $U \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ offen.

- i) Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ sei in $z = x + iy \in U$ komplex differenzierbar. Dann sind $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell nach x, y differenzierbar, und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v.$$

- ii) Die Funktionen $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig partiell differenzierbar auf U , und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Dann ist $f = u + iv$ holomorph auf U .

Beweis. i) Ist f komplex differenzierbar in z , dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_x f(x + iy) &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{1}{h} \left(f(x + h + iy) - f(x + iy) \right) = f'(z), \\ \partial_y f(x + iy) &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{i}{ih} \left(f(x + i(y + h)) - f(x + iy) \right) = i f'(z), \end{aligned}$$

also $\partial_x f = -i \partial_y f$ und nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$\partial_x u + i \partial_y v = -i \partial_y u + \partial_x v.$$

ii) Nach Voraussetzung sowie Satz 1.8 ist $f = u + iv$ total differenzierbar, und das Differential ist gegeben durch die Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen:

$$f(x + h_1 + i(y + h_2)) = f(x + iy) + h_1 (\partial_x f)(x + iy) + h_2 (\partial_y f)(x + iy) + \phi(h_1 + ih_2)$$

mit $\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{|\phi(h_1 + ih_2)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$. Unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt

$$\begin{aligned} & \frac{f(x + h_1 + i(y + h_2)) - f(x + iy)}{h_1 + ih_2} \\ &= \frac{1}{h_1 + ih_2} \left(h_1 (\partial_x u + i \partial_x v)(x + iy) + h_2 (\partial_y u + i \partial_y v)(x + iy) \right) + \frac{\phi(h_1 + ih_2)}{h_1 + ih_2} \\ &= \partial_x u + i \partial_x v + \frac{\phi(h_1 + ih_2)}{h_1 + ih_2}. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{|\phi(h_1 + ih_2)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$ existiert der Limes

$$f'(x + iy) = \lim_{h_1 + ih_2 \rightarrow 0} \frac{f(x + h_1 + i(y + h_2)) - f(x + iy)}{h_1 + ih_2} = \partial_x u + i\partial_x v .$$

Die Rechnung gilt für beliebige $x + iy \in U$, also ist f holomorph auf U . \square

Beispiel 17.4 Es sei $f(z) = z\bar{z} = x^2 + y^2$. Dann ist f komplex differenzierbar in 0, aber nicht in $z \neq 0$ und damit nirgends holomorph. Zwar gilt $f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$, aber mit $u = x^2 + y^2$ und $v = 0$ ergibt sich

$$\partial_x u = 2x, \quad \partial_y u = 2y, \quad \partial_x v = \partial_y v = 0 .$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten also nur in $x = y = 0$, somit ist f in keiner Umgebung von 0 komplex differenzierbar. \triangleleft

18 Der Cauchysche Integralsatz

Holomorphe Funktionen (also komplexwertige Funktionen, die in einer Umgebung komplex differenzierbar sind) haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie sogar beliebig oft differenzierbar sind. Wir werden das in mehreren Teilschritten beweisen. Der erste Schritt ist die Betrachtung von Kurvenintegralen.

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Jede stetige komplexwertige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definiert eine 1-Form $\omega = fdz = fdx + ifdy : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ durch die Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Ist $c(t) = x(t) + iy(t) \equiv (x(t), y(t))$ (stückweise) stetig differenzierbar, so folgt für das sich ergebende Kurvenintegral der 1-Form fdz längs c

$$\int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta dt f(c(t))x'(t) + if(c(t))y'(t) \equiv \int_\alpha^\beta dt f(c(t))c'(t) .$$

Die Standardabschätzungen liefern:

Satz 18.1 Sei $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ eine differenzierbare Kurve und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\left| \int_c dz f(z) \right| \leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f(c(t))| L(c) ,$$

wobei $L(c) := \int_a^b dt \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ die Bogenlänge von C ist. \square

Ist f stetig komplex differenzierbar auf U , so liefern die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\partial_y f = i\partial_x f$ und damit die *Geschlossenheit* von $fdx + ifdy$. Nach dem Lemma von Poincaré ist dann fdz exakt auf Sterngebieten und läßt sich dort wegunabhängig integrieren. Wir zeigen nun, daß das sogar *ohne* die Voraussetzung der *stetigen* Differenzierbarkeit gilt. Zunächst sei $c = \partial\Delta$ der Rand eines Dreiecks Δ .

Satz 18.2 (Lemma von Goursat) *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und Δ ein offenes Dreieck mit $\bar{\Delta} = \Delta \cup \partial\Delta \subseteq U$. (Sind $a, b, c \in U$ die Eckpunkte von Δ , dann ist $\partial\Delta = \vec{ab} \cup \vec{bc} \cup \vec{ca}$ mit positivem Umlaufsinn, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn.) Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} dz f(z) = 0 .$$

Beweis. Durch Verbinden der Seitenmittelpunkte entstehen aus Δ vier kongruente Dreiecke $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_m$. Werden diese Dreiecke positiv umlaufen, dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} dz f(z) = \int_{\partial\Delta_a} dz f(z) + \int_{\partial\Delta_b} dz f(z) + \int_{\partial\Delta_c} dz f(z) + \int_{\partial\Delta_m} dz f(z) ,$$

da in der Summe die Kanten von $\partial\Delta_m$ zweimal in entgegengesetzte Richtung durchlaufen werden. Ist Δ_1 jenes Teildreieck, für das das Kurvenintegral den betragsmäßig größten Wert hat, dann gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta} dz f(z) \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} dz f(z) \right| .$$

Das Dreieck Δ_1 werde erneut in 4 Teildreiecke zerlegt, Δ_2 sei jenes mit betragsmäßig größtem Kurvenintegral. Durch Wiederholung des Verfahrens entsteht eine Folge $\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n$ von Dreiecken mit

$$\left| \int_{\partial\Delta} dz f(z) \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} dz f(z) \right| .$$

Wegen der Vollständigkeit von \mathbb{C} gibt es ein $z_0 \in \Delta_n$ für alle n . Nach Voraussetzung ist f in z_0 komplex differenzierbar, d.h. es gibt eine Funktion $r : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + |z - z_0|r(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} r(z) = 0 .$$

Da jede polynomiale 1-Form eine Stammfunktion besitzt, gilt

$$\int_{\partial\Delta_n} dz (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)) = 0 .$$

Es sei $L := L(\Delta)$ der Umfang von Δ . Dann ist $L(\Delta_n) = 2^{-n}L$. Wegen $z_0 \in \Delta_n$ ist $|z - z_0| \leq 2^{-n}L$ für alle $z \in \partial\Delta_n$. Somit gilt nach Satz 18.1

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} dz f(z) \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} dz |z - z_0|r(z) \right| \leq 2^{-n}L \cdot \sup_{z \in \partial\Delta_n} |z - z_0||r(z)| \leq 4^{-n}L^2 \sup_{z \in \bar{\Delta}_n} |r(z)| .$$

Somit gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta} dz f(z) \right| \leq L^2 \sup_{z \in \bar{\Delta}_n} |r(z)| .$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht $z \rightarrow z_0$ und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \bar{\Delta}_n} |r(z)| = 0$. Das ist die Behauptung. \square

Lemma 18.3 *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve und ω eine stetige 1-Form auf U . Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Unterteilung $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$, so daß für die zugehörigen Sekanten $\tilde{c}_j(t) := c(t_{j-1}) + \frac{t-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}(c(t_j) - c(t_{j-1}))$, mit $t \in [t_{j-1}, t_j]$, von c gilt*

$$\left| \int_c \omega - \sum_{j=1}^m \int_{\tilde{c}_j} \omega \right| < \epsilon.$$

Beweis. Durch leichte Abwandlung des Beweises von Satz 14.12. Wegen der Stetigkeit von ω_i und der Offenheit von U gibt es zu jedem $t \in [\alpha, \beta]$ eine offene Kugel $K_{\delta_t}(c(t)) \subseteq U$, so daß $|\omega_i(c(t)) - \omega_i(a)| < \frac{\epsilon}{4nL(c)}$ für alle $a \in K_{\delta_t}(c(t))$. Dann ist $|\omega_i(a) - \omega_i(b)| < \frac{\epsilon}{2nL(c)}$ für alle $a, b \in K_{\delta_t}(c(t))$. Die Menge $\bigcup_{t \in [\alpha, \beta]} K_{\delta_t}(c(t))$ ist eine Überdeckung der Spur von c . Da die Spur von c kompakt ist als Bild von $[\alpha, \beta]$ unter einer stetigen Abbildung, gibt es endlich viele offene Kugeln $K_1, \dots, K_m \subseteq U$ mit Mittelpunkten $c(\tau_1), \dots, c(\tau_m)$, welche die Spur von c überdecken, und für die gilt $|\omega_i(a_j) - \omega_i(b_j)| < \frac{\epsilon}{2nL(c)}$ für alle $a_j, b_j \in K_j$. Sei $t_0 = \alpha$ und $t_m = \beta$. Nach aufsteigender Anordnung entsprechend des Kurvenparameters sei $c(t_0) \in K_1$ und $c(t_m) \in K_m$. Weiterhin gibt es zu jedem $1 \leq j < m$ einen Punkt $c(t_j) \in K_j \cap K_{j+1}$ (mit $t_j > t_k$ für $j > k$). Nach Konstruktion ist $c([t_{j-1}, t_j]) \subseteq K_j$ und $\tilde{c}_j([t_{j-1}, t_j]) \subseteq K_j$ sowie $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Wegen $\int_{t_{j-1}}^{t_j} dt c'_i(t) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \tilde{c}'_{ji}(t) = c_i(t_j) - c_i(t_{j-1})$ gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_c \omega - \sum_{j=1}^m \int_{\tilde{c}_j} \omega \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt (\omega_i(c(t))c'_i(t) - \omega_i(c(\tau_j))c'_i(t) + \omega_i(c(\tau_j))\tilde{c}'_{ji}(t) - \omega_i(\tilde{c}_j(t))\tilde{c}'_{ji}(t)) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \left(|\omega_i(c(t)) - \omega_i(c(\tau_j))| |c'_i(t)| + |\omega_i(\tilde{c}_j(t)) - \omega_i(c(\tau_j))| |\tilde{c}'_{ji}(t)| \right) < \epsilon \end{aligned}$$

nach ähnlichen Schritten wie im Beweis von Satz 14.12 sowie der Supremums-Eigenschaft der Bogenlänge $\sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \|\tilde{c}_j\| \leq L(c)$. \square

Definition 18.4 Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.

- i) Zwei stetige Kurven $c_0, c_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ mit $c_0(\alpha) = c_1(\alpha) = a$ und $c_0(\beta) = c_1(\beta) = b$ heißen *homotop* in U , wenn sie in U stetig ineinander deformiert werden können, d.h. wenn es eine stetige Abbildung $H : [\alpha, \beta] \times [0, 1] \mapsto U$ gibt mit $H(t, 0) = c_0(t)$ und $H(t, 1) = c_1(t)$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$ sowie $H(\alpha, s) = a$ und $H(\beta, s) = b$ für alle $s \in [0, 1]$.

- ii) Eine geschlossene stetige Kurve $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ mit $c(\alpha) = c(\beta) = a$ heißt *kontrahierbar* in U (oder *nullhomotop*), wenn sie homotop zum Punkt $c_0(t) = a$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$ ist.
- iii) U heißt *einfach zusammenhängend*, wenn U zusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve in U kontrahierbar ist.

Satz 18.5 (Cauchyscher Integralsatz) *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt:*

- i) Für jede in U kontrahierbare stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ gilt $\int_c dz f(z) = 0$.
- ii) Sind c_0, c_1 homotope stückweise stetig differenzierbare Kurven in U mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt, dann gilt

$$\int_{c_0} dz f(z) = \int_{c_1} dz f(z) .$$

- iii) Ist U einfach zusammenhängend und $c : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ eine beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurve von $c(\alpha) = z_0$ nach $c(\beta) = z$, dann ist das Integral

$$F(z) := \int_{z_0}^z dw f(w) = \int_c dw f(w)$$

unabhängig von c und eine holomorphe Stammfunktion zu f , d.h. es gilt $F'(z) = f(z)$.

Beweis. i) Sollte sich die Kurve c selbst schneiden, so überlegt man sich, daß das Kurvenintegral zerfällt in eine (nicht eindeutige) Summe von Integralen längs Kurven ohne Selbstschnittpunkte. Es genügt dann, i) nur für Kurven ohne Selbstschnittpunkte zu beweisen. Nach Lemma 18.3 gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ einen geschlossenen Polygonzug $P(c)$ in U , der wegen der Offenheit von U auch ohne Selbstschnittpunkte gewählt werden kann, so daß $\left| \int_c \omega - \int_{P(c)} \omega \right| < \epsilon$. Nach Konstruktion ist mit c auch $P(c)$ in U kontrahierbar. Es sei $Q(c)$ das Innere von $P(c)$, welches sich triangulieren läßt, d.h. es gibt endlich viele abgeschlossene Dreiecke $\Delta_1, \dots, \Delta_k \subseteq U$, welche sich höchstens in Ecken oder Kanten schneiden, mit $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_k = Q(c)$ und $\partial(\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_k) = P(c)$. Nach dem Lemma von Goursat ist $\int_{\partial\Delta_i} dz f(z) = 0$ für jedes Dreieck Δ_i . In der Summe heben sich die Beiträge aller inneren Kanten weg, so daß

$$0 = \sum_{i=1}^k \int_{\partial\Delta_i} dz f(z) = \int_{P(c)} dz f(z) .$$

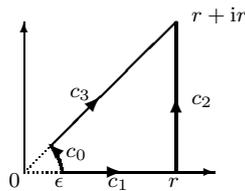
Somit ist $\left| \int_c dz f(z) \right| < \epsilon$ für beliebiges $\epsilon > 0$, also $\int_\gamma dz f(z) = 0$.

ii) folgt aus i) für die kontrahierbare Kurve $c = c_0 \cup (-c_1)$, wobei $-c_1$ in umgekehrte Richtung wie c_1 durchlaufen wird, was $\int_{-c_1} dz f(z) = - \int_{c_1} dz f(z)$ ergibt.

iii) folgt aus ii) zusammen mit Satz 15.4. □

Der Cauchysche Integralsatz ist die Grundlage der gesamten Funktionentheorie. Seine Konsequenzen sind grundlegend verschieden zur reellen Differentialrechnung. Außerdem erlaubt er bereits die Berechnung komplizierterer reeller Integrale durch Schließen des Integrationsweges im Komplexen.

Beispiel 18.6 Gesucht ist (für noch festzulegende $s \in \mathbb{R}$) das Riemann-Integral $\int_0^\infty dt t^{2s-1} e^{-it^2}$. Die Funktion $f(z) = z^{2s-1} e^{-z^2}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$, so daß das Kurvenintegral über eine außerhalb von 0 liegende geschlossene Kurve, z.B. die folgende Kurve $(c_1, c_2, -c_3, -c_0)$, verschwindet:



$$\int_{c_0} dz f(z) + \int_{c_3} dz f(z) = \int_{c_1} dz f(z) + \int_{c_2} dz f(z) .$$

Mit $c_2(t) = r + it$ ist $|f(c_2(t))| = \sqrt{r^2 + t^2}^{2s-1} e^{-r^2 + t^2} \leq \max(r^{2s-1}, (\sqrt{2}r)^{2s-1}) e^{-r^2 + rt}$ und damit

$$\left| \int_{c_2} dz f(z) \right| \leq \int_0^r dt |f(c_2(t)) c_2'(t)| = c_s r^{2s-1} e^{-r^2} \int_0^r dt e^{rt} = c_s \frac{1 - e^{-r^2}}{r^2 - 2s} .$$

Für $s < 1$ konvergiert das Integral im Limes $r \rightarrow \infty$ gegen 0.

Mit $c_0(t) = \epsilon e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$, ist $|f(c_0(t))| = \epsilon^{2s-1} e^{-\epsilon^2 \cos(2t)} \leq \epsilon^{2s-1}$ und damit

$$\left| \int_{c_0} dz f(z) \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt |f(c_0(t)) c_0'(t)| \leq \frac{\pi}{4} \epsilon^{2s} .$$

Für $s > 0$ konvergiert das Integral im Limes $\epsilon \rightarrow 0$, also gilt für $0 < s < 1$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int_{c_3} f(z) dz &= \lim_{r \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int_{c_1} f(z) dz + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_2} f(z) dz - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{c_0} f(z) dz \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^r dt t^{2s-1} e^{-t^2} = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^r (2t dt) (t^2)^{s-1} e^{-t^2} \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(s) . \end{aligned}$$

Andererseits ist $c_3(t) = e^{i\frac{\pi}{4}}t$ mit $t \in [\epsilon, \sqrt{2}r]$, also $(c_3(t))^2 = it^2$ und

$$\lim_{r \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\sqrt{2}r} dt \underbrace{e^{i\frac{\pi}{4}(2s-1)t^{2s-1}}}_{f(c(t))} e^{-it^2} \cdot \underbrace{e^{i\frac{\pi}{4}}}_{c'(t)} = e^{\frac{i\pi s}{2}} \int_0^{\infty} dt t^{2s-1} e^{-it^2}.$$

Somit gilt $\int_0^{\infty} dt t^{2s-1} e^{-it^2} = \frac{1}{2} \Gamma(s) e^{-\frac{i\pi s}{2}}$. Für $s = \frac{1}{2}$ ergibt sich das *Fresnel-Integral* $\int_0^{\infty} dt e^{-it^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}(1-i)$. Allgemein erhalten wir nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil mit $e^{-it^2} = \cos t^2 - i \sin t^2$ schließlich für $0 < s < 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt t^{2s-1} \cos(t^2) &= \frac{1}{2} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}, & \int_0^{\infty} dt t^{2s-1} \sin(t^2) &= \frac{1}{2} \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}, \\ \int_0^{\infty} dx x^{s-1} \cos x &= \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}, & \int_0^{\infty} dx x^{s-1} \sin x &= \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}. \end{aligned}$$

Im letzten Integral existiert der Limes $s \rightarrow 0$ mit $\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$. Der Limes $s \rightarrow 1$ ist nicht möglich. ◁

Beispiel 18.7 (Hauptzweig des komplexen Logarithmus) Es sei $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ die geschlitzte komplexe Ebene (die reellen Zahlen ≤ 0 fehlen). Jede geschlossene Kurve $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}^-$ ist kontrahierbar. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ ist wegen $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ holomorph auf \mathbb{C}^- und kann deshalb wegunabhängig integriert werden. Es sei

$$L(z) = \int_1^z \frac{dz}{z} := \int_c \frac{dz}{z} \quad (c \text{ ist beliebige Kurve zwischen } 1 \text{ und } z \text{ in } \mathbb{C}^-)$$

Dann ist $L(z)$ holomorph auf \mathbb{C}^- mit $L'(z) = \frac{1}{z}$ und $L(1) = 0$. Es gilt $(ze^{-L(z)})' = e^{-L(z)}(1 - zL'(z)) = 0$, also ist $ze^{-L(z)} = \text{const} = 1 \cdot e^{-L(1)} = 1$, d.h.

$$e^{L(z)} = z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Man nennt $L(z)$ den Hauptzweig des komplexen Logarithmus. Mit der Kurve

$$c = c_1 \cup c_2, \quad c_1(t) = t : [1, r] \rightarrow \mathbb{C}, \quad c_2(t) = re^{it} : [0, \varphi] \rightarrow \mathbb{C}$$

von 1 über r nach $z = re^{i\varphi}$ ergibt sich mit $c_1'(t) = 1$ und $c_2'(t) = ire^{it}$

$$L(z) = \int_1^r dt \frac{1}{t} \cdot 1 + \int_0^{\varphi} dt \frac{1}{re^{i\varphi}} \cdot ire^{it} = r + i\phi. \quad \text{◁}$$

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine nullstellenfreie Funktion auf einer einfach zusammenhängenden offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, dann wird durch $e^F = f$ der *holomorphe Logarithmus* F von f definiert. Wie in Beispiel 18.7 ist

$$F(z) = \int_{z_0}^z dw \frac{f'(w)}{f(w)}$$

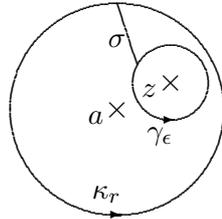
eine holomorphe Stammfunktion zu $\frac{f'}{f}$, und es gilt $fe^{-F} = \text{const.}$ Wegen $e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}$ unterscheiden sich zwei holomorphe Logarithmen nur um Vielfache von $2\pi i$ und sind somit durch Angabe ihres Wertes in einem Punkt $z_0 \in U$ eindeutig bestimmt. Über den holomorphen Logarithmus können komplexe Potenzen nullstellenfreier Funktionen definiert werden als $f^\alpha = e^{\alpha F}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$. \triangleleft

19 Die Cauchysche Integralformel

Satz 19.1 (Cauchysche Integralformel) *Es sei f holomorph in einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, welche die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K_r(a)}$ mit Mittelpunkt $a \in U$ und Radius r enthält. Der Umfang der Kreisscheibe ist dann die Kurve $\kappa_r(t) = a + re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt für jeden Punkt $z \in K_r(a)$ im Inneren des Kreises*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Beweis. Zu $z \in K_r(a)$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K_\epsilon(z)}$ um z mit Radius ϵ im Inneren von $K_r(a)$ liegt. Sei $\gamma_\epsilon(\tau) = z + \epsilon e^{i\tau}$ mit $\tau \in [0, 2\pi]$ der Umfang. Der entstehende (asymmetrische) Kreisring $KR_{r,\epsilon} := \overline{K_r(a)} \setminus K_\epsilon(z)$ werde aufgeschnitten entlang einer beliebigen (stückweise differenzierbaren) Kurve $\sigma \in KR_{r,\epsilon}$.



Dann ist $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ bezüglich ζ holomorph in dem so entstehenden einfach zusammenhängenden Gebiet Γ , das von den Kurven $\kappa_r, \sigma, -\gamma_\epsilon, -\sigma$ berandet wird. Dabei werden die beiden Kurven σ in verschiedene Richtungen durchlaufen, so daß sich die Randintegrale wegheben. Außerdem wird γ_ϵ in negative Richtung durchlaufen. Somit gilt nach Satz 18.5

$$\int_{\kappa_r} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \int_{\gamma_\epsilon} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \int_{\gamma_\epsilon} d\zeta \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + f(z) \int_{\gamma_\epsilon} d\zeta \frac{1}{\zeta - z}.$$

Insbesondere ist die linke Seite unabhängig von ϵ , also können wir den Limes $\epsilon \rightarrow 0$ betrachten. Da f in einer Umgebung von z komplex differenzierbar ist, ist $\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ auf $\overline{K_\epsilon(z)}$ beschränkt. Da der Umfang $L(\gamma_\epsilon)$ mit ϵ gegen 0 geht, ist

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} d\zeta \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = 0$. Schließlich gilt auf dem inneren Kreis $\frac{1}{\zeta(\gamma_\epsilon(\tau)) - z} = \frac{1}{\epsilon e^{i\tau}}$ und $\gamma_\epsilon'(\tau) = i\epsilon e^{i\tau}$, damit

$$\int_{\gamma_\epsilon} d\zeta \frac{1}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} dt \frac{i\epsilon e^{it}}{\epsilon e^{it}} = 2\pi i,$$

was die Cauchysche Integralformel beweist. \square

Entscheidend für die gesamte Funktionentheorie ist die Tatsache, daß man den Wert $f(z)$ durch ein Kurvenintegral berechnen kann, wobei die Kurve *außerhalb* von problematischen Punkten der Funktion gewählt werden kann. Außerdem geht der Punkt z im Kurvenintegral gar nicht in die Funktion f ein, sondern tritt nur im Faktor $\frac{1}{\zeta-z}$ auf. Dadurch lassen sich bemerkenswerte Aussagen gewinnen.

Satz 19.2 (Potenzreihenentwicklung) *Eine holomorphe Funktion f auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ kann in jeder offenen Kreisscheibe $K_\rho(a) \subseteq U$ in eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ entwickelt werden. Der Konvergenzradius ist mindestens so groß wie der Abstand des Mittelpunktes a zum Rand von U . Die Entwicklungskoeffizienten sind gegeben durch die Integrale*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

für einen beliebigen Radius $0 < r < \rho$. Ist $|f(\zeta)| < M$ für alle $\zeta \in \partial K_r(a)$, dann können die Koeffizienten abgeschätzt werden durch $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$.

Beweis. Für $z \in K_r(a)$ mit $r < \rho$ und $\zeta \in \partial K_r(a)$ gibt es eine reelle Zahl $0 < q < 1$, so daß $|\frac{z-a}{\zeta-a}| \leq 1 - q$. Dann gilt

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n,$$

wobei die Reihe, die durch $\sum_{n=0}^{\infty} (1-q)^n = \frac{1}{q}$ majorisiert wird, *gleichmäßig* konvergent ist. Damit vertauschen Summe und Integral, und es gilt

$$f(z) = \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \right) (z-a)^n.$$

Die Abschätzung ergibt sich aus $|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}| \leq \frac{M}{r^{n+1}}$ für alle $\zeta \in \partial K_r(a)$ und der Länge $2\pi r$ des Randes. \square

Als wichtige Konsequenz ergibt sich:

Satz 19.3 *Jede holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist beliebig oft komplex differenzierbar, alle Ableitungen $f^{(k)}$ sind holomorph und gegeben durch*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}, \quad z \in K_r(a). \quad \square$$

Diese Aussage ist grundlegend verschieden von der reellen Differentialrechnung: Für eine reell differenzierbare Funktion muß die Ableitung nicht einmal stetig sein (z.B. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$). Selbst wenn eine Funktion beliebig oft reell differenzierbar ist, muß sie nicht in eine Potenzreihe entwickelbar sein (z.B. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ in $x = 0$).

Beispiel 19.4 Für $c(t) = 1 + e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$ ist

$$\begin{aligned} \int_c \frac{d\zeta}{(\zeta + 1)(\zeta - 1)^2} &= \int_{\partial K_1(1)} \frac{d\zeta}{2} \left(\frac{1}{\zeta - 1} - \frac{1}{\zeta + 1} \right) \frac{1}{(\zeta - 1)} \\ &= \int_{\partial K_1(1)} \frac{d\zeta}{4} \left(\frac{2}{(\zeta - 1)^2} - \frac{1}{\zeta - 1} + \frac{1}{\zeta + 1} \right). \end{aligned}$$

Mit $f_1(\zeta) = 1$ und $z = 1 \in K_1(1)$ gilt

$$\int_{\partial K_1(1)} d\zeta \frac{1}{(\zeta - 1)^2} = \int_{\partial K_1(1)} d\zeta \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \Big|_{z=1 \in K_1(1)} = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(z) = 0.$$

Im dritten Integral wird wegen $z = -1 \notin K_1(1)$ über eine auf $K_1(1)$ holomorphe Funktion integriert, deshalb ist nach Cauchyschem Integralsatz

$$\int_{\partial K_1(1)} d\zeta \frac{1}{\zeta + 1} = \int_{\partial K_1(1)} d\zeta \frac{1}{\zeta - z} \Big|_{z=-1 \notin K_1(1)} = 0.$$

Schließlich liefert die Cauchysche Integralformel

$$\int_c \frac{d\zeta}{(\zeta + 1)(\zeta - 1)^2} = -\frac{1}{4} \int_{\partial K_1(1)} \frac{1}{\zeta - z} \Big|_{z=1 \in K_1(1)} = -\frac{1}{4} \cdot 2\pi i = -\frac{i\pi}{2}. \quad \triangleleft$$

Satz 19.5 Ist $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine in $K_R(z_0)$ konvergente Potenzreihe, dann kann f um jeden Punkt $w \in K_R(z_0)$ in eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - w)^n$ entwickelt werden. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist mindestens $R - |w - z_0|$, und es gilt $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k (w - z_0)^{k-n}$.

Beweis. f ist holomorph in $w \in K_R(z_0)$ und deshalb in eine Potenzreihe entwickelbar. Der Konvergenzradius folgt aus Satz 19.2, sowie

$$b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(w) = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1) \cdots (k-n+1) (w - z_0)^{k-n}. \quad \square$$

Oft ist der Konvergenzradius der unentwickelten Reihe größer als $R - |w - c|$, so daß die unentwickelte Reihe die Funktion f über $K_R(c)$ hinaus fortsetzt. Man spricht dann von einer *analytischen Fortsetzung* von f .

Beispiel 19.6 Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ mit Konvergenzradius $R = 1$. Wir entwickeln f um $w = -\frac{1}{2}$. Innerhalb des Konvergenzkreises ist

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{\frac{3}{2} - (z + \frac{1}{2})} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \left(z + \frac{1}{2} \right) \right)^n.$$

Die Reihe konvergiert für $|z + \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$ und wird damit auf einen größeren Kreis analytisch fortgesetzt. ◀

Wir zeigen, daß eine mögliche analytische Fortsetzung eindeutig ist:

Satz 19.7 *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Für zwei holomorphe Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

- i) $f = g$
- ii) *Die Identitätsmenge $\{w \in U : f(w) = g(w)\}$ hat einen Häufungspunkt in U .*
- iii) *Es gibt ein $z_0 \in U$, so daß $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis. i) \Rightarrow ii) ist klar.

ii) \Rightarrow iii) Für $h = f - g$ hat die Nullstellenmenge von h einen Häufungspunkt $z_0 \in U$. Angenommen, es gäbe ein $k \in \mathbb{N}$ mit $h^{(k)}(z_0) \neq 0$, und sei n das Minimum dieser k . Wegen der Potenzreihenentwicklung ist $h(z) = (z - z_0)^n h_n(z)$ mit $h_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ und $h_n(z_0) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von h_n gilt dann auch $h_n(z) \neq 0$ für alle z aus einer ϵ -Umgebung von c , im Widerspruch zur Voraussetzung, daß c Häufungspunkt der Nullstellenmenge ist.

iii) \Rightarrow i) Es sei $h = f - g$ und $S_k := \{w \in U : h^{(k)}(w) = 0\}$. Als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist S_k abgeschlossen in U (Satz 20.2.iii) aus dem 1. Semester). Da der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Teilmengen wieder abgeschlossen ist, ist $S := \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$ abgeschlossen in U . Andererseits ist S auch offen in U , denn für $z_1 \in S$ ist die Potenzreihenentwicklung von h in einer beliebigen offenen Kreisscheibe $K \subseteq U$ mit Mittelpunkt z_1 die Nullreihe. Damit verschwinden sämtliche Ableitungen $h^{(k)}(z)$ für alle $z \in K$, also ist $K \subseteq S$. Da U zusammenhängend ist, folgt $S = U$. \square

Bemerkenswert ist, daß $f = g$ in ganz U aus zwei entgegengesetzten Bedingungen folgt: Aus der Gleichheit aller Ableitungen an *nur einem* Punkt sowie aus der Gleichheit an genügend vielen Punkten in U . Das ist grundlegend verschieden vom reellen Fall. Für die Funktionen $f(x) = 0$ und $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ sind in $x = 0$ alle Ableitungen gleich, aber offenbar ist $f \neq g$. Als wichtige Konsequenz ergibt sich, daß holomorphe Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$, die auf $I \subseteq \mathbb{R}$ (also als reelle Funktionen) übereinstimmen, bereits auf ganz U identisch sind.

Beispiel 19.8 Für den komplexen Logarithmus gilt $L(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z^{k+1}$ für alle $z \in K_1(0)$, denn $1+z \in \mathbb{C}^-$, und die Gleichheit gilt auf dem reellen Intervall $] -1, 1[$. \triangleleft

Eine komplexe Funktion f , die überall auf \mathbb{C} definiert und holomorph ist, heißt *ganze Funktion*. Nach Satz 19.2 gibt es für eine ganze Funktion f die Darstellung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius ∞ .

Satz 19.9 (Liouville) *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Ist $|f| \leq M$ auf \mathbb{C} , dann erfüllen die Entwicklungskoeffizienten nach Satz 19.2 die Abschätzung $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ für beliebiges $r > 0$. Also ist $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$ und $f(z) = a_0$. \square

Der Satz von Liouville hat kein Analogon in der reellen Differentialrechnung. Z.B. ist $f(x) = \sin x$ beliebig oft differenzierbar auf \mathbb{R} , beschränkt, und nichtkonstant.

Satz 19.10 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mit komplexen Koeffizienten besitzt in \mathbb{C} eine Nullstelle.*

Beweis. Angenommen, das Polynom P habe keine Nullstelle, dann ist $\frac{1}{P}$ holomorph auf ganz \mathbb{C} . Außerdem ist $\frac{1}{P(z)} \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$, d.h. $\frac{1}{P(z)}$ ist beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist $\frac{1}{P}$ dann konstant, also wäre auch P konstant. Widerspruch. \square

Nach Abdividieren der Nullstellen läßt sich somit jedes komplexe Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ vom Grad n , normiert auf $a_n = 1$, faktorisieren in $P(z) = \prod_{i=1}^n (z - b_i)$.

20 Der Residuensatz

Wichtig für die Ausnutzung der Cauchyschen Integralformel zur Berechnung von Integralen ist eine genauere Diskussion möglicher Singularitäten von komplexen Funktionen.

Satz 20.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Es sei f eine auf $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion, und es existiere eine Umgebung $V \subseteq U$ von $a \in U$, so daß f auf $V \setminus \{a\}$ beschränkt ist. Dann gibt es eine Fortsetzung \tilde{f} von f , die holomorph auf ganz U ist.*

Beweis. Wir definieren eine Funktion $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\phi(z) := \begin{cases} (z - a)^2 f(z) & \text{für } z \neq a \\ 0 & \text{für } z = a \end{cases}$$

Wegen der Beschränktheit von f auf $V \setminus \{a\}$ ist ϕ holomorph auf $V \setminus \{a\}$ und dann auf $U \setminus \{a\}$, und es gilt

$$\phi'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\phi(z) - \phi(a)}{z - a} = 0.$$

Damit besitzt ϕ die Potenzreihenentwicklung $\phi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - a)^n$, und die Fortsetzung von f kann definiert werden als

$$\tilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - a)^n. \quad \square$$

Definition 20.2 Ist f holomorph in einer Umgebung $U \setminus \{a\}$ eines Punktes $a \in U$, so heißt a eine *isolierte Singularität* von f , und zwar:

- i) Eine *hebbare Singularität*, wenn f holomorph in den Punkt a fortgesetzt werden kann.
- ii) Ein *Pol*, wenn keine holomorphe Fortsetzung in a existiert, aber ein $k \in \mathbb{N}^\times$ derart, daß $(z - a)^k f$ holomorph in den Punkt a fortgesetzt werden kann. Die kleinste derartige Zahl k heißt die *Vielfachheit des Pols*. Der Punkt a ist genau dann ein k -facher Pol von f , wenn es in U eine Darstellung $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ gibt, wobei g holomorph in U ist (insbesondere auch in a) und $g(a) \neq 0$ gilt.
- iii) Eine *wesentliche Singularität*, wenn sie weder hebbar noch Pol ist.

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, wenn sie bis auf Pole in U holomorph ist.

Jede rationale Funktion ist meromorph.

Ist f holomorph in $U \setminus \{a\}$ und liegt in a ein Pol der Ordnung k vor, dann hat die eindeutige Fortsetzung von f auf U die *Laurent-Reihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - a)^n .$$

Die Laurent-Reihe ist konvergent in einem Kreisring

$$K_{R,r}(a) = \{z \in U, 0 < r < |z - a| < R\} .$$

Dabei ist R der Konvergenzradius des *Nebenteils der Laurent-Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$.

Der *Hauptteil der Laurent-Reihe* $\sum_{n=-k}^{-1} a_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$ ist als endliche Summe beschränkt in $K_{R,r}(a)$. Für die Entwicklungskoeffizienten gilt:

Satz 20.3 Eine auf $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion habe in a einen k -fachen Pol.

Dann sind die Entwicklungskoeffizienten der Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-a)^n$ gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

für einen beliebigen Kreis $K_r(a)$ um a mit Radius $r > 0$, so daß $\overline{K_r(a)} \subseteq U$.

Beweis. Die Funktion $h(z) = (z - a)^k f(z)$ läßt sich holomorph auf U fortsetzen und besitzt eine Potenzreihenentwicklung $h(z) = (z - a)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{h(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n-k+1}}.$$

Also ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n-k+1}} \right) (z - a)^{n-k}$$

Substitution $n - k \mapsto n$ liefert die Behauptung. \square

Offenbar hat eine auf $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion genau dann eine wesentliche Singularität in a , wenn der Hauptteil der Laurent-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$ nicht abbricht. Ein Beispiel einer wesentlichen Singularität ist $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}$ in $z = 0$. Eine Funktion f ist in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität stark oszillierend; ohne Beweis erwähnen wir:

Satz 20.4 (Picard) *Mit höchstens einer Ausnahme nimmt f in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jede komplexe Zahl unendlich oft an.*

Für $e^{\frac{1}{z}}$ wird die Null nicht angenommen.

Definition 20.5 Es sei f eine auf $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion mit Laurent-Reihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$. Dann heißt der Koeffizient $a_{-1} = \text{res}_a f$ das *Residuum* von f in a .

Offenbar ist $\text{res}_a f = 0$, wenn f in a holomorph ist oder (wegen der Eindeutigkeit der Laurent-Reihe) in a eine hebbare Singularität besitzt. Nach Satz 20.3 gilt:

Satz 20.6 *Es sei f eine auf $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$\text{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} f(z) dz$$

für einen beliebigen Kreis $K_r(a)$ um a mit Radius $r > 0$, so daß $\overline{K_r(a)} \subseteq U$. \square

Wir geben Berechnungsvorschriften für das Residuum in einigen wichtigen Spezialfällen an:

- Ist $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$, und ist g holomorph in einer Umgebung von a , so folgt aus der Cauchyschen Integralformel $\text{Res}_a f = g(a)$.

- Ist allgemeiner $f = \frac{g}{h}$ Quotient von in a holomorphen Funktionen g, h mit $h(a) = 0$ und $h'(a) \neq 0$, dann ist wegen der stetigen Differenzierbarkeit $h(z) = (z - a)(h'(a) + \phi(z))$ mit $\lim_{z \rightarrow a} \phi(z) = 0$. Es gibt also ein $r > 0$, so daß $|\phi(z)| < h'(a)$, so daß $\frac{1}{h'(a) + \phi(z)}$ holomorph auf $K_r(a)$ ist. Damit gilt

$$\operatorname{res}_a \frac{g}{h} = \frac{g(a)}{h'(a) + \phi(a)} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

- Hat f in a einen k -fachen Pol, d.h. die Laurent-Reihe ist $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z - a)^n$, dann folgt

$$\operatorname{res}_a f = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} ((z-a)^k f(z)) \Big|_{z=a}.$$

Satz 20.7 (Residuensatz) *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $S \subseteq U$ eine Teilmenge ohne Häufungspunkt in U und f holomorph auf $U \setminus S$. Sei $A \subseteq U$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:*

- A ist einfach zusammenhängend in U ,
- der Rand $\gamma := \partial A$ liegt in U und ist stückweise stetig differenzierbar,
- $S \cap \gamma = \emptyset$, d.h. der Rand ∂A trifft keinen Punkt aus S .

Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in S \cap A} \operatorname{res}_a f.$$

Beweis. Analog zur Cauchyschen Integralformel werden um jeden Punkt $a \in S \cap A$ Kreise $K_{\epsilon_a}(a)$ gelegt, die im Inneren von A liegen und sich nicht schneiden (S hat keinen Häufungspunkt). Dann ist f holomorph auf einer Umgebung von $\Gamma := A \setminus \bigcup_{a \in S \cap A} K_{\epsilon_a}(a)$. Durch Aufschneiden von Γ zwischen γ und jedem Kreis $K_{\epsilon_a}(a)$ entsteht ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so daß das Integral von f über dessen Rand verschwindet. Die Schnitte werden zweimal in umgekehrter Richtung durchlaufen, so daß sich die Integrale gegenseitig aufheben. Die Integrale über die $\partial K_{\epsilon_a}(a)$ ergeben bis auf einen Faktor $-2\pi i$ (Durchlauf in umgekehrter Richtung) das jeweilige Residuum $\operatorname{Res}_a f$. \square

Der Residuensatz ist ein mächtiges Werkzeug zur Berechnung von Integralen.

Beispiel 20.8 Gesucht ist $I(a) := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}$ für $a > 1$. Auf dem Einheitskreis $z(t) = e^{it}$ gilt $\cos t = \frac{1}{2}(z(t) + \frac{1}{z(t)}) \Big|_{\partial K_1(0)}$. Dann ist $z'(t) = iz(t)$, und wir erhalten

$$I(a) = \int_0^{2\pi} dt \frac{1}{a + \frac{1}{2}(z(t) + \frac{1}{z(t)})} \frac{z'(t)}{iz(t)} = \frac{2}{i} \int_{\partial K_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{2}{i} \int_{\partial K_1(0)} dz f(z)$$

mit $f(z) := \frac{1}{(z - (-a - \sqrt{a^2 - 1}))(z - (-a + \sqrt{a^2 - 1}))}$. Nur die Polstelle bei $z = \sqrt{a^2 - 1} - a$ liegt im Inneren des Einheitskreises, also folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = 4\pi \operatorname{res}_{\sqrt{a^2-1}-a} f = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \quad \triangleleft$$

Allgemein gilt für solche Art von Integralen:

Satz 20.9 *Es sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen und $R(\cos t, \sin t)$ sei für alle $t \in [0, 2\pi]$ erklärt. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} dt R(\cos t, \sin t) = 2\pi \sum_{a \in K_1(0)} \operatorname{res}_a \tilde{R}, \quad \tilde{R}(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right). \quad \square$$

Eine andere wichtige Klasse von reellen Integralen, die mit dem Residuensatz berechnet werden können, ist die folgende:

Satz 20.10 *Es sei R eine rationale Funktion (einer Variablen), die auf der reellen Achse keinen Pol habe und in ∞ eine mindestens zweifache Nullstelle, d.h. wenn $R(x) = P(x)/Q(x)$ mit Polynomen P, Q , dann ist $\deg(Q) - \deg(P) \geq 2$. In diesem Fall gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx R(x) = 2\pi i \sum_{a \in H} \operatorname{res}_a R,$$

wobei $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ die obere Halbebene ist.

Beweis. Man integriert über den Halbkreis bestehend aus dem Durchmesser $[-r, r]$ auf der reellen Achse und dem halben Umfang $z = re^{it}$ mit $t \in [0, \pi]$. Dabei wird r so groß gewählt, daß alle Pole in H von $R(z)$ im Inneren des Halbkreises liegen. Nach Voraussetzung verschwindet dann für $r \rightarrow \infty$ das Integral über den Halbkreisbogen. \square

Beispiel 20.11 Gesucht ist $I_n := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ mit $n \in \mathbb{N}^\times$. Aufgefaßt als komplexe Funktion sind die (einfachen) Pole $z^{2n} = -1$ der oberen Halbebene bei $a_k = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{2n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Also gilt mit $\operatorname{res}_a\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h'(a)}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi i}{2ne^{\frac{i\pi(2k+1)(2n-1)}{2n}}} = -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{i\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi k}{n}} = \frac{\pi}{in} e^{\frac{i\pi}{2n}} \frac{1 - e^{\frac{i\pi n}{n}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} = \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{2n}. \quad \triangleleft$$

Integrale der Form $I = \int_0^{\infty} dx R(x)$, wobei R eine gerade Funktion ist, werden über $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx R(x)$ ausgerechnet.

Satz 20.12 *Es sei R eine rationale Funktion ohne Pol auf der reellen Achse und mit mindestens einfacher Nullstelle in ∞ . Dann ist für jedes $\alpha > 0$ das folgende Integral existent und durch den Residuensatz berechenbar zu*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx R(x)e^{i\alpha x} = 2\pi i \sum_{a \in H} \operatorname{res}_a \left(R(z)e^{i\alpha z} \right).$$

Beweis. Das zugehörige bestimmte Integral über $[-r, r]$ wird durch ein Quadrat in der oberen Halbebene geschlossen. Die zusätzlichen Kurvenstücke sind $c_1(t) = r + it$ mit $t \in [0, r]$, $c_2(t) = t + ir$ mit $t \in [-r, r]$ und $c_3(t) = -r + it$ mit $t \in [0, r]$. Unter Beachtung des Umlaufsinn liefert der Residuensatz

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{a \in H} \operatorname{res}_a \left(R(z)e^{i\alpha z} \right) &= \int_{-r}^r dx R(x)e^{i\alpha x} + i \int_0^r dt R(r+it)e^{i\alpha(r+it)} \\ &\quad - \int_{-r}^r dt R(t+ir)e^{i\alpha(t+ir)} - i \int_0^r dt R(-r+it)e^{i\alpha(-r+it)}. \end{aligned}$$

Da R eine mindestens einfache Nullstelle in ∞ hat, gilt $|R(z)| \leq \frac{M}{1+|z|}$ und damit

$$\begin{aligned} \left| \int_0^r dt R(\pm r+it)e^{i\alpha(\pm r+it)} \right| &\leq \frac{M}{1+r} \int_0^r dt e^{-\alpha t} \leq \frac{M}{\alpha(1+r)}, \\ \left| \int_{-r}^r dt R(t+ir)e^{i\alpha(t+ir)} \right| &\leq \frac{M}{1+r} e^{-\alpha r} \cdot 2r. \end{aligned}$$

Folglich verschwinden die Integrale über c_i im Limes $r \rightarrow \infty$. Die Existenz des Limes $r \rightarrow \infty$ für das reelle Integral ergibt sich nach partieller Integration und Verwendung von $|R'(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^2}$. \square

Nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil können die reellen Integrale

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx R(x) \cos(\alpha x) &= \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{a \in H} \operatorname{res}_a \left(R(z)e^{i\alpha z} \right) \right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx R(x) \sin(\alpha x) &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{a \in H} \operatorname{res}_a \left(R(z)e^{i\alpha z} \right) \right) \end{aligned}$$

berechnet werden.

Beispiel 20.13 Gesucht ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{1+x^2} \right)$. Die Voraussetzungen von Satz 20.12 sind erfüllt, es gibt einen Pol bei $x = i$ in der oberen Halbebene, so daß gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{res}_i \left(\frac{z e^{iz}}{(z+i)(z-i)} \right) = 2\pi i \frac{i e^{i \cdot i}}{2i} = \frac{\pi i}{e}.$$

Somit gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}$. \triangleleft

Eine andere wichtige Anwendung des Residuensatzes ist die Lokalisierung von Nullstellen und Polstellen.

Satz 20.14 (Nullstellen und Polstellen zählendes Integral) *Es sei f eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf $U \subseteq \mathbb{C}$, ferner $S \subseteq U$ die Menge der Nullstellen und Polstellen von f und $A \subseteq U$ eine Teilmenge, deren Rand ∂A die Voraussetzungen des Residuensatzes erfüllt. Dann gilt für die Anzahl der Nullstellen N_A von f in A und die Anzahl der Polstellen P_A von f in A , jeweils mit Vielfachheit gezählt, die Formel*

$$N_A - P_A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} dz \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Beweis. Ist f meromorph, so ist $\frac{f'}{f}$ holomorph außerhalb der Null- und Polstellen von f . In der Umgebung V einer Null- oder Polstelle a gilt $f(z) = (z-a)^k g(z)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und eine auf V holomorphe nullstellenfreie Funktion g . Dabei ist $k > 0$ für eine k -fache Nullstelle und $k < 0$ für einen Pol der Ordnung $|k|$. Somit ist $\frac{f'}{f}(z) = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ und dann $\operatorname{res}_a \frac{f'}{f} = k$. Der Residuensatz liefert die Behauptung. \square

Satz 20.15 (Rouché) *Es seien f, g holomorphe Funktionen auf $U \subseteq \mathbb{C}$ und $A \subseteq U$ eine Teilmenge mit stückweise stetig differenzierbarem Rand $\partial A \subseteq U$. Es gelte $|g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \partial A$. Dann haben f und $f + g$ die gleiche Anzahl von Nullstellen in A .*

Beweis. Es gibt eine Umgebung $V \subseteq U$ von ∂A mit $|\frac{g}{f}| < 1$. Dann ist $h := 1 + \frac{g}{f}$ auf V holomorph mit Bild $h(V) \subseteq K_1(1)$. Der komplexe Logarithmus L ist holomorph auf $K_1(1)$, so daß nach Kettenregel gilt $(L \circ h)'(z) = \frac{h'(z)}{h(z)}$. Somit verschwindet das Kurvenintegral $\int_c dz \frac{h'(z)}{h(z)} = 0$ für jede geschlossene Kurve c mit $h \circ c \in K_1(1)$, insbesondere für das Bild von ∂A unter $\partial A \ni z \mapsto h(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$. Es gilt $\frac{h'}{h} = \frac{(f+g)'(z)}{(f+g)(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}$, so daß nach Satz 20.14 die holomorphen Funktionen f und $f + g$ die gleiche Zahl von Nullstellen in A haben. \square

Beispiel 20.16 Wieviele Nullstellen von $h(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$ liegen in $K_1(0)$? Setze $f(z) = -5z^3$ und $g(z) = z^8 - z - 2$. Dann gilt für $z \in \partial K_1(0)$, d.h. $|z| = 1$ nach Dreiecksungleichung $|g(z)| \leq 4 < |f(z)| = 5$. Die Gleichung $f(z) = -5z^3 = 0$ hat eine dreifache Nullstelle in $0 \in K_1(0)$. Somit hat nach dem Satz von Rouché die Funktion h ebenfalls 3 Nullstellen in $K_1(0)$. \triangleleft

Wiederholung

- Definition von 1-Formen, mit Differential als Beispiel

- Höhere Differentialformen, äußeres Produkt und äußeres Differential. Vektorprodukt sowie Gradient, Rotation, Divergenz als Spezialfälle
- Integral von 1-Formen längs Kurven
- Exakte 1-Formen: Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals
- Geschlossene 1-Formen als notwendige Bedingung für Exaktheit, hinreichend auf Sterngebieten
- Anwendung: exakte Differentialgleichungen; auf Sterngebieten Lösung durch Kurvenintegral
- Definitionen komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie, Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen
- Definitionen kontrahierbare Kurve und einfach zusammenhängende Gebiete
- komplexe Kurvenintegrale, Cauchyscher Integralsatz
- Cauchysche Integralformel und Folgerungen für Potenzreihenentwicklung und holomorphe Fortsetzbarkeit. Satz von Liouville
- Diskussion isolierter Singularitäten, Laurent-Entwicklung
- Residuum mit Berechnungsmöglichkeiten, Residuensatz
- Berechnung reeller Integrale über Residuensatz oder Cauchyschem Integralsatz

Teil IV

Das Lebesgue-Integral

21 Treppenfunktionen und L^1 -Halbnorm

Grundlage jedes Integralbegriffs ist das geometrisch definierte Integral von *Treppenfunktionen*. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert man die *charakteristische Funktion* $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von A als

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein achsenparalleler n -dimensionaler Quader, wobei die Zugehörigkeit von Teilmengen der $(n-1)$ -dimensionalen Randflächen zu Q keine Rolle spielt. *Treppenfunktionen* $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sind (nach Unterteilung in disjunkte Teilquader) konstant auf den Teilquadern: $\phi(x) = \sum_{l=0}^N c_l \mathbf{1}_{Q_l}(x)$ mit $c_l \in \mathbb{C}$. Dadurch bildet die Menge aller Treppenfunktionen einen Vektorraum. Sind ϕ_1, ϕ_2 Treppenfunktionen, so auch $|\phi_1|$ sowie $\max(\phi_1, \phi_2)$ und $\min(\phi_1, \phi_2)$.

Definition 21.1 Das *Integral einer Treppenfunktion* $\phi = \sum_{l=0}^N c_l \mathbf{1}_{Q_l} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \phi(x) := \sum_{l=0}^N c_l v(Q_l),$$

wobei $v(Q_l)$ das Volumen des Quaders Q_l ist.

Satz 21.2 *Das so definierte Integral einer Treppenfunktion ist unabhängig von der Darstellung der Treppenfunktion. Außerdem gilt für Treppenfunktionen ϕ, ψ*

i)
$$\int_{\mathbb{R}^n} dx (\alpha\phi + \beta\psi)(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi(x) + \beta \int_{\mathbb{R}^n} dx \psi(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

ii)
$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx |\phi(x)|.$$

iii) *Sind ϕ, ψ reellwertig mit $\phi \leq \psi$, d.h. $\phi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \phi(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \psi(x).$$

Beweis. Durch Zurückführen auf eindimensionale Integrale für Treppenfunktionen mittels des folgenden Satzes. Die Eigenschaften i)–iii) sind dann klar. \square

Satz 21.3 (Fubini für Treppenfunktionen) *Es sei $\phi = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{Q_i} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, geschrieben $\phi(x, y)$ für $x \in \mathbb{R}^p$ und $y \in \mathbb{R}^{n-p}$.*

Dann ist auch $\Phi : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(y) := \int_{\mathbb{R}^p} dx \phi(x, y)$ eine Treppenfunktion, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}} d(x, y) \phi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} dy \left(\int_{\mathbb{R}^p} dx \phi(x, y) \right) = \int_{\mathbb{R}^p} dx \left(\int_{\mathbb{R}^{n-p}} dy \phi(x, y) \right).$$

Beweis. Die entsprechende Zerlegung der Quader sei $Q_l = Q'_l \times Q''_l$ mit $Q'_l \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Q''_l \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$. Dann gilt $v(Q_l) = v(Q'_l) \cdot v(Q''_l)$. Für festes $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \phi_y(x) &:= \sum_{l=0}^N (c_l \mathbf{1}_{Q''_l}(y)) \mathbf{1}_{Q'_l}(x) \\ \Rightarrow \Phi(y) &:= \int_{\mathbb{R}^p} dx \phi_y(x) = \sum_{l=0}^N (c_l \mathbf{1}_{Q'_l}(y)) v(Q'_l) = \sum_{l=0}^N (c_l v(Q'_l)) \mathbf{1}_{Q''_l}(y). \end{aligned}$$

Also ist $\Phi = \sum_{l=0}^N (c_l v(Q'_l)) \mathbf{1}_{Q''_l} : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Ihr Integral ist

$$\int_{\mathbb{R}^{n-p}} dy \Phi(y) = \sum_{l=0}^N (c_l v(Q'_l)) v(Q''_l) = \sum_{l=0}^N c_l v(Q_l) = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}} d(x, y) \phi(x, y).$$

Durch Vertauschen der Rollen von x, y entsteht der andere Teil der Gleichung. \square

Das Integral beliebiger Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wird dann erklärt als Grenzwert der Integrale einer Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die f in geeigneter Weise approximiert. Da Funktionen über A einen *unendlich-dimensionalen* Vektorraum bilden, gibt es verschiedene Konvergenzbegriffe, die dann auf verschiedene Integrale führen. In Analogie zum eindimensionalen Fall läßt sich auch ein mehrdimensionales Riemann-Integral einführen über die monotone beschränkte Konvergenz reellwertiger Treppenfunktionen:

Definition 21.4 Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar* über $A \subseteq \mathbb{R}^n$, falls es Folgen $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt mit

- (ϕ_k) ist monoton wachsend mit $\phi_k(x) \leq f(x)$,
- (ψ_k) ist monoton fallend mit $\psi_k(x) \geq f(x)$,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A dx (\psi_k(x) - \phi_k(x)) = 0$

In diesem Fall definiert man das *Riemann-Integral* von f als $\int_A dx f(x) =$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A dx \psi_k(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A dx \phi_k(x).$$

Dieses Riemann-Integral hat folgende Schwächen:

- Über $\langle f, g \rangle = \int_A dx \overline{f(x)} g(x)$ läßt sich ein rudimentäres Skalarprodukt erklären. Der Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen ist jedoch nicht vollständig in der induzierten (Halb-)Norm.

- Für das Riemann-Integral gilt folgender Vertauschungssatz: Ist (f_k) Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, die *gleichmäßig gegen f konvergiert*, so gilt $\int_A dx \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A dx f_k(x)$. Es zeigt sich aber, daß gleichmäßige Konvergenz der Funktionsfolgen oft eine zu starke Forderung ist.

Das Lebesgue-Integral beruht auf einer anderen Konvergenz von Treppenfunktionen, in denen die L^1 -Halbnorm eine zentrale Rolle spielt. Dazu werden die endlichen Summen in Treppenfunktion zu Reihen verallgemeinert, die den Wert ∞ annehmen dürfen. Wir vereinbaren $c + \infty = \infty$ für alle $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $0 \cdot \infty = 0$ sowie $c \cdot \infty = \infty$ für $c \in \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}$.

Definition 21.5 Eine Reihe $\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \mathbf{1}_{Q_l}$ heißt *Hüllreihe* einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wenn gilt:

- Alle Quader $Q_l \subseteq \mathbb{R}^n$ sind offen, und $c_l \geq 0$.
- Es gilt $|f(x)| \leq \Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \mathbf{1}_{Q_l}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Der *Inhalt* einer Hüllreihe $\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \mathbf{1}_{Q_l}$ ist definiert als $I(\Phi) := \sum_{l=0}^{\infty} c_l v(Q_l) \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, mit $I(\Phi) := \infty$, falls die Reihe nicht konvergiert.

Jede Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ besitzt eine Hüllreihe, z.B. $\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\hat{Q}_l}$, wobei $\hat{Q}_l \subseteq \mathbb{R}^n$ der offene Würfel mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge $2l + 1$ ist.

Definition 21.6 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine beliebige Funktion. Dann ist die L^1 -Halbnorm von f erklärt als

$$\|f\|_1 := \inf\{I(\Phi) : \Phi \text{ ist Hüllreihe zu } f\}.$$

Es folgt $\|f\|_1 = \||f|\|_1$. *Achtung:* Entgegen der üblichen Bezeichnung ist die L^1 -Halbnorm $\|\cdot\|_1$ *keine Norm!* Nach folgendem Beispiel gilt: $\|f\|_1 = 0 \not\Rightarrow f = 0$.

Beispiel 21.7 Es sei $f = \mathbf{1}_Q$ die charakteristische Funktion eines ausgearteten Quaders Q (eine Kante $I_j = \{a\}$ hat die Länge Null). Sei $Q^{(k)}$ ein offener Quader, der Q enthält, wobei die j -te Kante von $Q^{(k)}$ gegeben ist durch $I_j^{(k)} =]a - \frac{1}{k+1}, a + \frac{1}{k+1}[$. Dann ist $\Phi_k = \mathbf{1}_{Q^{(k)}}$ eine Hüllreihe für jedes $k \in \mathbb{N}$. Bleiben alle anderen Kanten festgehalten, dann gilt $v(Q^{(k)}) = \frac{1}{k+1}v(Q^{(0)})$. Nach Definition des Infimums ist $0 \leq \|\mathbf{1}_Q\|_1 \leq v(Q^{(k)}) = \frac{1}{k+1}v(Q^{(0)})$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\|\mathbf{1}_Q\|_1 = 0$. ◁

Es gelten aber die anderen Normeigenschaften:

Satz 21.8 Für $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $c \in \mathbb{C}$ gilt:

- $\|cf\|_1 = |c|\|f\|_1$
- $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

iii) Aus $|f(x)| \leq |g(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgt $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$.

iv) Für nichtnegative reellwertige Funktionen $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ gilt

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1.$$

Beweis. i) und iii) sind klar, und ii) folgt wegen $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ aus iii) und iv).

iv) Zu gegebenem $\epsilon > 0$ existiert nach Definition des Infimums zu f_k eine Hüllreihe $\Phi_k = \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} \mathbf{1}_{Q_{kl}}$ mit $I(\Phi_k) = \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} v(Q_{kl}) \leq \|f_k\|_1 + \frac{\epsilon}{2^k}$. Dann ist $\Phi := \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} \mathbf{1}_{Q_{kl}} \right)$ Hüllreihe zu $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$, mit

$$I(\Phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} v(Q_{kl}) \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\|f_k\|_1 + \frac{\epsilon}{2^k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 + 2\epsilon.$$

Somit gilt $\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 + 2\epsilon$ für alle $\epsilon > 0$, und daraus folgt iv). \square

Sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$, die i) und ii) wie in Satz 21.8 erfüllt, nennt man Halbnorm. Eine allgemeine Halbnorm *genügt nicht* zur Definition einer Konvergenz (im üblichen Sinn), da der Grenzwert nicht eindeutig ist. Die zusätzlichen Bedingungen iii) und iv) sowie der folgende Satz 21.10 liefern jedoch einen Konvergenzbegriff für die spezielle L^1 -Halbnorm.

Satz 21.9 Für einen abgeschlossenen Quader $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\mathbf{1}_A\|_1 = v(A) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \mathbf{1}_A(x).$$

Beweis. i) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen offenen Quader $Q_\epsilon \supset A$ mit $v(Q_\epsilon) \leq v(A) + \epsilon$. Damit ist $\|\mathbf{1}_A\|_1 \leq v(Q_\epsilon) \leq v(A) + \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$, also $\|\mathbf{1}_A\|_1 \leq v(A)$.

ii) Zu zeigen ist, daß auch durch eine unendliche Zerteilung von A die entsprechende Hüllreihe $\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \mathbf{1}_{Q_l}$ zu $\mathbf{1}_A$, mit Q_l offen, keinen kleineren Inhalt haben kann. Wegen $\Phi(x) \geq 1$ für alle $x \in A$ gibt es zu gegebenem $\epsilon > 0$ einen Index $N(x)$ mit $\sum_{l=0}^{N(x)} c_l \mathbf{1}_{Q_l}(x) \geq 1 - \epsilon$. Da die Q_l offen sind und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen offen ist, gibt es eine Umgebung $U(x) \subseteq A$ von x , so daß wegen der Konstanz von $\mathbf{1}_{Q_l}$ auf Q_l gilt

$$\sum_{l=0}^{N(x)} c_l \mathbf{1}_{Q_l}(x) \geq 1 - \epsilon \quad \text{für alle } x \in U(x).$$

Da A kompakt ist, wird A durch endlich viele $U(x_1), \dots, U(x_p)$ überdeckt. Also gibt es ein $N = \max(N(x_1), \dots, N(x_p))$, so daß $\sum_{l=0}^N c_l \mathbf{1}_{Q_l}(x) \geq 1 - \epsilon = (1 - \epsilon) \mathbf{1}_A(x)$ für alle $x \in A$. Da $\sum_{l=0}^N c_l \mathbf{1}_{Q_l}(x)$ eine Treppenfunktion ist, folgt mit Satz 21.2.iii):

$$I(\Phi) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l v(Q_l) \geq \sum_{l=0}^N c_l v(Q_l) \geq (1 - \epsilon)v(A).$$

Also gilt $\|\mathbf{1}_A\|_1 = v(A) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \mathbf{1}_A(x)$. □

Satz 21.10 Für jede Treppenfunktion $\phi = \sum_{l=1}^N c_l \mathbf{1}_{Q_l}$ gilt

$$\|\phi\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} dx |\phi(x)|.$$

Beweis. Da $\|\phi\|_1 = \|\phi\|_1$, können wir $\phi(x) \geq 0$ annehmen.

i) Wir zerlegen die beliebigen Quader Q_l , deren Kanten offen, abgeschlossen, halboffen und entartet sein dürfen, in disjunkte offene Quader Q_i^o und disjunkte Ränder R_j , so daß

$$\phi = \sum_{i=1}^{N'} c'_i \mathbf{1}_{Q_i^o} + \sum_{j=1}^M d_j \mathbf{1}_{R_j}, \quad c'_i, d_j > 0.$$

Zu jedem der entarteten Quader R_j mit Volumen 0 wählen wir einen nichtentarteten offenen Quader $R_j^o \supset R_j$ mit $v(R_j^o) < \epsilon$. Dann ist $\Phi_\epsilon := \sum_{i=0}^{N'} c'_i \mathbf{1}_{Q_i^o} + \sum_{j=0}^M d_j \mathbf{1}_{R_j^o}$ eine Hüllreihe zu ϕ mit

$$\|\phi\|_1 \leq \inf_{\epsilon} I(\Phi_\epsilon) = \inf_{\epsilon} \left(\sum_{i=0}^{N'} c'_i v(Q_i^o) + \epsilon \sum_{j=0}^M d_j \right) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi(x).$$

ii) Sei A ein abgeschlossener Quader derart, daß $\phi(x) = 0$ für alle $x \notin A$, und sei $m = \max_{x \in A} \phi(x)$. Dann ist $\psi := m\mathbf{1}_A - \phi$ wieder eine nichtnegative Treppenfunktion, so daß $-\int_{\mathbb{R}^n} dx \psi(x) \leq -\|\psi\|_1$ und daraus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} dx (m\mathbf{1}_A(x) - \psi(x)) = m \int_{\mathbb{R}^n} dx \mathbf{1}_A(x) - \int_{\mathbb{R}^n} dx \psi(x) \\ &\leq \|m\mathbf{1}_A\|_1 - \|\psi\|_1 = \|\phi + \psi\|_1 - \|\psi\|_1 \leq \|\phi\|_1. \end{aligned} \quad \square$$

22 Das Lebesgue-Integral

Definition 22.1 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *(Lebesgue-)integrierbar*, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \phi_k\|_1 = 0$. In diesem Fall heißt

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi_k(x)$$

das *Lebesgue-Integral* von f .

Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *integrierbar über eine Teilmenge* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn die Funktion $f_A := f \cdot \mathbf{1}_A$ integrierbar ist (über \mathbb{R}^n), und man setzt

$$\int_A dx f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} dx f_A(x).$$

Zur Definition ist zu bemerken, daß die Folge der Integrale $\left(\int_{\mathbb{R}^n} dx \phi_k(x) \right)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{C} ist: Wegen der L^1 -Konvergenz gegen f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $\|f - \phi_l\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $l \geq k$. Dann gilt für alle $m, l \geq k$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi_l(x) - \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi_m(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} dx (\phi_l - \phi_m)(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx |(\phi_l - \phi_m)(x)|$$

Satz 21.10 \Rightarrow $= \|\phi_l - \phi_m\|_1 \leq \|\phi_l - f\|_1 + \|f - \phi_m\|_1 < \epsilon.$

Wegen der Vollständigkeit der komplexen Zahlen existiert der Grenzwert und damit das Lebesgue-Integral von f , und das Integral ist endlich.

Ob eine gegebene Funktion Lebesgue-integrierbar ist, ist mit Definition 22.1 oft schwer zu entscheiden. Wir werden deshalb brauchbare Kriterien für die Integrierbarkeit wichtiger Funktionsklassen erarbeiten. Es sei bemerkt, daß es beschränkte Funktionen auf kompakten Teilmengen gibt, die nicht Lebesgue-integrierbar sind.

Offenbar ist jede Treppenfunktion integrierbar. Riemann-integrierbare Funktionen auf kompakten Intervallen sind auch Lebesgue-integrierbar:

Satz 22.2 *Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine über $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f über $[a, b]$ auch Lebesgue-integrierbar, und Riemann- und Lebesgue-*

Integral stimmen überein, $\int_{[a,b]} dx f(x) = \int_a^b dx f(x)$.

Beweis. Wir können f als reellwertig annehmen. Zu $\epsilon = \frac{1}{k+1}$ gilt es Treppenfunktionen ϕ_k, ψ_k mit $\phi_k \leq f \leq \psi_k$ und $\int_a^b dx (\psi_k - \phi_k)(x) \leq \frac{1}{k+1}$.

Da für Treppenfunktionen Lebesgue- und Riemann-Integral übereinstimmen, gilt $\|\psi_k - \phi_k\|_1 \leq \frac{1}{k+1}$ nach Satz 21.10. Aus $0 \leq \psi_k - f \leq \psi_k - \phi_k$ folgt $\|\psi_k - f\|_1 \leq \|\psi_k - \phi_k\|_1 \leq \frac{1}{k+1}$ nach Satz 21.8. Somit ist f Lebesgue-integrierbar, und

$$\int_{[a,b]} dx f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b dx \psi_k(x) = \int_a^b dx f(x),$$

denn das Infimum der Folge der Integrale über ψ_k ist Oberintegral zu f . □

Die folgende Eigenschaft des Lebesgue-Integrals ist grundlegend verschieden vom Riemann-Integral:

Satz 22.3 Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ integrierbar, dann ist auch $|f|$ integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x)| = \|f\|_1 .$$

Beweis. Sei $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \phi_k\|_1 = 0$. Wegen $||f| - |\phi_k|| \leq |f - \phi_k|$ gilt $\|(|f| - |\phi_k|)\|_1 \leq \|f - \phi_k\|_1$ und insbesondere $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(|f| - |\phi_k|)\|_1 = 0$. Also ist $|f|$ integrierbar. Für die Integrale gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) \right| &= \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi_k(x) \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi_k(x) \right| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx |\phi_k(x)| \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dx |f|(x) . \end{aligned}$$

Wegen $\|\phi_k\|_1 \leq \|\phi_k - f\|_1 + \|f\|_1 \leq 2\|\phi_k - f\|_1 + \|\phi_k\|_1$ gilt mit Satz 21.10

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} dx |\phi_k|(x) \right) - \|\phi_k - f\|_1 \leq \|f\|_1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} dx |\phi_k|(x) \right) + \|\phi_k - f\|_1 .$$

Für $k \rightarrow \infty$ erhalten wir $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x)|$. □

Bemerkung: Aus der Integrierbarkeit von $|f|$ folgt *nicht* die Integrierbarkeit von f , denn z.B. könnte f in einem beschränkten Intervall I unkontrolliert zwischen $+1$ und -1 springen, während $|f| = 1$ als Treppenfunktion über I integrierbar ist. Dagegen folgt (Majorantenkriterium Satz 32.8 aus dem 2. Semester) für *Regelfunktionen* aus der uneigentlichen Riemann-Integrierbarkeit von $|f|$ die uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit von f .

Satz 22.4 Das Lebesgue-Integral erfüllt die folgenden Rechenregeln für integrierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

i) $\int_{\mathbb{R}^n} dx (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) + \beta \int_{\mathbb{R}^n} dx g(x) .$

ii) Sind f, g reellwertig mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so folgt $\int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx g(x)$.

iii) Ist g beschränkt, so ist $f \cdot g$ integrierbar.

Beweis. i) ergibt sich durch approximierende Treppenfunktionen. ii) folgt aus $g - f = |g - f|$ und $\int_{\mathbb{R}^n} dx (g - f) = \int_{\mathbb{R}^n} dx |g - f| = \|g - f\|_1 \geq 0$ nach Satz 22.3.

iii) Sei $|g(x)| \leq M < \infty$ und seien ϕ_k, ψ_k Treppenfunktionen, die in der L^1 -Halbnorm gegen f, g konvergieren. Für $\epsilon > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $\|f - \phi_k\|_1 < \frac{\epsilon}{2M}$. Sei dann $\mu := \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi_k(x)|$. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, so daß $\|g - \psi_l\|_1 < \frac{\epsilon}{2\mu}$. Es gilt

$$\begin{aligned} |(fg - \phi_k \psi_l)(x)| &= |(f - \phi_k)(x)g(x) + \phi_k(x)(g - \psi_l)(x)| \\ &\leq M|(f - \phi_k)(x)| + \mu|(g - \psi_l)(x)| \end{aligned}$$

und deshalb

$$\|fg - \phi_k \psi_l\|_1 \leq \|(M|f - \phi_k| + \mu|g - \psi_l|)\| \leq M\|f - \phi_k\|_1 + \mu\|g - \psi_l\|_1 < \epsilon. \quad \square$$

Insbesondere gilt:

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist genau dann integrierbar, wenn $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ integrierbar sind, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx (\operatorname{Re} f)(x) + i \int_{\mathbb{R}^n} dx (\operatorname{Im} f)(x)$$

- Sind f, g integrierbare reellwertige Funktionen, dann sind auch $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ integrierbar sowie $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := \max(-f, 0)$. Es gilt $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$ sowie $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$. Somit gilt auch: $f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^-$ ist genau dann integrierbar, wenn alle vier nichtnegativen Anteile $(\operatorname{Re} f)^\pm, (\operatorname{Im} f)^\pm$ integrierbar sind.

Definition 22.5 Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (*Lebesgue-*) *meßbar*, wenn die Funktion 1 über A integrierbar ist. Das n -dimensionale Volumen $v_n(A) := \int_A dx$ heißt dann auch das *Lebesgue-Maß* von A . Die leere Menge hat das Lebesgue-Maß Null.

Satz 22.6 Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar, so gilt

- $A \cup B$ und $A \cap B$ sind meßbar, und es gilt $v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B) - v_n(A \cap B)$.
- Aus $A \subseteq B$ folgt $v_n(A) \leq v_n(B)$.

Ist eine Funktion f über $A \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar und ist $B \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar, dann ist f auch über $A \cap B$ integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_{A \cap B} dx f(x) \right| \leq \int_A dx |f(x)|.$$

Beweis. i) folgt aus $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$ und $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$ und ii) aus $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$.

Die letzte Behauptung folgt aus $f_{A \cap B} = f_A \cdot \mathbf{1}_B$. Da f_A und $\mathbf{1}_B$ integrierbar sind und $\mathbf{1}_B$ beschränkt ist, ist $f_{A \cap B}$ integrierbar nach Satz 22.4.iii). Die Abschätzung folgt aus $|f_{A \cap B}| \leq |f_A|$. \square

Wir zeigen nun, daß Singularitäten, die nur auf einer Teilmenge vom Maß Null auftreten, im Lebesgue-Integral keine Rolle spielen.

Definition 22.7 Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (*Lebesgue-*) *Nullmenge*, wenn sie eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften hat:

- i) N ist meßbar mit $v_n(N) = 0$.
- ii) Die charakteristische Funktion von N hat die L^1 -Halbnorm Null: $\|\mathbf{1}_N\|_1 = 0$.

Beweis: i) \Rightarrow ii) $0 = v_n(N) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \mathbf{1}_N(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx |\mathbf{1}_N(x)| = \|\mathbf{1}_N\|_1$
 (\Leftarrow) Für die Treppenfunktionen $\phi_k = 0$ gilt $\|\mathbf{1}_N - \phi_k\|_1 = 0$ und damit $v_n(N) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \mathbf{1}_N(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi_k(x) = 0$.

Satz 22.8 i) *Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.*
 ii) *Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist eine Nullmenge.*

Beweis. i) $M \subseteq N \Rightarrow \mathbf{1}_M \leq \mathbf{1}_N \Rightarrow \|\mathbf{1}_M\|_1 \leq \|\mathbf{1}_N\|_1 = 0$.
 ii) Ist $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ mit $v_n(N_k) = 0$, dann ist $0 \leq \mathbf{1}_N(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{N_k}(x)$ und somit $\|\mathbf{1}_N\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{1}_{N_k}\|_1 = 0$. \square

Zum Beispiel ist die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullmenge, so daß $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ über \mathbb{R} integrierbar ist mit $\int_{\mathbb{R}} dx \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$.

Definition 22.9 Es sei E eine Eigenschaft, die einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zukommt. Wir sagen, die Eigenschaft E gilt *fast überall* auf A , wenn die Menge der Punkte, für die E nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Satz 22.10 *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\|f\|_1 < \infty$ ist fast überall endlich, d.h. $N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \infty\}$ ist eine Nullmenge. Insbesondere ist jede integrierbare Funktion fast überall endlich.*

Beweis. Für alle $\epsilon > 0$ gilt $\mathbf{1}_N \leq \epsilon|f|$, also $\|\mathbf{1}_N\|_1 \leq \epsilon\|f\|_1$ und damit $\|\mathbf{1}_N\|_1 = 0$, da $\|f\|_1 < \infty$. \square

Satz 22.11 (Modifikationssatz) *Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Funktionen, die fast überall gleich sind, und f sei integrierbar. Dann ist auch g integrierbar, und es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx g(x)$. Insbesondere gibt es zu jeder integrierbaren Funktion f eine integrierbare Funktion g mit gleichem Lebesgue-Integral, die fast überall mit f übereinstimmt und nur Werte $\neq \infty$ annimmt.*

Beweis. Zu f gibt es eine Folge $\{\phi_k\}$ von Treppenfunktionen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \phi_k\|_1 = 0$. Es sei $N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$. Dann gilt $|g - f| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_N$ und somit

$$0 \leq \|g - \phi_k\|_1 \leq \|g - f\|_1 + \|f - \phi_k\|_1 \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{1}_N\|_1 \right) + \|f - \phi_k\|_1 = \|f - \phi_k\|_1.$$

Also gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g - \phi_k\|_1 = 0$, d.h. g ist integrierbar, mit $\int_{\mathbb{R}^n} dx g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x)$. \square

Der Modifikationssatz ist auch hilfreich bei Zusammensetzungen von Gebieten: Sei f über A und über B integrierbar und sei $A \cap B$ eine Nullmenge, dann ist f auch über $A \cup B$ integrierbar, da $f_{A \cup B}$ fast überall mit der Funktion $f_A + f_B$ übereinstimmt. Also gilt $\int_{A \cup B} dx f(x) = \int_A dx f(x) + \int_B dx f(x)$.

Satz 22.12 Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn f fast überall gleich Null ist. Insbesondere verschwindet jede nichtnegative integrierbare Funktion f mit $\int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) = 0$ fast überall.

Beweis. Die Richtung (\Leftarrow) ist klar. Sei also $\|f\|_1 = 0$. Wir betrachten $N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$. Dann gilt $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ mit $N_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$. Dann ist $\mathbf{1}_{N_k} \leq k \cdot |f|$ und somit $0 \leq \|\mathbf{1}_{N_k}\|_1 \leq k \|f\|_1 = 0$. Also ist jedes N_k und damit N eine Nullmenge. \square

23 Vollständigkeit des Lebesgue-Integrals

Definition 23.1 Eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt L^1 -konvergent gegen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_1 = 0$ gilt. Die Funktion f heißt dann ein L^1 -Grenzwert von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt L^1 -Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\|f_k - f_l\|_1 < \epsilon$ für alle $k, l \geq N$.

Der L^1 -Grenzwert kann nicht eindeutig sein, denn aus $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|g - f_k\|_1 = 0$ folgt $\|f - g\|_1 = 0$, d.h. f und g sind nur fast überall gleich. Wie üblich ist jede L^1 -konvergente Folge eine L^1 -Cauchyfolge. Für integrierbare Funktionen gilt aber auch die Umkehrung:

Satz 23.2 (Riesz-Fischer) Es sei $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ der Vektorraum der über \mathbb{R}^n integrierbaren Funktion. Jede L^1 -Cauchyfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ besitzt einen L^1 -Grenzwert $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\text{i) } \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx f_k(x)$$

- ii) *Es gibt eine Teilfolge von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert.*

Beweis. Es werden Indizes $k_1 < k_2 < \dots$ so gewählt, daß $\|f_k - f_{k_\nu}\|_1 < \frac{1}{2^\nu}$ für alle $k \geq k_\nu$. Dann gilt $\sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_{k_\nu} - f_{k_{\nu+1}}\|_1 \leq 1$. Abkürzend sei $g_\nu := f_{k_\nu} - f_{k_{\nu+1}}$ und $g = \sum_{\nu=1}^{\infty} |g_\nu|$. Nach Satz 22.10 ist wegen $\|g\|_1 \leq 1$ die Menge $N = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = \infty\}$ eine Nullmenge. Außerdem gibt es eine Nullmenge N_1 mit $f_{k_1}(x) \neq \infty$ für alle $x \notin N_1$. Dann setzen wir

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{k_\nu} = f_{k_1} + \sum_{n=1}^{\infty} g_\nu & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus (N \cup N_1) \\ 0 & \text{für } x \in N \cup N_1 \end{cases}$$

Damit ist $f(x) \neq \infty$, und die Teilfolge (f_{k_ν}) konvergiert fast überall gegen f , d.h. ii) ist gezeigt.

Die Teilfolge ist so gewählt, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\rho \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\sum_{\nu=\rho}^{\infty} \|g_\nu\|_1 < \epsilon$ und $\|f_k - f_{k_\rho}\|_1 < \epsilon$ für alle $k \geq k_\rho$. Da f_{k_ρ} integrierbar ist, gibt es eine Treppenfunktion ϕ mit $\|f_{k_\rho} - \phi\|_1 < \epsilon$. Somit gilt für $k \geq k_\rho$

$$\|f - \phi\|_1 \leq \|f - f_{k_\rho}\|_1 + \|f_{k_\rho} - \phi\|_1 < \left\| \sum_{\nu=\rho}^{\infty} g_\nu \right\|_1 + \epsilon < 2\epsilon,$$

d.h. f ist integrierbar. Für $k \geq k_\rho$ gilt

$$\|f - f_k\|_1 \leq \|f - f_{k_\rho}\|_1 + \|f_{k_\rho} - f_k\|_1 < 2\epsilon,$$

d.h. (f_k) ist L^1 -konvergent gegen f . Schließlich gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} dx f_k(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x) - f_k(x)| = \|f - f_k\|_1 < 2\epsilon.$$

also die in i) behauptete Konvergenz der Integrale. □

Eine integrierbare Funktion ist L^1 -Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen. Nach dem Satz von Riesz-Fischer kann man erwarten, daß fast überall auch punktweise Konvergenz zu erreichen ist:

Satz 23.3 *Jede integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ist L^1 -Grenzwert einer Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit*

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \|\phi_{k+1} - \phi_k\|_1 < \infty$

ii) (ϕ_k) konvergiert fast überall punktweise gegen f .

Beweis. Es gibt eine Folge (ψ_l) von Treppenfunktionen mit $\lim_{l \rightarrow \infty} \|f - \psi_l\|_1 = 0$. Nach dem Satz von Riesz-Fischer gibt es eine Teilfolge (ϕ_k) mit Eigenschaft i), die fast überall punktweise gegen eine integrierbare Funktion \tilde{f} konvergiert. Nach Konstruktion sind beide L^1 -Grenzwerte f, \tilde{f} fast überall gleich. \square

Wir wissen, daß die L^1 -Halbnorm keine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ aller über \mathbb{R}^n integrierbaren Funktionen ist: aus $\|f\|_1 = 0$ folgt nach Satz 22.12 nur, daß f fast überall Null ist. Es bietet sich deshalb an, fast überall gleiche Funktionen zu Äquivalenzklassen zusammenzufassen. Sei dazu $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) : \|f\|_1 = 0\}$. Offenbar ist $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ heißen *äquivalent* ($f \sim g$), wenn $f - g \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, d.h. wenn f und g fast überall gleich sind. Die entsprechende Äquivalenzklasse einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ wird mit $[f]$ oder $f + \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Die Menge aller Äquivalenzklassen

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) / \mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\}$$

wird zu einem Vektorraum mit $[0] = \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ und $c_1[f_1] + c_2[f_2] := [c_1f_1 + c_2f_2]$.

Durch die Äquivalenzklassenbildung wird das Problem mit der Normeigenschaft von $\|\cdot\|_1$ behoben: Dazu definieren wir $\|[f]\|_1 := \|f\|_1$. Diese Definition ist sinnvoll, denn aus $f \sim g$, also $[f] = [g]$, folgt

$$\|f\|_1 = \|g + (f - g)\|_1 \leq \|g\|_1 + \|f - g\|_1 = \|g\|_1,$$

und umgekehrt $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$. Die Norm ist also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung sowie $\|c[f]\|_1 = |c|\|f\|_1$. Schließlich gilt nach Satz 22.12 $\|[f]\|_1 = 0$ genau dann, wenn $[f] = [0]$. Damit ist $(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ ein normierter Raum, nach dem Satz von Riesz-Fischer sogar ein Banach-Raum.

24 Berechnung von Lebesgue-Integralen über Fubini

Wir geben zunächst ohne Beweis die wichtigste Methode an, um *stetige Funktionen über kompakte Teilmengen* zu integrieren.

Satz 24.1 (kleiner Satz von Fubini) *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ eine kompakte Teilmenge und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für festes $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ sei $A_y := \{x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^p$ und für festes $x \in \mathbb{R}^p$ sei $A_x := \{y \in \mathbb{R}^{n-p} : (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$. Dann gilt:*

- i) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.
- ii) Ist $A_y \neq \emptyset$, dann ist die durch $f_y(x) := f(x, y)$ definierte Funktion $f_y : A_y \rightarrow \mathbb{R}$ über A_y integrierbar, und die durch

$$F(y) := \begin{cases} \int_{A_y} dx f(x, y) & \text{für } A_y \neq \emptyset \\ 0 & \text{für } A_y = \emptyset \end{cases}$$

definierte Funktion $F : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$ ist über \mathbb{R}^{n-p} integrierbar.

- iii) Ist $A_x \neq \emptyset$, dann ist die durch $f_x(y) := f(x, y)$ definierte Funktion $f_x : A_x \rightarrow \mathbb{R}$ über A_x integrierbar, und die durch

$$G(x) := \begin{cases} \int_{A_x} dy f(x, y) & \text{für } A_x \neq \emptyset \\ 0 & \text{für } A_x = \emptyset \end{cases}$$

definierte Funktion $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ist über \mathbb{R}^p integrierbar.

- iv) Es gilt

$$\int_A d(x, y) f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} dy F(y) = \int_{\mathbb{R}^n} dx G(x).$$

Der Beweis wird später nachgeholt.

In Kombination mit Satz 22.2 können wir das Lebesgue-Integral schrittweise auf eindimensionale Riemann-Integrale zurückführen ($p = 1$). Für $p = 1$ und A kompakt ist $A_y = \bigcup_{k=1}^N [x_{1k}(y), x_{2k}(y)] \subseteq \mathbb{R}$ Vereinigung von Intervallen. Mit $B := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : A_y \neq \emptyset\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ gilt dann

$$\int_A d(x, y) f(x, y) = \int_B dy \left(\sum_{k=1}^N \int_{x_{1k}(y)}^{x_{2k}(y)} dx f(x, y) \right).$$

Insbesondere gilt für die Integration stetiger Funktionen über das Rechteck $[a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} d(x, y) f(x, y) = \int_c^d dy \left(\int_a^b dx f(x, y) \right) = \int_a^b dx \left(\int_c^d dy f(x, y) \right).$$

Definition 24.2 Das *Volumen* einer kompakte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch das Integral $v_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \mathbf{1}_A(x) = \int_A dx$. Ist $\mu : A \rightarrow \mathbb{R}$ die *Dichte* von A , so ist die (n -dimensionale) *Masse* von A erklärt als $m_n(A) = \int_A dx \mu(x)$.

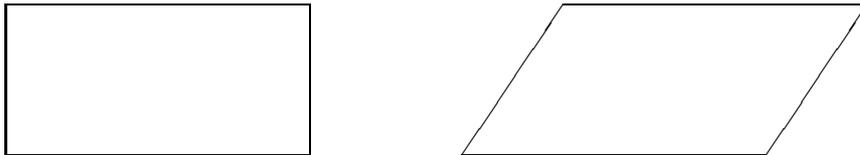
Der kleine Satz von Fubini ermöglicht (da $\mathbf{1}_A$ stetig auf A) die schrittweise Berechnung von Volumina. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ und $A_y := \{x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^p$ die in Satz 26.1 eingeführte Schnittmenge, dann gilt

$$v_n(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} dy v_p(A_y).$$

Insbesondere folgt

Satz 24.3 (Prinzip von Cavalieri) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ zwei kompakte Mengen, und es gelte $v_p(A_y) = v_p(B_y)$ für alle $y \in \mathbb{R}^{n-p}$. Dann gilt $v_n(A) = v_n(B)$. \square

Zum Beispiel haben ein Rechteck und ein Parallelogramm mit gleicher Grundlänge und gleicher Höhe das gleiche zweidimensionale Volumen (Flächeninhalt):



Beispiel 24.4 Es sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r\}$ der abgeschlossene Vollkreis vom Radius r . In obigen Bezeichnungen ist $A_y = [-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}]$ und $B = [-r, r]$. Somit gilt für eine stetige Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_A d(x, y) f(x, y) = \int_{-r}^r dy \left(\int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} dx f(x, y) \right).$$

Insbesondere ist das Volumen (also der Flächeninhalt) von A gegeben durch

$$\begin{aligned} v_2(A) &= \int_A d(x, y) 1 = \int_{-r}^r dy \left(\int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} dx 1 \right) = \int_{-r}^r dy 2\sqrt{r^2 - y^2} \\ &= 4 \int_0^r dy \sqrt{r^2 - y^2} \stackrel{y=r \cos t}{=} 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \sin^2 t = 4r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi r^2 \end{aligned}$$

nach Beispiel 31.3 aus dem 2. Semester. \triangleleft

Satz 24.5 (Volumen der n -dimensionalen Vollkugel)

Das Volumen $v_n(A) =: \kappa_n(r)$ der n -dimensionalen Vollkugel $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2\}$ vom Radius r ist

$$\kappa_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n!}{2}} r^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{n-1!}{2}}{n!} r^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beweis. Durch Induktion nach n . Die Aussage gilt offenbar für $n = 1$ mit $\kappa_1 = 2r$ und $n = 2$ mit $\kappa_2 = \pi r^2$.

i) Sei n gerade und die Behauptung bewiesen bis $n - 1$. Dann ist $A_{x_n} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq r^2 - x_n^2\}$ und somit

$$\begin{aligned} \kappa_n(r) &= \int_{-r}^r dx_n \int_{A_{x_n}} dy \, 1 = \int_{-r}^r dx_n \kappa_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2}) = 2 \int_0^r dx_n \kappa_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2}) \\ &= \frac{2^n \pi^{\frac{n-2}{2}} \frac{n-2}{2}!}{(n-1)!} \int_0^r dx_n (r^2 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ &\stackrel{x_n=r \cos t}{=} \frac{2^n \pi^{\frac{n-2}{2}} \frac{n-2}{2}!}{(n-1)!} \cdot r^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin^n t. \end{aligned}$$

Nach Beispiel 31.3 aus dem 2. Semester ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin^{2k} t = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2k(2k-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)! \pi}{2^{2k} k! (k-1)!},$$

und $2k \mapsto n$ liefert die Behauptung.

ii) Sei n ungerade und die Behauptung bewiesen bis $n - 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \kappa_n(r) &= \int_{-r}^r dx_n \int_{A_{x_n}} dy \, 1 = \int_{-r}^r dx_n \kappa_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2}) = 2 \int_0^r dx_n \kappa_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2}) \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n-1}{2}!} \int_0^r dx_n (r^2 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \stackrel{x_n=r \cos t}{=} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n-1}{2}!} r^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin^n t. \end{aligned}$$

Nach Beispiel 31.3 aus dem 2. Semester ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin^{2k+1} t = \frac{2k(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3 \cdot 1} = \frac{2^{2k} k! k!}{(2k+1)!},$$

und $2k+1 \mapsto n$ liefert die Behauptung. \square

Definition 24.6 Das Trägheitsmoment einer kompakten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Achse L ist definiert als

$$\Theta(A) := \int_A dx \, \mu(x) (d(x, L))^2,$$

wobei μ die Dichte und $d(x, L)$ der Abstand eines Punktes $x \in A$ zur Drehachse L ist.

Beispiel 24.7 (Trägheitsmoment eines homogenen Kreiszyinders) Es sei

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq h\}$$

ein homogener (konstante Dichte μ) gerader **Kreiszyylinder**, die z -Achse sei die Drehachse L . Dann gilt $d((x, y, z), L) = \sqrt{x^2 + y^2}$, so daß wir für das Trägheitsmoment nach Fubini erhalten

$$\begin{aligned}
\Theta(A) &= \int_0^h dz \int_{-r}^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx \mu \cdot (x^2 + y^2) \\
&= \mu h \int_{-r}^r dy \left(\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right) \Big|_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \\
&= \mu h \int_{-r}^r dy \left(\frac{2}{3} (\sqrt{r^2-y^2})^3 + 2y^2 \sqrt{r^2-y^2} \right) \\
&= 4\mu h \int_0^r dy \left(\frac{1}{3} (\sqrt{r^2-y^2})^3 + y^2 \sqrt{r^2-y^2} \right) \\
&\stackrel{y=r \cos t}{=} 4\mu h \int_{\frac{\pi}{2}}^0 dt (-r \sin t) \left(\frac{1}{3} r^3 \sin^3 t + r^3 \cos^2 t \sin t \right) \\
&= 4\mu h r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \left(\sin^2 t - \frac{2}{3} \sin^4 t \right) \\
&= 4\mu h r^4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad \leftarrow \text{Beispiel 31.3 (2. Semester)} \\
&= \frac{\pi}{2} \mu h r^4 = \frac{1}{2} m r^2,
\end{aligned}$$

wobei $m = \mu v_3(A) = \mu \pi r^2 h$ die Gesamtmasse des Zylinders ist. ◁

Definition 24.8 Der *Schwerpunkt* einer kompakten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dichte μ ist der Vektor $s = (s_1, \dots, s_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$s_i = \frac{\int_A d(x_1, \dots, x_n) x_i \cdot \mu(x_1, \dots, x_n)}{\int_A d(x_1, \dots, x_n) \mu(x_1, \dots, x_n)}.$$

Beispiel 24.9 Es sei $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^3, z \geq 0\}$ die halbe homogene Vollkugel vom Radius r und Dichte μ . Der Nenner ist die Masse $m = \mu v_3(A) = \frac{2\pi\mu}{3} r^3$. Für den Schwerpunkt $s = (s_x, s_y, s_z)$ gilt $s_x = s_y = 0$ aus Symmetriegründen. Es verbleibt

$$\begin{aligned}
s_z &= \frac{1}{\mu v_3(K)} \int_0^r dz \int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{r^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-z^2-y^2}} dx \mu z \\
&= \frac{3}{2\pi r^3} \int_0^r dz \int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} dy 2z \sqrt{r^2 - z^2 - y^2} \\
&= \frac{6}{\pi r^3} \int_0^r dz \int_0^{\sqrt{r^2-z^2}} dy z \sqrt{r^2 - z^2 - y^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y = \sqrt{r^2 - z^2} \cos t \quad \frac{6}{\pi r^3} \int_0^r dz \int_{\frac{\pi}{2}}^0 dt \left(-\sqrt{r^2 - z^2} \sin t \right) z \sqrt{r^2 - z^2} \sin t \\
& = \frac{6}{\pi r^3} \int_0^r dz z (r^2 - z^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \leftarrow \text{Beispiel 31.3 (2. Semester)} \\
& = \frac{3}{2r^3} \left(\frac{r^2}{2} \cdot r^2 - \frac{r^4}{4} \right) = \frac{3}{8} r. \quad \triangleleft
\end{aligned}$$

25 Konvergenzsätze

Wir zeigen nun, daß im Gegensatz zum Riemann-Integral das Lebesgue-Integral sogar mit Grenzwerten von monotonen beschränkten Funktionsfolgen vertauscht.

Satz 25.1 (von der monotonen Konvergenz bzw. Satz von Beppo Levi)

Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (oder monoton fallende) Folge integrierbarer reellwertiger Funktionen $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Die punktweise gebildete Grenzfunktion $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ ist genau dann integrierbar, wenn die Folge der Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} dx f_k(x)$ beschränkt ist. In diesem Fall gilt $\int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx f_k(x)$.

Beweis. (\Leftarrow) Wegen $f_k \leq f$ ist $\int_{\mathbb{R}^n} dx f_k(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x)$, so daß die Beschränktheit der Integrale notwendig ist.

(\Rightarrow) Die Folge $\left(\int_{\mathbb{R}^n} dx f_k(x) \right)_{k \in \mathbb{N}}$ sei beschränkt (und monoton wachsend).

Also konvergiert sie gegen einen Grenzwert in \mathbb{R} . Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, so daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $k \geq l \geq N$ gilt

$$\begin{aligned}
\|f_k - f_l\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} dx |f_k(x) - f_l(x)| = \int_{\mathbb{R}^n} dx (f_k(x) - f_l(x)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dx f_k(x) - \int_{\mathbb{R}^n} dx f_l(x) = \left| \int_{\mathbb{R}^n} dx f_k(x) - \int_{\mathbb{R}^n} dx f_l(x) \right| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Folglich ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -Cauchyfolge, die nach dem Satz von Riesz-Fischer einen L^1 -Grenzwert \tilde{f} hat, so daß eine Teilfolge (f_{k_ν}) fast überall punktweise gegen \tilde{f} konvergiert. Damit gilt $f = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{k_\nu} = \tilde{f}$ fast überall punktweise. Nach dem Modifikationssatz ist dann auch f integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \tilde{f}(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx f_{k_\nu}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx f_k(x). \quad \square$$

Wir wenden dieses Approximationsverfahren auf uneigentliche Riemann-Integrale von Regelfunktionen an. Das waren nach Definition 30.1 aus dem 2. Semester Funktionen, die sich *gleichmäßig* durch Treppenfunktionen approximieren lassen, d.h. zu einer Regelfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$

Treppenfunktionen ϕ, ψ mit $f(x) - \epsilon \leq \phi(x) \leq f(x)$ und $f(x) \leq \psi(x) \leq f(x) + \epsilon$. Regelfunktionen sind Riemann-integrierbar, und für sie gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Jede stetige Funktion ist Regelfunktion.

Satz 25.2 Eine Regelfunktion $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, wobei $a = \infty$ und/oder $b = \infty$ zugelassen ist, ist genau dann über $]a, b[$ Lebesgue-integrierbar, wenn $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist, d.h. für Folgen $[a_k, b_k] \subseteq]a, b[$ kompakter Intervalle mit

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{a_k}^{b_k} dx |f(x)| < \infty$. In diesem Fall

$$\text{gilt } \int_{]a, b[} dx f(x) = \int_a^b dx f(x).$$

Beweis. Wir wählen kompakte Intervalle $I_k = [a_k, b_k] \subseteq]a, b[$ mit $I_k \subseteq I_{k+1}$ und $\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k =]a, b[$.

(\Rightarrow) Sei f über $]a, b[$ Lebesgue-integrierbar, dann sind auch f^+ und f^- Lebesgue-integrierbar, und wegen $f_{[a_k, b_k]}^{\pm} \leq f_{]a, b[}^{\pm}$ gilt mit Satz 22.2

$$\int_{a_k}^{b_k} dx f^{\pm}(x) = \int_{[a_k, b_k]} dx f^{\pm}(x) \leq \int_{]a, b[} dx f^{\pm}(x).$$

Damit existiert $\int_a^b dx f^{\pm}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{a_k}^{b_k} dx f^{\pm}(x)$ und ist durch $\int_{]a, b[} dx f^{\pm}(x)$ beschränkt.

(\Leftarrow) Sei $|f| :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Nach dem Majorantenkriterium Satz 32.8 aus dem 2. Semester ist dann auch $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, und somit auch $f^{\pm} = \frac{1}{2}(|f| \pm f)$. Da auch f^{\pm} Regelfunktionen sind, gibt es eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $\phi_k^{\pm} :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$, die auf $]a, b[$ punktweise gegen f^{\pm} konvergiert. Die Folge der Integrale $\int_a^b dx \phi_k^{\pm}(x)$ ist nach dem Majorantenkriterium beschränkt durch $\int_a^b dx f^{\pm}(x)$. Nach dem Satz von Beppo Levi ist dann auch die Grenzfunktion $f_{]a, b[}^{\pm} = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k^{\pm}$ Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_{]a, b[} dx f^{\pm}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b dx \phi_k^{\pm}(x) \leq \int_a^b dx f^{\pm}(x).$$

Zusammen mit der umgekehrten Abschätzung aus (\Rightarrow) folgt dann

$$\int_{]a, b[} dx f^{\pm}(x) = \int_a^b dx f^{\pm}(x). \quad \square$$

Die absolute Konvergenz des Riemann-Integrals kann nicht auf einfache Konvergenz reduziert werden. Z.B. gilt für das uneigentliche Riemann-Integral

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \pi$, aber $\frac{\sin x}{x}$ ist nicht Lebesgue-integrierbar über \mathbb{R} . Denn mit $\frac{\sin x}{x}$ wäre auch $|\frac{\sin x}{x}|$ Lebesgue-integrierbar, was nicht der Fall ist.

Wir holen nun den Beweis nach, daß stetige beschränkte Funktionen über kompakte und beschränkte offene Teilmengen integrierbar sind. Dazu konstruieren wir geeignete Approximationen durch Treppenfunktionen:

Lemma 25.3 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $K \subseteq U$ kompakt. Sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f \geq 0$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi_\epsilon, \psi_\epsilon \geq 0$ mit*

$$f(x) - \epsilon \leq \phi_\epsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\epsilon(x) \leq f(x) + \epsilon \quad \text{für alle } x \in K$$

und $\phi_\epsilon(x) = \psi_\epsilon(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$.

Beweis. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig (Satz 22.13 aus dem 1. Semester), d.h. für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für die Supremumsnorm gilt

$$\|f(x) - f(x')\| < \epsilon \quad \text{für alle } x, x' \in K \text{ mit } \|x - x'\| < \delta.$$

Für jeden Punkt $x \in U$ werde ein abgeschlossener Würfel $W_x \subseteq U$ mit Mittelpunkt x und Kantenlänge $0 < l \leq \delta$ gewählt. Sei $W_i^o := W_i \setminus \partial W_i$ das (offene) Innere eines solchen Würfels. Dann ist $K \subseteq \bigcup_{x \in U} W_x^o$. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Würfel W_1^o, \dots, W_p^o , die K überdecken, und insbesondere ist $K \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_p \subseteq U$. Nun ist auch $W_i \cap K$ kompakt, so daß f auf $W_i \cap K$ ein Maximum M_i und Minimum m_i annimmt. Dann sind

$$\psi_k := \max(M_1 \mathbf{1}_{W_1}, \dots, M_p \mathbf{1}_{W_p}), \quad \phi_\epsilon := \min(m_1 \mathbf{1}_{W_1}, \dots, m_p \mathbf{1}_{W_p})$$

Treppenfunktionen mit den geforderten Eigenschaften. □

Lemma 25.4 *Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Vereinigung abzählbar vieler Würfel, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben.*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sei \mathcal{W}_k die Menge aller Würfel $W = I_1 \times \dots \times I_n$, so daß für jedes j eine ganze Zahl $m_j \in \mathbb{Z}$ existiert mit $I_j = [\frac{m_j}{2^k}, \frac{m_j+1}{2^k}]$. Dann ist \mathcal{W}_k abzählbar durch die ganzen Zahlen m_1, \dots, m_n . Nach Konstruktion schneiden sich beliebige Würfel aus $\mathcal{W}_k, \mathcal{W}_l$ höchstens in Randpunkten. Dann ist $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{W}_k$ mit $W_0 := \mathcal{W}_0 \cap U$ und dann rekursiv W_k als jene Teilmenge von $\mathcal{W}_k \cap U$, deren Inneres nicht in W_l liegt für $l < k$. □

Satz 25.5 i) *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Teilmenge. Dann ist jede beschränkte stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ über U integrierbar. Insbesondere ist U meßbar.*

ii) *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist jede stetige Funktion $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ über K integrierbar. Insbesondere ist K meßbar.*

Beweis. Wegen $f = f^+ - f^-$ mit $f^+(x) := \max(f(x), 0) \geq 0$ und $f^-(x) := \max(-f(x), 0) \geq 0$ genügt es, die Integrierbarkeit von nichtnegativen Funktion f zu zeigen.

i) Nach Lemma 25.4 ist U Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen $K_j \subseteq U$, d.h. $U = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$. Die Einschränkung von f auf $\bigcup_{j=0}^l K_j$ wird nach Lemma 25.3 von unten gleichmäßig durch eine Treppenfunktion ϕ_l zu $\epsilon_l = \frac{1}{2^l}$ approximiert. Dann ist $(\phi_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Da U beschränkt ist, gibt es einen abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $U \subseteq Q$. Da f beschränkt ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \phi_j(x) \leq f_U(x) \leq M \mathbf{1}_Q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Also gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \phi_l(x) \leq M v_Q < \infty ,$$

so daß f_U nach Satz 25.1 von Beppo Levi integrierbar ist.

ii) Umgekehrt ist jede kompakte Menge K abzählbarer Durchschnitt von offenen Teilmengen $U_j \supset K$, d.h. $K = \bigcap_{j=0}^{\infty} U_j$. Damit wird f_K nach Lemma 25.3 von oben durch eine monoton fallende Folge ψ_l von Treppenfunktionen zu $\epsilon_l = \frac{1}{2^l}$, die außerhalb $\bigcap_{j=0}^l U_j$ verschwinden, punktweise approximiert. Die Folge der Integrale $\left(\int_{\mathbb{R}^n} dx \psi_j(x) \right)_{j \in \mathbb{N}}$ ist nach unten durch 0 beschränkt, so daß f_K nach Satz 25.1 integrierbar ist. \square

Wir benötigen ein weiteres Integrierbarkeitskriterium:

Satz 25.6 (von der majorisierten Konvergenz bzw. Satz von Lebesgue)

Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf \mathbb{R}^n , die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Es gebe eine integrierbare Funktion F mit $|f_k| \leq F$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist f integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx f_k(x).$$

Beweis. Es genügt, reellwertige Funktionen zu betrachten. Es gibt eine Nullmenge N , so daß $F(x) < \infty$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \notin N$. Für $x \in N$ sei $F(x) = f(x) = f_k(x) = 0$ gesetzt, so daß (f_k) punktweise gegen f konvergiert. Sei $g_{k,\nu} = \max(f_k, f_{k+1}, \dots, f_{k+\nu})$. Dann ist für festes k die Folge $(g_{k,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend, und die Folge der Integrale ist beschränkt durch das Integral von F . Nach dem Satz von Beppo Levi ist $g_k := \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_{k,\nu} = \sup_{j \geq k} f_j$ integrierbar, mit

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} dx g_k(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx F(x) .$$

Andererseits konvergiert $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend punktweise gegen f . Analog zum Beweis des Satzes von Beppo Levi ist damit (g_k) eine L^1 -Cauchy-Folge, die einen L^1 -Grenzwert \tilde{g} hat, gegen den eine Teilfolge g_{k_i} fast überall punktweise

konvergiert. Somit ist $f = \tilde{g} = \lim_{l \rightarrow \infty} g_{k_l}$ fast überall, und es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx g_k(x)$.

Das Verfahren wird wiederholt für $h_{k,\nu} = \min(f_k, f_{k+1}, \dots, f_{k+\nu})$ mit Limes und $h_k := \lim_{\nu \rightarrow \infty} h_{k,\nu} = \inf_{j \geq k} f_j$ und $\int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx h_k(x)$. Aus $h_k \leq f_k \leq g_k$ folgt die Behauptung. \square

Der Satz von Lebesgue wird insbesondere beim Vertauschen von Integral und Reihenentwicklung benutzt:

Beispiel 25.7 Wir beweisen $\int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \Gamma(s)\zeta(s)$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Diese Formel wird beim Planckschen Strahlungsgesetz benötigt.

Der Integrand ist punktweiser Limes der Regelfunktionen $f_k = \sum_{n=1}^k x^{s-1} e^{-nx}$. Es gilt $|x^{s-1}| = |e^{\ln x(s-1)}| = |e^{\ln x(\operatorname{Re}(s)-1)}| = x^{\operatorname{Re}(s)-1}$. Damit ist $|f_k|$ über \mathbb{R}_+ uneigentlich Riemann-integrierbar, folglich f_k Lebesgue-integrierbar. Es gilt

$$|f_k| \leq F = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\operatorname{Re}(s)-1} e^{-nx} = \frac{x^{\operatorname{Re}(s)-1}}{e^x - 1},$$

und für $\operatorname{Re}(s) > 1$ ist F wieder Lebesgue-integrierbar. Somit gilt nach dem Satz von Lebesgue

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_0^\infty dx x^{s-1} e^{-nx} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} \Gamma(s) = \zeta(s)\Gamma(s). \quad \square$$

Eine weitere Anwendung betrifft die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale. Sei X ein metrischer Raum, $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Für festes $x \in X$ werde durch $f_x(t) = f(x, t)$ eine Funktion $f_x : T \rightarrow \mathbb{R}$ definiert und für festes $t \in T$ eine Funktion $f_t : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_t(x) = f(x, t)$.

Satz 25.8 Für eine Funktion $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ gelte:

- i) Für jedes $x \in X$ ist $f_x : T \rightarrow \mathbb{R}$ über T integrierbar.
- ii) Für jedes $t \in T$ ist $f_t : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf X .
- iii) Es gibt eine integrierbare Funktion $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f(x, t)| \leq \Phi(t)$ für alle $(x, t) \in X \times T$.

Dann liefert das Integral $F(x) := \int_T dt f_x(t)$ eine stetige Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Für eine gegen x konvergierende Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in X$ sei $f_k(t) := f(x_k, t)$. Wegen ii) konvergiert die Folge (f_k) gegen f_x . Nach iii) ist $|f_k| \leq \Phi$. Dann liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$F(x) = \int_T dt f_x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T dt f_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k),$$

d.h. F ist stetig. □

26 Der Satz von Fubini

Es geht nun um die Verallgemeinerung des Satzes von Fubini für stetigen Funktionen (bisher nicht bewiesen) auf beliebige integrierbare Funktionen. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei $X = \mathbb{R}^p$ und $Y = \mathbb{R}^{n-p}$. Wie üblich entsteht aus $f(x, y)$ durch Festhalten von $y \in Y$ die Funktion f_y auf X und durch Festhalten von $x \in X$ die Funktion f_x auf Y .

Satz 26.1 (Fubini (allgemeinster Fall)) *Es sei $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt:*

- i) *Abgesehen von einer möglichen Nullmenge $N \subseteq Y$ ist für festes $y \in Y \setminus N$ die Funktion f_y über X integrierbar.*

- ii) *Die durch $F(y) := \begin{cases} \int_X dx f(x, y) & \text{für } y \in Y \setminus N \\ 0 & \text{für } y \in N \end{cases}$ definierte Funktion $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist über Y integrierbar, und es gilt*

$$\int_{X \times Y} d(x, y) f(x, y) = \int_Y dy F(y) \equiv \int_Y dy \int_X dx f(x, y).$$

Beweis. Zu f gibt es nach Satz 23.3 eine Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen und eine Nullmenge $A \subseteq X \times Y$, so daß für $(x, y) \notin A$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(x, y) = f(x, y)$ und außerdem $\sum_{k=0}^{\infty} \|\phi_{k+1} - \phi_k\|_1 < \infty$. Im folgenden bezeichnen $\|\cdot\|_{1, X}$ und $\|\cdot\|_{1, Y}$ die L^1 -Halbnormen auf X und Y .

Wir beweisen zunächst, daß es eine Nullmenge $N' \subseteq Y$ gibt, so daß für $y \in Y \setminus N'$ gilt, daß $A_y := \{x \in X : (x, y) \in A\} \subseteq X$ eine Nullmenge ist. Wegen $\|\mathbf{1}_A\|_1 = 0$ gibt es für jedes $\epsilon > 0$ zu $\mathbf{1}_A$ eine Hüllreihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{Q_i}$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} c_i v(Q_i) < \epsilon$. Die Quader zerlegen sich in $Q_i = Q'_i \times Q''_i$ mit $Q'_i \in X$ und $Q''_i \in Y$. Für festes y ist (ohne Ausschluß einer Nullmenge) $\mathbf{1}_{A_y}(x) \leq \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{Q'_i}(x) \mathbf{1}_{Q''_i}(y)$ und damit

$$a(y) := \int_X dx \mathbf{1}_{A_y}(x) \leq \sum_{i=0}^{\infty} c_i v(Q'_i) \mathbf{1}_{Q''_i}(y).$$

Integration der so definierten Funktion a über Y liefert $\|a\|_{1, Y} \leq \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$, somit $\|a\|_{1, Y} = 0$. Damit existiert eine Nullmenge $N' \subseteq Y$, so daß $0 = a(y) = \|\mathbf{1}_{A_y}\|_{1, X} = 0$ für $y \notin N'$. Das war zu zeigen.

Folglich konvergiert für festes $y \in Y \setminus N'$ die Folge $(\phi_{k,y})_{k \in \mathbb{N}}$ fast überall auf X (nämlich für $x \notin A_y$) gegen f_y .

Sei $H_k(y) := \int_X dx |\phi_{k+1,y}(x) - \phi_{k,y}(x)| = \|\phi_{k+1,y} - \phi_{k,y}\|_{1,X}$. Nach dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen (Satz 21.3) gilt $\int_Y dy H_k(y) = \int_{X \times Y} d(x,y) |\phi_{k+1}(x,y) - \phi_k(x,y)| = \|\phi_{k+1} - \phi_k\|_1$ und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_Y dy H_k(y) < \infty . \quad (*)$$

Die Folge $(G_s)_{s \in \mathbb{N}}$ der Funktionen $G_s = \sum_{k=0}^s H_k$ ist monoton wachsend. Nach (*) gilt

$$I_s := \int_Y dy G_s(y) = \sum_{k=0}^s \int_Y dy H_k(y) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_Y dy H_k(y) < \infty ,$$

d.h. die Folge $(I_s)_{s \in \mathbb{N}}$ der Integrale ist beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi ist damit die Grenzfunktion $\sum_{k=0}^{\infty} H_k$ integrierbar. Nach Satz 22.10 gibt es höchstens eine Nullmenge N'' , so daß $H_k(y) < \infty$ für alle $y \in Y \setminus N''$. Somit gilt für alle $y \in Y \setminus N$, mit $N = N' \cup N''$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\phi_{k+1,y} - \phi_{k,y}\|_{1,X} < \infty . \quad (**)$$

Nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\sum_{k=l}^{l'} \|\phi_{k+1,y} - \phi_{k,y}\|_{1,X} < \epsilon$ für alle $l' > l \geq N$. Insbesondere ist $(\phi_{k,y})_{k \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -Cauchyfolge auf X , die nach dem Satz von Riesz-Fischer fast überall punktweise gegen eine über X integrierbare Funktion \tilde{f}_y konvergiert. Damit ist nach dem Modifikationssatz auch f_y integrierbar, und für $y \in Y \setminus N$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X dx \phi_k(x,y) = \int_X dx f(x,y) = F(y) .$$

Somit ist i) bewiesen.

Wir betrachten nun die Treppenfunktionen $\Phi_k(y) := \int_X dx \phi_{k,y}(x)$. Die Folge $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen F . Außerdem ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|\Phi_{k+1} - \Phi_k\|_{1,Y} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_Y dy \left| \int_X dx (\phi_{k+1,y}(x) - \phi_{k,y}(x)) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_Y dy \int_X dx |\phi_{k+1,y}(x) - \phi_{k,y}(x)| = \sum_{k=0}^{\infty} \|\phi_{k+1} - \phi_k\|_1 < \infty . \end{aligned}$$

Somit ist $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -Cauchyfolge, die nach dem Satz von Riesz-Fischer fast überall punktweise gegen eine integrierbare Funktion \tilde{F} konvergiert. Damit ist auch F integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_Y dy F(y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_y dy \Phi_k(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_y dy \int_X dx \phi_k(x, y) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} d(x, y) \phi_k(x, y) = \int_{X \times Y} d(x, y) f(x, y). \quad \square \end{aligned}$$

Im Beweis können die Rollen von X, Y vertauscht werden, so daß für eine über $X \times Y$ integrierbare Funktion gilt

$$\int_{X \times Y} d(x, y) f(x, y) = \int_X dx \int_Y dy f(x, y) = \int_Y dy \int_X dx f(x, y).$$

Die Voraussetzung der Integrierbarkeit über $X \times Y$ im Satz von Fubini ist entscheidend. Es gibt Beispiele für Funktionen, für die die Integrale $\int_X dx \int_Y dy f(x, y)$ und $\int_Y dy \int_X dx f(x, y)$ existieren, ohne daß $f(x, y)$ integrierbar ist. Die Umkehrung ist der Satz von Tonelli. Dazu benötigen wir:

Definition 26.2 Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt σ -kompakt, falls sie Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen ist.

Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf einer σ -kompakten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *lokal-integrierbar*, wenn sie über jede kompakte Teilmenge $K \subseteq A$ integrierbar ist.

Jede kompakte und jede offene Menge ist σ -kompakt.

Satz 26.3 (Tonelli) Eine lokal-integrierbare Funktion $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann über $X \times Y$ integrierbar, wenn wenigstens eines der iterierten Integrale $\int_X dx \int_Y dy |f(x, y)|$ oder $\int_Y dy \int_X dx |f(x, y)|$ existiert. Ist das der Fall, so gilt

$$\int_{X \times Y} d(x, y) f(x, y) = \int_X dx \int_Y dy f(x, y) = \int_Y dy \int_X dx f(x, y).$$

Beweis. (\Leftarrow) Mit f ist auch $|f|$ über $X \times Y$ integrierbar, und der Satz von Fubini liefert die Existenz und Eigenschaften der iterierten Integrale.

(\Rightarrow) Sei $X \times Y = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, mit A_k kompakt, sowie $B_l := \bigcup_{k=0}^l A_k$ und $f_l := f \mathbf{1}_{B_l}$. Die Folge $\{|f_l|\}$ konvergiert punktweise monoton wachsend gegen $|f|$. Mit f_l ist auch $|f_l|$ integrierbar, somit gilt für $|f_l|$ der Satz von Fubini,

$$\int_{X \times Y} d(x, y) |f_l(x, y)| = \int_Y dy \int_X dx |f_l(x, y)| \leq \int_Y dy \int_X dx |f(x, y)|.$$

Nach Voraussetzung ist das Integral beschränkt, so daß nach dem Satz von Beppo Levi die Grenzfunktion $|f|$ integrierbar ist. Schließlich folgt die Integrierbarkeit von f aus dem Satz von Lebesgue. \square

Satz 26.4 (Majorantenkriterium) *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine σ -kompakte Menge, $f : A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine lokal-integrierbare Funktion, für die es eine integrierbare Majorante $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $|f| \leq F$. Dann ist auch f integrierbar.*

Beweis. Es sei $A = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} A_l = A$ mit A_l kompakt und $B_k := \bigcup_{l=0}^k A_l$. Dann ist $f_k := f \mathbf{1}_{B_k}$ integrierbar mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ und $|f_k| \leq |f| \leq F$. Nach dem Satz von Lebesgue ist f integrierbar. \square

27 Der Transformationsatz

Der Transformationsatz ist eine mächtige Methode zur Berechnung von Integralen.

Satz 27.1 *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und sei $T : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist genau dann über V integrierbar, wenn die Funktion $|\det(DT)| \cdot (f \circ T) : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ über $U = T^{-1}(V)$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_U dx |\det(DT)(x)| f(T(x)) = \int_V dy f(y).$$

Zur Erinnerung: Ein Diffeomorphismus T ist eine differenzierbare bijektive Abbildung mit differenzierbarem Inversen. Das Differential DT ist dann eine lineare Abbildung $DT : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, so daß die Determinante korrekt definiert ist. Für genügend kleine U sichert der Satz über die inverse Funktion Satz 4.5 die Invertierbarkeit von DT . Der Transformationsatz läßt sich aber auch verwenden, wenn T nur auf einer Nullmenge N kein Diffeomorphismus ist, da Nullmengen im Lebesgue-Integral keine Rolle spielen. In diesem Fall genügt es, über $U \setminus N$ bzw. $T^{-1}(U \setminus N)$ zu integrieren.

Wir beweisen den Transformationsatz im übernächsten Abschnitt und stellen zunächst typische Folgerungen und Anwendungen vor.

- Im \mathbb{R}^1 reduziert sich der Transformationsatz auf die Substitutionsregel: Sei $T : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung, dann gilt $\int_{[a,b]} dx |T'(x)| f(T(x)) = \int_{[\alpha,\beta]} dy f(y)$.
- Im Spezialfall einer nichtausgearteten affinen Transformation $y = T(x) = Ax + b \in \mathbb{R}^n$ mit $\det A \neq 0$ ist $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ genau dann über $K \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar, wenn $f \circ T$ über $T^{-1}(K)$ integrierbar ist, und es gilt

$$\int_{T^{-1}(K)} dx f(Ax + b) = \frac{1}{|\det A|} \int_K dy f(y).$$

- Beschreibt A eine Rotation oder Spiegelung (dann ist $|\det A| = 1$) und wählen wir für f die konstante Funktion $f = 1$, so folgt, daß K genau dann meßbar ist, wenn $T^{-1}(K)$ meßbar ist, und es gilt $v_n(K) = v_n(T^{-1}(K))$. Volumina bleiben also bei Kombinationen aus Verschiebung, Drehung und Spiegelung erhalten.

27.1 Integrale über Kugelschalen

Sehr häufig treten Integrale über n -dimensionale Kugeln oder Kugelschalen auf. Solche Integrale lassen sich durch eine Transformation T zu Polarkoordinaten vereinfachen (und mit dem Satz von Fubini oft auch lösen). Polarkoordinaten im \mathbb{R}^n bestehen aus dem Radius r und $n - 1$ Winkeln $\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}$. Dann ist $T : (r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) \mapsto (y_1, \dots, y_n) = T_n(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2})$ definiert durch $T_2(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ und dann rekursiv $y_n = r \cos \vartheta_{n-2}$ und $(y_1, \dots, y_{n-1}) = T_{n-1}(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-3}) \cdot \sin \vartheta_{n-2}$. Konkret heißt das

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta_1 \cdots \sin \vartheta_{n-2} \\ r \sin \varphi \sin \vartheta_1 \cdots \sin \vartheta_{n-2} \\ r \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-2} \\ \vdots \\ r \cos \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2} \\ r \cos \vartheta_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Damit die Transformation T bijektiv wird, ist (z.B.) $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2} \in]0, \pi[$ und $\varphi \in]0, 2\pi[$ zu wählen.

Satz 27.2 *Es gilt $|\det(DT)(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2})| = r^{n-1}(\sin \vartheta_1)^1 \cdots (\sin \vartheta_{n-2})^{n-2}$.*

Beweis. Das Differential der Transformation ist

$$DT = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial r} & \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta_{n-2}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial r} & \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial y_2}{\partial \vartheta_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial \vartheta_{n-2}} \\ \frac{\partial y_3}{\partial r} & \frac{\partial y_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial y_3}{\partial \vartheta_1} & \cdots & \frac{\partial y_3}{\partial \vartheta_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial r} & \frac{\partial y_n}{\partial \varphi} & \frac{\partial y_n}{\partial \vartheta_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial \vartheta_{n-2}} \end{pmatrix}$$

Für $n = 2$ ist $\partial_r y = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ und $\partial_\varphi y = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi)$, so daß die Determinantenformel gilt. Im Schritt von n auf $n + 1$ für $n \geq 2$ haben wir mit $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (\tilde{y} \sin \vartheta_{n-1}, r \cos \vartheta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \partial_r y &= \begin{pmatrix} \partial_r \tilde{y} \cdot \sin \vartheta_{n-1} \\ \cos \vartheta_{n-1} \end{pmatrix}, & \partial_\varphi y &= \begin{pmatrix} \partial_\varphi \tilde{y} \cdot \sin \vartheta_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \partial_{\vartheta_i} y &= \begin{pmatrix} \partial_{\vartheta_i} \tilde{y} \cdot \sin \vartheta_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } 1 \leq i \leq n-2, & \partial_{\vartheta_{n-1}} y &= \begin{pmatrix} \tilde{y} \cos \vartheta_{n-1} \\ -r \sin \vartheta_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme gelte die Determinatenformel für $n \geq 2$. Im Schritt von n auf $n+1$ betrachten wir zunächst $\sin \vartheta_{n-1} = 0$. Dann ist gilt $\text{rang}(dT) = 2$ und damit $\det dT = 0$. Sei also $\sin \vartheta_{n-1} \neq 0$. Dann addieren wir das $(-r \frac{\cos \vartheta_{n-1}}{\sin \vartheta_{n-1}})$ -fache der ersten Spalte zur letzten. Wegen $r \partial_r \tilde{y} = \tilde{y}$ wird die neue letzte Spalte zu

$$\begin{pmatrix} -r \partial_r \tilde{y} \cdot \cos \vartheta_{n-1} \\ -r \frac{\cos^2 \vartheta_{n-1}}{\sin \vartheta_{n-1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{y} \cos \vartheta_{n-1} \\ -r \sin \vartheta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-r}{\sin \vartheta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Entwicklung nach der neuen letzten Spalte und Herausziehen des Faktors $\sin \vartheta_{n-1}$ aus jeder der ersten n Spalten der Unterdeterminante bestätigt die Determinatenformel. \square

Sei nun $\Pi :=]0, 2\pi[\times (]0, \pi[)^{n-2}$ und $I \subseteq]0, \infty[$ ein offenes Intervall. Dann ist das Bild von $I \times \Pi$ unter T die offene Teilmenge $K(I) \setminus N \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei $K[I] := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \in I\}$ die offene Kugelschale der Radien im Intervall I ist und N eine Nullmenge, die durch Aufschneiden der Kugel bei $y_2 = 0$ entlang der positiven y_1 -Achse erhalten wird. Da für das Lebesgue-Integral Nullmengen (N und Ränder von I) keine Rolle spielen, erhalten wir

Satz 27.3 *Sei $I \subseteq [0, \infty[$ ein beliebiges Intervall und $K(I) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \in I\}$ die entsprechende Kugelschale. Eine auf $K(I)$ definierte Funktion f ist genau dann über die Kugelschale $K(I)$ integrierbar, wenn die Funktion $f(T(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2})) \cdot r^{n-1} C(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2})$ über $I \times \Pi$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt (unter Verwendung des Satzes von Fubini)*

$$\begin{aligned} & \int_{K(I)} dy f(y) \\ &= \int_I dr r^{n-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta_1 \sin \vartheta_1 \cdots \int_0^\pi d\vartheta_{n-2} \sin^{n-2} \vartheta_{n-2} f(T(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2})). \end{aligned}$$

\square

Beispiel 27.4 Das Trägheitsmoment einer homogenen (dreidimensionalen) Vollkugel K vom Radius R mit Dichte μ ist bezüglich einer durch den Mittelpunkt gehenden Achse gegeben durch

$$\begin{aligned} \Theta(K) &= \mu \int_K d(x, y, z) (x^2 + y^2) \\ &= \mu \int_0^R dr r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta (r^2 \sin^2 \vartheta) \\ &= \mu \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta = \mu \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \int_0^\pi d\vartheta (\sin \vartheta - \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) \\ &= \mu \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \left(-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right) \Big|_0^\pi \\ &= \mu \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2R^2}{5} \mu \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{2}{5} m R^2. \end{aligned}$$

\triangleleft

Wenn in Satz (27.3) die Funktion f nicht von den Winkeln abhängt, also rotationssymmetrisch ist, dann erhalten wir:

Satz 27.5 *Es sei f eine Funktion auf dem Intervall $]a, b[$. Die Funktion \tilde{f} auf \mathbb{R}^n mit $\tilde{f}(x) = f(\|x\|)$ ist genau dann über die Kugelschale K_I integrierbar, wenn die Funktion $f(r)r^{n-1}$ über I integrierbar ist. In diesem Fall gilt mit $\kappa_n := \kappa_n(1)$*

$$\int_{K(I)} dx f(\|x\|) = n\kappa_n \int_I dr r^{n-1} f(r) .$$

Beweis. Unter Verwendung von Satz 27.3 ist nur zu zeigen, daß das Winkelintegral $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta_1 \sin \vartheta_1 \cdots \int_0^\pi d\vartheta_{n-2} \sin^{n-2} \vartheta_{n-2} = n\kappa_n$ liefert. Das folgt aber sofort für das Volumen der Einheitsvollkugel mit $f = 1$ und $I = [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \int_{[0,1]} dr r^{n-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta_1 \sin \vartheta_1 \cdots \int_0^\pi d\vartheta_{n-2} \sin^{n-2} \vartheta_{n-2} \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta_1 \sin \vartheta_1 \cdots \int_0^\pi d\vartheta_{n-2} \sin^{n-2} \vartheta_{n-2} . \quad \square \end{aligned}$$

27.2 Integration über Teilmengen von $(\mathbb{R}_+)^n$

Häufig treten Integrationen auf, die auf das Standardsimplex

$$\Delta^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

zurückgeführt werden können, z.B. bei Funktionen auf $(\mathbb{R}_+)^n$, die entscheidend von der Summe $x_1 + \dots + x_n$ abhängen. In diesem Fall ist eine auf Jacobi zurückgehende Transformation hilfreich. Dazu definiert man

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = J_2(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1(1 - u_2) \\ u_1 u_2 \end{pmatrix}$$

und dann rekursiv für $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = J_{n+1}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) := \begin{pmatrix} J_n(u_1, \dots, u_n) (1 - u_{n+1}) \\ u_1 u_{n+1} \end{pmatrix} .$$

Wir zeigen, daß J_n einen Diffeomorphismus implementiert zwischen

- $\mathbb{R}_+ \times (]0, 1[)^{n-1}$ und $(\mathbb{R}_+)^n$,
- bzw. $(]0, 1[)^n$ und $(\Delta^n)^\circ := \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$.

Zunächst zur Bijektivität. Klar ist, daß das Bild Teilmenge von $(\mathbb{R}_+)^n$ ist. Es gilt $x_1 + \dots + x_n = u_1$ zunächst für $n = 2$ und dann rekursiv für alle n . Sei also $u_1 > 0$. Damit gilt $0 < x_n < u_1$, es gibt also eine bijektive Zuordnung

zwischen $u_n \in]0, 1[$ und $x_n = u_1 u_n$. Sei dann zusätzlich u_n fixiert, dann ist $x_1 + \dots + x_{n-1} = u_1 - x_n = u_1(1 - u_n)$. Insbesondere folgt $0 < x_{n-1} < u_1(1 - u_n)$, damit eine bijektive Zuordnung zwischen $u_{n-1} \in]0, 1[$ und $x_n = u_1 u_{n-1}(1 - u_n)$, usw.

Das Differential von J ist

$$(DJ_2)(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 - u_2 & -u_1 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix},$$

$$(DJ_{n+1})(\tilde{u}, u_{n+1}) = \begin{pmatrix} (1 - u_{n+1})(DJ_n)(\tilde{u}) & -J_n(\tilde{u}) \\ u_{n+1} \cdot e_1 & u_1 \end{pmatrix},$$

wobei $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ der erste Einheitsvektor ist. Also ist J differenzierbar. Es gilt $\det(DJ_2)(u_1, u_2) = u_1$. In der Rekursionsformel ist die erste Spalte gegeben durch $((1 - u_{n+1})\frac{\partial J_n}{\partial u_1}, u_{n-1})^t = (\frac{(1-u_{n+1})}{u_1} J_n, u_{n-1})^t$, so daß Addition der $\frac{u_1}{1-u_{n+1}}$ -fachen ersten Spalte zur letzten ergibt:

$$\det(DJ_{n+1})(\tilde{u}, u_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} (1 - u_{n+1})(DJ_n)(\tilde{u}) & 0 \\ u_{n+1} \cdot e_1 & u_1 + \frac{u_1 u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} \end{pmatrix}$$

$$= u_1(1 - u_{n+1})^{n-1} \det \left((DJ_n)(\tilde{u}) \right).$$

Somit gilt $|\det(DJ_n)(u_1, \dots, u_n)| = u_1^{n-1}(1 - u_3)(1 - u_4)^2 \dots (1 - u_n)^{n-2}$, und J_n ist ein Diffeomorphismus. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 27.6 *Eine auf $(\mathbb{R}_+)^n$ bzw. auf $(\Delta^n)^\circ$ definierte Funktion f ist genau dann über $(\mathbb{R}_+)^n$ bzw. $(\Delta^n)^\circ$ integrierbar, wenn die Funktion $|\det(DJ_n)|f \circ J_n$ über $\mathbb{R}_+ \times W^{n-1}$ bzw. über W^n integrierbar ist, wobei $W^k :=]0, 1]^k$ der offene Würfel ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{\substack{(\mathbb{R}_+)^n \\ \text{bzw. } \Delta^n}} dx f(x)$$

$$= \int_{\substack{\mathbb{R}_+ \\ \text{bzw. }]0, 1[}} du_1 u_1^{n-1} \int_{]0, 1[} du_2 \int_{]0, 1[} du_3 (1 - u_3) \dots \int_{]0, 1[} du_n (1 - u_n)^{n-2} f(J_n(u_1, \dots, u_n)).$$

Speziell erhalten wir $v_n(\Delta^n) = \frac{1}{n!}$.

Beispiel 27.7 (Beta-Funktion) Wir integrieren die für $p, q > 0$ stetige und beschränkte Funktion $f(x, y) = x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}$ über $(\mathbb{R}^+)^2$ mit der Jacobi-Formel und mit dem Satz von Fubini:

$$\int_{(\mathbb{R}^+)^2} d(x, y) x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y} = \int_0^\infty du_1 u_1^{p+q-1}e^{-u_1} \int_0^1 du_2 (1 - u_2)^{p-1}u_2^{q-1}$$

$$= \Gamma(p + q) \int_0^1 du_2 (1 - u_2)^{p-1}u_2^{q-1}$$

$$\text{Fubini} = \int_0^\infty dx x^{p-1}e^{-x} \int_0^\infty dy y^{q-1}e^{-y} = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

Somit gilt für die als Beta-Funktion bezeichnete Funktion $B(p, q)$

$$B(p, q) := \int_0^1 dt (1-t)^{p-1} t^{q-1} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad \triangleleft$$

Beispiel 27.8 Mit der Jacobi-Abbildung lassen sich z.B. zweidimensionale Integrale des folgenden Typs lösen (dabei ist $p, q > 0$):

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^2} d(x, y) x^{p-1} y^{q-1} f(x+y) &= \int_{]0,1[} du_1 u_1^{p+q-1} f(u_1) \int_{]0,1[} du_2 (1-u_2)^{p-1} u_2^{q-1} \\ &= B(p, q) \int_{]0,1[} du_1 u_1^{p+q-1} f(u_1). \end{aligned}$$

Die obige Gleichung gilt, wenn eines der Integrale existiert. Statt über Δ^2 und $]0, 1[$ kann auch über $(\mathbb{R}_+)^2$ und \mathbb{R}_+ integriert werden. \triangleleft

Beispiel 27.9 Das Trägheitsmoment des Standardsimplex Δ^3 bei Rotation um die z -Achse ist

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_{\Delta^3} d(x, y, z) \mu \cdot (x^2 + y^2) \\ &= \int_0^1 du_1 u_1^2 \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 (1-u_3) \mu \cdot ((u_1(1-u_2)(1-u_3))^2 + (u_1 u_2 (1-u_3))^2) \\ &= \mu \int_0^1 du_1 u_1^4 \int_0^1 du_2 (1-2u_2+2u_2^2) \int_0^1 du_3 (1-u_3)^3 \\ &= \frac{\mu}{5 \cdot 4} \left(1 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{\mu}{30} = \frac{1}{5} m(\Delta^3). \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Die Integration über das Standardsimplex ist deshalb so wichtig, weil sich durch Potenzabbildungen viele Integrationsgebiete darauf zurückführen lassen. Dazu wird für $\alpha_i, a_i > 0$ folgende Transformation betrachtet:

$$(y_1, \dots, y_n) = T(x_1, \dots, x_n) := (a_1 x_1^{\frac{1}{\alpha_1}}, \dots, a_n x_n^{\frac{1}{\alpha_n}}).$$

Die Transformation T bildet $(\mathbb{R}_+)^n$ diffeomorph auf sich selbst ab. Sie bildet andererseits das Innere des Standardsimplex Δ^n diffeomorph auf das Innere des verallgemeinerten Simplex

$$\Delta_{a_1, \dots, a_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n} := \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_i \geq 0, \left(\frac{y_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \dots + \left(\frac{y_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \leq 1 \right\}$$

ab. Das sind dann z.B. Viertelkreise ($n = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 2, a_1 = a_2 = r$) oder Kugeloktanten, ...

Die Determinante des Differentials ist offenbar

$$|\det(DT)(x_1, \dots, x_n)| = \frac{a_1 \cdots a_n}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} x_1^{\frac{1}{\alpha_1}-1} \cdots x_n^{\frac{1}{\alpha_n}-1}.$$

Satz 27.10 Eine auf dem verallgemeinerten Simplex $(\Delta_{a_1, \dots, a_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$ definierte Funktion f ist genau dann über dieses verallgemeinerte Simplex integrierbar, wenn die Funktion $f(a_1 x_1^{\frac{1}{\alpha_1}}, \dots, a_n x_n^{\frac{1}{\alpha_n}}) x_1^{\frac{1}{\alpha_1}-1} \cdots x_n^{\frac{1}{\alpha_n}-1}$ über das Standardsimplex integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\Delta_{a_1, \dots, a_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}} dy f(y) = \frac{a_1 \cdots a_n}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \int_{\Delta^n} d(x_1, \dots, x_n) x_1^{\frac{1}{\alpha_1}-1} \cdots x_n^{\frac{1}{\alpha_n}-1} f(a_1 x_1^{\frac{1}{\alpha_1}}, \dots, a_n x_n^{\frac{1}{\alpha_n}}).$$

Durch Kombination mit der Jacobi-Transformation entsteht so ein Diffeomorphismus $W^n \xrightarrow{J_n} \Delta^n \xrightarrow{T} \Delta_{a_1, \dots, a_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, mit dem wir Integrationen über ein verallgemeinertes Simplex auf Integrationen über den Würfel zurückführen können.

Beispiel 27.11 Wir berechnen das Volumen eines Ellipsoiden-Oktanten $EO := \Delta_{a,b,c}^{2,2,2}$ über die Jacobi-Transformation:

$$\begin{aligned} v_3(EO) &= \int_{\Delta_{a,b,c}^{2,2,2}} dy \\ &= \frac{abc}{8} \int_{\Delta^3} d(x_1, x_2, x_3) x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} x_3^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{abc}{8} \int_0^1 du_1 u_1^2 \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 (1-u_3) \cdot u_1^{-\frac{3}{2}} u_2^{-\frac{1}{2}} (1-u_2)^{-\frac{1}{2}} u_3^{-\frac{1}{2}} (1-u_3)^{-1} \\ &= \frac{abc}{8} \int_0^1 du_1 u_1^{\frac{1}{2}} \int_0^1 du_2 u_2^{-\frac{1}{2}} (1-u_2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 du_3 u_3^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{abc}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{4abc}{3} \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(1)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} abc. \end{aligned}$$

Insbesondere hat das Ellipsoid $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ das Volumen $v_3(E) = \frac{4\pi}{3} abc$. \triangleleft

28 L^p -Räume und Fourier-Transformation

Satz 28.1 (\mathcal{L}^p -Räume) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine σ -kompakte Teilmenge. Für $1 < p < \infty$ sei

$$\mathcal{L}^p(A) := \{f : A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} : f \text{ ist lokal-integrierbar und } |f|^p \text{ ist über } A \text{ integrierbar}\},$$

$$\mathcal{L}^\infty(A) := \{f : A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} : f \text{ ist lokal-integrierbar und fast überall beschränkt}\}.$$

Dann ist $\mathcal{L}^p(A)$ für $1 \leq p \leq \infty$ ein Vektorraum.

Beweis. Klar für $p = \infty$, ansonsten sind für $f, g \in \mathcal{L}^p(A)$ auch $f + g$ und $|f + g|^p$ lokal-integrierbar. Es gilt

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p \max(|f|^p, |g|^p). \quad \square$$

Aus dem Majorantenkriterium folgt, daß jede lokal-integrierbare Funktion, für die $|f|$ integrierbar ist, auch selbst integrierbar ist.

Satz 28.2 Für $f \in \mathcal{L}^p(A)$ mit $1 \leq p < \infty$ sei $\|f\|_p := \left(\int_A dx |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Für $f \in \mathcal{L}^\infty(A)$ sei

$$\|f\|_\infty := \inf\{M \in \mathbb{R} : \text{außerhalb einer Nullmenge gilt } |f(x)| < M\}.$$

Dann ist $L^p(A) := \mathcal{L}^p(A)/\mathcal{N}^p(A)$ mit $\mathcal{N}^p(A) := \{f \in \mathcal{L}^p(A) : \|f\|_p = 0\}$ ein Banach-Raum bezüglich $\|\cdot\|_p$, d.h. ein vollständiger normierter Vektorraum. Insbesondere ist $L^2(A)$ ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_A dx \overline{f(x)}g(x), \quad f, g \in L^2(A).$$

Offenbar ist $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall, d.h. $L^p(A)$ besteht wieder aus den Äquivalenzklassen fast überall gleicher \mathcal{L}^p -Funktionen.

Beweis. Zu zeigen ist die Dreiecksungleichung in $\mathcal{L}^p(A)$ und die Vollständigkeit. Wie im Fall der Folgenräume $\ell^p(\mathbb{N})$ benötigen wir zunächst:

Satz 28.3 (Höldersche Ungleichung) Es seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $f \in \mathcal{L}^p(A)$ und $g \in \mathcal{L}^q(A)$. Dann ist $fg \in \mathcal{L}^1(A)$, und es gilt die Höldersche Ungleichung

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Beweis. Für $p = 1, q = \infty$ ist außerhalb einer Nullmenge $|g| < M$. Dann ist auch fg lokal-integrierbar, und $M|f|$ ist integrierbare Majorante für fg .

Für $1 < p, q < \infty$ können wir $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$ annehmen; sonst wäre $f = 0$ oder $g = 0$ fast überall, somit nichts zu zeigen. In Analogie zum Beweis der Hölderschen Ungleichung für Summen in Satz 25.7 aus dem 1. Semester gilt (außerhalb möglicher Nullmengen N) in jedem Punkt $x \in A \setminus N$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Nach Integration über A folgt $\|fg\|_1 = \int_A dx |fg|(x) \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty$. Außerhalb von Nullmengen sind f, g als lokal-integrierbare Funktionen beschränkt, somit ist

auch fg lokal-integrierbar. Aus dem Majorantenkriterium folgt dann $fg \in \mathcal{L}^1(A)$. \square

Der Beweis der *Minkowskischen Ungleichung* $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ für $f, g \in \mathcal{L}^p$ ist dann analog zum Beweis von Satz 25.8 aus dem 1. Semester.

(Vollständigkeit für $1 < p < \infty$) Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{L}^p(A)$. Wegen $|\|f_n\|_p - \|f_m\|_p| \leq \|f_n - f_m\|_p$ ist dann auch $(\|f_n\|_p)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Insbesondere ist $\|f_n\|_p \leq M$ beschränkt für alle n , und damit ist $|f_n(x)| < \infty$ fast überall.

Es sei $(f_{n_k})_{k=1,2,\dots}$ eine Teilfolge mit $n_1 < n_2 < \dots$ und $\|f_n - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$ für alle $n \geq n_k$. Dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq 1$. Sei $g_k(x) := f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)$ und $G_n(x) := \sum_{k=1}^n |g_k(x)|$ sowie $G(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$. Da $G_n^p \in \mathcal{L}^1(A)$, gilt

$$\int_A dx (G_n(x))^p = \|G_n\|_p^p \leq \left(\sum_{k=1}^n \|g_k\|_p \right)^p \leq 1.$$

Nach dem Satz von Beppo Levi ist die punktweise gebildete Grenzfunktion $H(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (G_n(x))^p$ integrierbar, d.h. $\|H\|_1 = \|G\|_p^p < \infty$. Insbesondere ist $G(x)$ fast überall endlich. Also existiert fast überall punktweise der Limes $g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ mit absoluter Konvergenz der Reihe.

Wir zeigen $g \in \mathcal{L}^p(A)$. Die Folge der Partialsummen $s_n := \left| \sum_{k=1}^n g_k \right|^p$ konvergiert fast überall punktweise gegen $|g|^p$ mit $|s_n| \leq |g|^p$ fast überall. Wegen

$$\int_A dx \left| \sum_{k=1}^n g_k(x) \right|^p = \left(\left\| \sum_{k=1}^n g_k \right\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^n \|g_k\|_p \right)^p \leq 1$$

sind die Integrale der Partialsummen s_n beschränkt. Nach dem Satz von Lebesgue ist dann $|g|^p$ integrierbar, also $g \in \mathcal{L}^p(A)$. Damit ist $f := f_{n_1} - g = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} \in \mathcal{L}^p(A)$.

Die Folge $|f - f_{n_k}|^p$ konvergiert für $k \rightarrow \infty$ fast überall gegen Null. Außerdem ist nach Abänderung auf einer möglichen Nullmenge $|f - f_{n_k}|^p \leq |g|^p$ für alle k , und $|g|^p$ ist integrierbar. Nach dem Satz von Lebesgue gilt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A dx |f(x) - f_{n_k}(x)|^p = \int_A dx \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x) - f_{n_k}(x)|^p \right) = 0,$$

d.h. (f_n) konvergiert in der L^p -Norm gegen die punktweise gebildete Grenzfunktion $f \in \mathcal{L}^p(A)$.

(Vollständigkeit für $p = \infty$) Wie zuvor folgt $\|f_n\|_{\infty} \leq M$. Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist Nullmenge, also gibt es eine gemeinsame Nullmenge N , so daß $|f_n(x)| < M$ für alle $x \in A \setminus N$. Aus $\|f_n - f_k\|_{\infty} < \epsilon$ folgt dann $|f_n(x) - f_k(x)| < \epsilon$, somit aus der Vollständigkeit von \mathbb{C} die Existenz der Grenzfunktion $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{L}^{\infty}(A)$. \square

Für $k \in \mathbb{R}^n$ sei $e_k \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $e_k(x) := e^{-i\langle k, x \rangle}$. Es gilt $\|e_k\|_\infty = 1$. Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt nach der Hölderschen Ungleichung $\|f e_k\|_1 \leq \|f\|_1 \|e_k\|_\infty = \|f\|_1 < \infty$. Also existiert das Integral

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) e^{-i\langle k, x \rangle}, \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n),$$

mit $\sup_{k \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|f\|_1 < \infty$. Die Voraussetzungen von Satz 25.8 sind erfüllt, so daß für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ die Abbildung $\mathbb{R}^n \ni k \mapsto \hat{f}(k)$ stetig ist.

Definition 28.4 Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n)$ mit $(\mathcal{F}(f))(k) := \hat{f}(k)$ heißt die (kontinuierliche) Fourier-Transformation.

Beispiel 28.5 Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2}$ mit $\lambda > 0$. Dann gilt

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2 + ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2\lambda^2}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{\lambda^2}{2}(x + \frac{ik}{\lambda^2})^2}.$$

Das verbleibende Integral kann mit der Cauchyschen Integralformel für $e^{-\frac{\lambda^2}{2}z^2}$ berechnet werden zu $\int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{\lambda^2}{2}(x + \frac{ik}{\lambda^2})^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda^2}}$. Somit ist $\hat{f}(k) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{k^2}{2\lambda^2}}$. \triangleleft

Eine wichtige Anwendung des Satzes von Fubini ist die Faltung:

Satz 28.6 Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar, dann existiert für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Faltung $f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} dy f(x - y)g(y).$$

Es gilt

i) $f * g$ ist integrierbar mit $\int_{\mathbb{R}^n} dx (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) \int_{\mathbb{R}^n} dy g(y)$

ii) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

iii) $f * g = g * f$

Beweis. Die Funktion $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ ist über \mathbb{R}^{2n} integrierbar. Die Abbildung $T : \mathbb{R}^{2n} \ni (x, y) \mapsto (x - y, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ ist ein Diffeomorphismus mit $\det(DT) = 1$. Nach Transformationssatz ist $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} d(x, y) f(x)g(y) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} d(x, y) f(x - y)g(y).$$

Nach Satz 26.1.i) existiert für fast alle x das Integral $(f * g)(x)$, nach Satz 26.1.ii) ist diese Faltung integrierbar und erfüllt i).

Für festes x gilt $|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} dy |f(x-y)| |g(y)|$ außerhalb einer Nullmenge und damit

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} dx |(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy |f(x-y)| |g(y)| = \|f\|_1 \|g\|_1$$

nach Anwendung der Transformation $T(x, y) = (x + y, y)$. Somit ist ii) gezeigt.

Für festes x ist $z = T(y) = x - y$ ein Diffeomorphismus mit $|\det DT| = 1$. Nach Transformationssatz gilt $\int_{\mathbb{R}^n} dy f(x-T(y))g(T(y)) = \int_{\mathbb{R}^n} dz f(x-z)g(z)$. \square

Satz 28.7 (Faltungssatz) Seien f, g integrierbar, dann gilt $\widehat{(f * g)}(k) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(k) \hat{g}(k)$.

Beweis. Die Definitionen ergeben

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dx (f * g)(x) e^{-i\langle k, x \rangle} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy f(x-y) e^{-i\langle k, x-y \rangle} g(y) e^{-i\langle k, y \rangle}. \end{aligned}$$

Die Transformation $T(x, y) = (x + y, y)$ mit $\det DT = 1$ liefert die Behauptung. \square

Im allgemeinen muß eine \mathcal{C}_b -Funktion nicht wieder integrierbar sein.

Satz 28.8 (Umkehrformel) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ derart, daß $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \hat{f}(k) e^{i\langle k, x \rangle} \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zu beachten ist das andere Vorzeichen in $e^{i\langle k, x \rangle}$ gegenüber der Fourier-Transformation!

Beweis. Für $\lambda > 0$ sei $F_\lambda(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \hat{f}(k) e^{i\langle k, x \rangle} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\langle k, k \rangle}$. Da \hat{f} beschränkt ist, existiert das Integral für $\lambda > 0$. Dann gilt mit dem Transformationssatz

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dy f(y) e^{-i\langle k, y \rangle} \right) e^{i\langle k, x \rangle} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\langle k, k \rangle} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dy f(y+x) e^{-i\langle k, y \rangle} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\langle k, k \rangle}. \end{aligned}$$

Die Funktion $(y, k) \mapsto f(y)e^{-i\langle k, y \rangle} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\langle k, k \rangle}$ ist über \mathbb{R}^{2n} integrierbar, ebenso $(y, k) \mapsto f(x+y)e^{-i\langle k, y \rangle} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\langle k, k \rangle}$ nach Transformationssatz, so daß wir nach Fubini die Integrale vertauschen dürfen. Mit Beispiel 28.5 (mit $x \mapsto -k$ und $k \mapsto y$) und Fubini gilt $\int_{\mathbb{R}^n} dx e^{-\frac{\lambda^2}{2}\langle k, k \rangle} e^{i\langle y, k \rangle} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\lambda^n} e^{-\frac{\langle y, y \rangle}{2\lambda^2}}$, also

$$F_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dy f(y+x) \delta_\lambda(y) = (f * \delta_\lambda)(x), \quad \delta_\lambda(y) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{\langle y, y \rangle}{2\lambda^2}}.$$

Wir werden zeigen, daß für $\lambda \rightarrow 0$ die rechte Seite in der L^1 -Norm gegen $f(x)$ konvergiert. In diesem Sinn geht $\delta_\lambda(y)$ für $\lambda \rightarrow 0$ in die sogenannte *Diracsche δ -Distribution* über. Andererseits konvergiert $\hat{f}(k)e^{i\langle k, x \rangle} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\langle k, k \rangle}$ für $\lambda \rightarrow 0$ punktweise gegen $\hat{f}(k)e^{i\langle k, x \rangle}$, und $|\hat{f}(k)e^{i\langle k, x \rangle} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\langle k, k \rangle}|$ ist beschränkt durch die integrierbare Funktion $|\hat{f}(k)|$. Nach dem Satz von Lebesgue gilt dann $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \hat{f}(k)e^{i\langle k, x \rangle} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} F_\lambda(x)$. Beides zusammen liefert die Behauptung.

Ausgangspunkt ist $\frac{1}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dx e^{-\langle y, y \rangle / (2\lambda^2)} = 1$. Damit gilt

$$f(x) - F_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dy (f(x) - f(x+y)) \frac{e^{-\langle y, y \rangle / (2\lambda^2)}}{\lambda^n}. \quad (*)$$

Zunächst sei f stetig mit kompaktem Träger $\text{supp}(f) \subseteq \overline{K_R(0)}$. Dann ist f auch gleichmäßig stetig, d.h. zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $1 > \delta > 0$, so daß $|f(x) - f(x+y)| < \frac{\epsilon}{2v_n(K_{R+1}(0))}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in K_\delta(0)$. Das y -Integral wird zerlegt

- in ein Integral über $K_\delta(0)$: Dort ist $\text{supp}_x(f(x) - f(x+y)) \subseteq \overline{K_{R+1}(0)}$, so daß das x -Integral durch $|f(x) - f(x+y)|$ und das Volumen von $\overline{K_{R+1}(0)}$ abgeschätzt werden kann. Das y -Integral wird anschließend auf \mathbb{R}^n ausgedehnt und wird unabhängig von λ .
- in ein Integral über $\mathbb{R}^n \setminus K_\delta(0)$. Dann ist $0 < e^{-\langle y, y \rangle / (2\lambda^2)} \leq e^{-\frac{\delta^2}{4\lambda^2}} e^{-\langle y, y \rangle / (4\lambda^2)}$.

Integration des Betrages von (*) über $x \in \mathbb{R}^n$ liefert dann $\|f - F_\lambda\|_1 = I_1 + I_2$ mit

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\overline{K_{R+1}(0)}} dx \int_{K_\delta(0)} dy |f(x) - f(x+y)| \frac{e^{-\langle y, y \rangle / (2\lambda^2)}}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{n}{2}}} \\ &\leq v_n(K_{R+1}(0)) \sup_{x, x+y \in \overline{K_{R+1}(0)}} |f(x) - f(x+y)| \int_{\mathbb{R}^n} dy \frac{e^{-\langle y, y \rangle / (2\lambda^2)}}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{n}{2}}} < \frac{\epsilon}{2}, \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_\delta(0)} dy |f(x) - f(x+y)| \frac{e^{-\langle y, y \rangle / (2\lambda^2)}}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq e^{-\frac{\delta^2}{4\lambda^2}} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy (|f(x)| + |f(x+y)|) \frac{e^{-\langle y,y \rangle / (4\lambda^2)}}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{n}{2}}} \\ &\leq e^{-\frac{\delta^2}{4\lambda^2}} 2\|f\|_1 2^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Wir können nun $\lambda(\delta)$ so klein wählen, daß $e^{-\frac{\delta^2}{4\lambda^2}} 2\|f\|_1 2^{\frac{n}{2}} < \frac{\epsilon}{2}$. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\lambda(\epsilon) > 0$, so daß $\|f - F_{\lambda(\epsilon)}\|_1 < \epsilon$ für stetige Funktionen f mit kompaktem Träger, d.h. es gilt fast überall $f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} F_{\lambda}(x)$. Da integrierbare Funktionen bezüglich $\|\cdot\|_1$ durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger approximiert werden können, gilt die Aussage für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. \square

Satz 28.9 Sei $k \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ derart, daß für alle Multi-Indizes α mit $|\alpha| < k$ sogar $x^\alpha f(x)$ integrierbar ist. Dann existieren die mehrfachen partiellen Ableitungen $\partial_\alpha \hat{f}$ der Fourier-Transformierten, und es gilt $\widehat{(x^\alpha f)}(k) = \frac{i^{|\alpha|} \partial^{|\alpha|}}{\partial k^\alpha} \hat{f}(k)$.

Beweis. Es genügt, den Fall einer partiellen Ableitung in Richtung e_i zu beweisen. Sei $\epsilon_l = \frac{1}{l}$. Dann ist

$$\frac{\hat{f}_\alpha(k + \epsilon_l e_i) - \hat{f}_\alpha(k)}{\epsilon_l} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) e^{-i\langle k,x \rangle} \frac{(e^{-ix_i \epsilon_l} - 1)}{\epsilon_l}$$

Die Funktion $\frac{(e^{-ix_i \epsilon_l} - 1)}{\epsilon_l}$ ist nach dem Schrankensatz beschränkt durch $|x_i|$, somit vertauschen nach dem Satz von Lebesgue Integral und Grenzwert $l \rightarrow \infty$. \square

Aus der Umkehrformel ergibt sich:

Satz 28.10 Sei $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ derart, daß f und $\partial^\alpha f$ für alle Multi-Indizes mit $|\alpha| \leq k$ integrierbar sind. Dann gilt $\widehat{(\partial^\alpha f)}(k) = (ik)^\alpha \hat{f}(k)$. \square

Daraus gewinnt man eine oft nützliche Lösungsmethode für lineare (sogar partielle) Differentialgleichungen:

Beispiel 28.11 (Wärmeleitungsgleichung) Der Ausgleich von Temperaturdifferenzen in homogenen Medien wird durch die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t T(t, x) = c(\Delta T)(t, x)$$

beschrieben. Dabei ist Δ der Laplace-Operator, $T(t, x)$ die Temperatur zur Zeit $t \in \mathbb{R}_+$ am Ort $x \in \mathbb{R}^n$ und c die Wärmeleitfähigkeit. Fourier-Transformation in x führt mit Satz 28.10 auf die gewöhnliche Differentialgleichung $\frac{d}{dt} \hat{T}(t, k) = -c\|k\|^2 \hat{T}(t, k)$ mit Lösung $\hat{T}(t, k) = \hat{T}(0, k) e^{-c\|k\|^2 t}$. Nach Beispiel 28.5 gilt $e^{-c\|k\|^2 t} = \hat{f}(k)$ für $f(x) = \frac{1}{(2ct)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4ct}}$. Aus dem Faltungssatz folgt dann

$\hat{T}(t, k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \widehat{(T(0, \cdot) * f)}(k)$, so daß die Rücktransformation auf folgende Lösung der Wärmeleitungsgleichung führt:

$$T(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (T(0, \cdot) * f)(x) = \frac{1}{(4\pi ct)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dy T(0, y) e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4ct}}. \quad \triangleleft$$

Eine weitere Folgerung der Umkehrformel ist:

Satz 28.12 (Plancherel) Sei $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, und es gilt $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2$. Insbesondere folgt $\langle f, g \rangle_2 = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_2$.

Beweis. Sei f zunächst so, daß \hat{f} integrierbar ist und bezeichne $g := \overline{\hat{f}}$. Dann ist $(x, k) \mapsto f(x)g(k)e^{-i\langle k, x \rangle}$ über \mathbb{R}^{2n} integrierbar, und nach Fubini und Umkehrformel gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} dx dk f(x)g(k)e^{-i\langle k, x \rangle} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) \int_{\mathbb{R}^n} dk \overline{\hat{f}(k)} e^{i\langle k, x \rangle} = \int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x)|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \overline{\hat{f}(k)} \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) e^{-i\langle k, x \rangle} = \int_{\mathbb{R}^n} dk |\hat{f}(k)|^2. \end{aligned}$$

Nach Approximation folgt die Aussage für alle f . Die Identität für das Skalarprodukt folgt aus den Polarisationsformeln und der Linearität von \mathcal{F} . \square

29 Beweis des Transformationssatzes

Wir unterteilen den Beweis des Transformationssatzes (Satz 27.1) in folgende Schritte:

- i) Diskussion der Nullmengen
- ii) Volumen eines affin transformierten Würfels
- iii) Volumen eines diffeomorph transformierten Würfels
- iv) Beweis für Treppenfunktionen
- v) Beweis im allgemeinen Fall

In den Beweisen ist es vorteilhaft, auf \mathbb{R}^n die *Maximumsnorm* $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max(x_1, \dots, x_n)$ einzuführen.

Lemma 29.1 Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus und $N \subseteq U$ eine Nullmenge. Dann ist auch $T(N) \subseteq V$ eine Nullmenge.

Beweis. Für $x, y \in U$ und $t \in [0, 1]$ sei $g(t) := T(x + t(y - x))$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\theta \in [0, 1]$ mit

$$T(y) - T(x) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = (DT)(x + \theta(y - x)) \circ (y - x),$$

wobei im letzten Schritt die Kettenregel benutzt ist. Damit gilt nach Definition der Norm einer linearen Abbildung

$$\|T(y) - T(x)\|_\infty \leq \sup_{\theta \in [0,1]} \|(DT)(x + \theta(y - x))\| \cdot \|y - x\|_\infty.$$

Zu N gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Überdeckung durch abzählbar viele kompakte Würfel $W_k \subseteq U$ mit $\sum_{k=0}^\infty v_n(W_k) < \epsilon$. Entsprechend ist $T(N) \subseteq \bigcup_{k=0}^\infty T(W_k)$. Sei jetzt $x, y \in N \cap W_k$. Auf W_k ist $\|(DT)(x + \theta(y - x))\|$ als stetige Funktion auf einer kompakten Menge beschränkt, d.h. $\|T(y) - T(x)\|_\infty \leq L \cdot \|y - x\|_\infty$ für alle $x, y \in W_k$ und somit auch für alle $x, y \in N \cap W_k$. Also gilt $v_n(T(W_k)) \leq L^n v_n(W_k)$, d.h. $T(N \cap W_k)$ ist eine Nullmenge. Dann ist auch $T(N)$ als Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen eine Nullmenge. \square

Lemma 29.2 *Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ und $P(a_1, \dots, a_n) := \{x = t_1 a_1 + \dots + t_n a_n : t_i \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^n$ das durch diese Vektoren aufgespannte Parallelotop. Dann gilt*

$$v_n(P(a_1, \dots, a_n)) = |\det(a_1, \dots, a_n)|,$$

wobei a_i auf der rechten Seite die i -te Zeile einer $(n \times n)$ -Matrix ist.

Beweis. Aus der Definition und dem Beweis der Eindeutigkeit der Determinante im letzten Semester folgt, daß der Betrag der Determinante eindeutig definiert ist durch

$$(D1) \quad |\det(\dots, \lambda a_i, \dots)| = |\lambda| |\det(\dots, a_i, \dots)|$$

$$(D2) \quad |\det(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots)| = |\det(\dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots)|$$

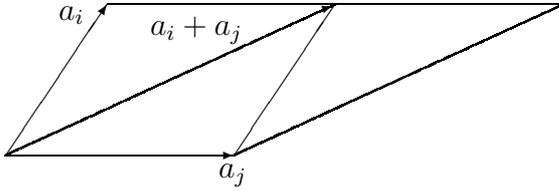
$$(D3) \quad |\det(e_1, \dots, e_n)| = 1$$

Die Punkte in (D1), (D2) bedeuten, daß die jeweiligen Zeilen der rechten und linken Seite identisch sind.

Wir beweisen, daß auch das Volumen diese Eigenschaften hat. (D3) ist klar.

(D1) Sei $P_\lambda := P(a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Die Parallelotope P_1 und P_{-1} sind nur gegeneinander verschoben und haben nach Cavalieri das gleiche Volumen. Wir können uns also auf $\lambda > 0$ beschränken. Für natürliche Zahlen $\lambda = l \in \mathbb{N}^\times$ gilt offenbar $v_n(P_l) = l v_n(P_1)$ nach Aneinandereihung von l Parallelotopen P_1 in i -ter Richtung. Sei $\lambda = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl mit $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt $v_n(P_{q,\lambda}) = q v_n(P_\lambda) = v_n(P_p) = p v_n(P_1) = \frac{p}{q} v_n(P_q)$. Schließlich finden wir für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ zu jedem $\epsilon > 0$ rationale Zahlen $r_1 \leq \lambda \leq r_2$ mit $|r_1 - r_2| \leq \frac{\epsilon}{v_n(P_1)}$. Das ergibt $v_n(P_{r_1}) \leq v_n(P_\lambda) \leq v_n(P_{r_2})$ und damit $|v_n(P_\lambda) - \lambda v_n(P_1)| \leq \epsilon$. Somit gilt (D1) für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(D2) Nach dem Prinzip von Cavalieri genügt es, die jeweiligen Flächen in der $\{i, j\}$ -Ebene zu vergleichen:



Wieder nach Cavalieri haben die durch $\{a_i, a_j\}$ bzw. $\{a_i + a_j, a_j\}$ aufgespannten Parallelogramme die gleiche Fläche. Das beendet den Beweis. \square

Sei nun $W = P(e_1, \dots, e_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ der Einheitswürfel und $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $T : x \mapsto A \cdot x$ eine lineare Abbildung. Dann ist $A \cdot e_i = a_i$ die i -te Spalte von A bzw. die i -te Zeile von A^t . Aus der Linearität von T folgt somit $T(W) = P(a_1, \dots, a_n)$. Aus Lemma 29.2 und $\det A^t = \det A$ ergibt sich schließlich $v_n(T(W)) = |\det A| \cdot v_n(W)$.

Lemma 29.3 Für jeden kompakten Würfel $W \subseteq U$ gilt

$$v_n(T(W)) \leq \max_{x \in W} |\det(DT)(x)| \cdot v_n(W).$$

Beweis. Da jede kompakte Teilmenge meßbar ist und das Bild einer kompakten Teilmenge im \mathbb{R}^n unter einer stetigen Abbildung wieder kompakt ist, sind $v_n(W)$ und $v_n(T(W))$ definiert. Wegen Lemma 29.1 genügt es, den Fall $v_n(W) > 0$ zu beweisen.

i) Wir setzen $\alpha := \frac{v_n(T(W))}{v_n(W)}$. Durch Halbierung sämtlicher Kanten zerlegen wir W in 2^n achsenparallele gleich große Teilwürfel. Dann gibt es einen Teilwürfel W_1 mit $v_n(T(W_1)) \geq \alpha v_n(W_1)$. Durch Wiederholung dieser Zerlegung gewinnt man eine Folge $W_1 \supset W_2 \supset \dots$ von Würfeln mit $v_n(T(W_i)) \geq \alpha v_n(W_i)$. Nach Intervallschachtelungsprinzip (z.B. Satz 22.3) gibt es einen Punkt $a \in W$, der in allen W_i liegt. Sei $b := T(a)$ der Bildpunkt. Wir können das Koordinatensystem so verschieben, daß $a = b = 0$ gilt.

Ist m_k der Mittelpunkt des k -ten Würfels und hat der Ausgangswürfel W die Kantenlänge $2L$, dann ist $W_k = \{x \in U : \|x - m_k\|_\infty \leq \frac{L}{2^k}\}$. Nach Definition der Differenzierbarkeit von T im Nullpunkt gilt $T(x) = T(0) + (DT)(0) \cdot x + \phi(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\phi(x)}{\|x\|_\infty} = 0$. Wir setzen $A := (DT)(0) \in GL(n, \mathbb{R})$. Wegen $T(0) = 0$ gilt dann $T(x) = A \cdot (x + \|x\|_\infty \cdot r(x))$, wobei $r(x) := \frac{1}{\|x\|_\infty} A^{-1} \cdot \phi(x)$ gegen 0 konvergiert für $x \neq 0$. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $\|r(x)\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_\infty < \delta$. Sei l ein Index, so daß für alle $x \in W_l$ gilt $\|x\|_\infty \leq 2 \cdot \frac{L}{2^l} < \delta$. Dann gilt

$$\|(x + \|x\|_\infty \cdot r(x)) - m_l\|_\infty \leq \|x - m_l\|_\infty + \|x\|_\infty \cdot \|r(x)\|_\infty \leq \frac{L}{2^l} + 2 \cdot \frac{L}{2^l} \cdot \frac{\epsilon}{2} = \frac{L}{2^l} (1 + \epsilon)$$

für alle $x \in W_l$. Somit ist die Menge $V_l := \{x + \|x\| \cdot r(x) : x \in W_l\}$ enthalten im Würfel $W_l^\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - m_l\|_\infty \leq \frac{l}{2^k} \cdot (1 + \epsilon)\}$.

Also gilt $T(W_l) = A \cdot V_l \subseteq A \cdot W_l^\epsilon$ und weiter

$$v_n(T(W_l)) \leq v_n(A \cdot W_l^\epsilon) = |\det A|(1 + \epsilon)^n v_n(W_l) .$$

ii) Angenommen, es gelte $\alpha > \max_{x \in W} |\det(DT)(x)| \geq |\det A|$. Dann finden wir ein $\epsilon > 0$, für das auch $\alpha > (1 + \epsilon)^n |\det A|$ gilt. Das bedeutet $v_n(T(W_l)) < \alpha v_n(W_l)$ im Widerspruch zur Konstruktion von W_l . \square

Lemma 29.4 *Sei $K \subseteq U$ eine kompakte Teilmenge, so daß der Rand ∂K eine Nullmenge ist. Dann gilt*

$$\min_{x \in K} |\det(DT)(x)| \cdot v_n(K) \leq v_n(T(K)) \leq \max_{x \in K} |\det(DT)(x)| \cdot v_n(K) .$$

Beweis. Die kompakte Menge K und damit ihr offenes Innere $K \setminus \partial K$ ist meßbar mit $v_n(K) = v_n(K \setminus \partial K)$. Zu $K \setminus \partial K$ gibt es kompakte Mengen $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$ mit $K \setminus \partial K = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, wobei die kompakten Teilmengen $A_k = \bigcup_{i_k=0}^{p_k} W_{i_k}$ durch Zusammenkleben von kompakten Würfeln W_{i_k} der Kantenlängen $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^k}$ entlang ihrer Ränder gebildet werden. Dann ist $v_n(K \setminus \partial K) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_k=0}^{p_k} v_n(W_{i_k})$. Wegen der Stetigkeit und Bijektivität von T gilt $T(K) \setminus \partial T(K) = T(K \setminus \partial K) = T(\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i_k=0}^{p_k} W_{i_k})$ und dann mit Lemma 29.1 und Lemma 29.3

$$\begin{aligned} v_n(T(K)) &= v_n(T(K \setminus \partial K)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_k=0}^{p_k} v_n(T(W_{i_k})) \\ &\leq \max_{x \in K} |\det(DT)(x)| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_k=0}^{p_k} v_n(W_{i_k}) = \max_{x \in K} |\det(DT)(x)| \cdot v_n(K) . \end{aligned}$$

Andererseits folgt daraus durch Vertauschung der Rollen von K und $T(K)$

$$v_n(K) = v_n(T^{-1}(T(K))) \leq \max_{y \in T(K)} |\det(DT^{-1})(y)| \cdot v_n(T(K)) .$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt $(DT^{-1})(y) = ((DT)(x))^{-1}$ mit $x := T^{-1}(y)$, also $|\det(DT^{-1})(y)| = \frac{1}{|\det(DT)(x)|}$. Nun ist $|\det(DT^{-1})(y)|$ dort maximal, wo $|\det(DT)(x)|$ minimal ist. Das bedeutet

$$v_n(T(K)) \geq \min_{x \in K} |\det(DT)(x)| \cdot v_n(K) . \quad \square$$

Satz 29.5 *Der Transformationsatz gilt für jede Treppenfunktionen ϕ auf V , deren Träger $\text{supp}(\phi) := \{y \in \mathbb{R}^n : \phi(y) \neq 0\}$ Teilmenge von V ist.*

Beweis. Wegen der Linearität des Integrals genügt es, den Transformationssatz für die charakteristische Funktion eines Quaders zu beweisen. Weiter brauchen wir nach Lemma 29.1 nur kompakte Quader $Q \in V$ zu betrachten, da der Rand eines Quaders eine Nullmenge ist. Die Integrierbarkeit von $|\det DT| \mathbf{1}_Q \circ T$ ist klar, denn $\mathbf{1}_Q \circ T$ verschwindet außerhalb der kompakten Menge $T^{-1}(Q) \subseteq U$, und $|\det DT|$ ist stetig auf $T^{-1}(Q)$. Zu zeigen bleibt

$$\int_Q dy = v_n(Q) = \int_{T^{-1}(Q)} dx |\det(DT)(x)| .$$

Da die stetige Funktion $|\det(DT^{-1})|^{-1}$ auf der kompakten Menge Q gleichmäßig stetig ist (Satz 22.13 aus dem 1. Semester), gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_p$ in kompakte Quader, die nur Randpunkte gemeinsam haben und so klein sind, daß $\max_{y \in Q_i} |\det(DT^{-1})(y)|^{-1} - \min_{y \in Q_i} |\det(DT^{-1})(y)|^{-1} \leq \epsilon$. Dann gilt im Urbild $T^{-1}(Q_i)$

$$\begin{aligned} \max_{x \in T^{-1}(Q_i)} |\det(DT)(x)| v_n(T^{-1}(Q_i)) - \min_{x \in T^{-1}(Q_i)} |\det(DT)(x)| v_n(T^{-1}(Q_i)) \\ \leq \epsilon v_n(T^{-1}(Q_i)) . \end{aligned}$$

Sowohl $\int_{T^{-1}(Q_i)} dx |\det(DT)(x)|$ als auch $v_n(Q_i)$ nach Lemma 29.4 sind enthalten im Intervall

$$\left[\min_{x \in T^{-1}(Q_i)} |\det(DT)(x)| v_n(T^{-1}(Q_i)), \max_{x \in T^{-1}(Q_i)} |\det(DT)(x)| v_n(T^{-1}(Q_i)) \right] .$$

Also gilt

$$\left| \int_{T^{-1}(Q_i)} dx |\det(DT)(x)| - v_n(Q_i) \right| \leq \epsilon v_n(T^{-1}(Q_i)) .$$

Summation über alle Teilquader liefert

$$\begin{aligned} \left| \int_{T^{-1}(Q)} dx |\det(DT)(x)| - v_n(Q) \right| \leq \sum_{i=1}^p \left| \int_{T^{-1}(Q_i)} dx |\det(DT)(x)| - v_n(Q_i) \right| \\ \leq \epsilon v_n(T^{-1}(Q)) . \end{aligned}$$

Für $\epsilon \rightarrow 0$ ergibt sich die Behauptung. \square

Beweis des Transformationssatzes. i) Nach Definition der Integrierbarkeit gibt es zu jeder über $V \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbaren Funktion f und jedem $\epsilon > 0$ eine auf einer beschränkten Teilmenge des \mathbb{R}^n definierte Treppenfunktion ϕ_ϵ mit $\|f - \phi_\epsilon\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$. Wegen $|f_V - \phi_\epsilon \mathbf{1}_V| \leq |f_V - \phi_\epsilon|$ gilt dann auch $\|f_V - \phi_\epsilon \mathbf{1}_V\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Teilmenge mit $\text{supp}(\phi_\epsilon) \subseteq B$ und $M = \max_{x \in \text{supp}(\phi_\epsilon)} |f_\epsilon(x)|$. Dann gibt es zu der beschränkten offenen Teilmenge $V \cap B$ eine Vereinigung $A = Q_0 \cup \dots \cup Q_k \subseteq V \cap B$ von endlich vielen kompakten

Quadern Q_i mit $|v_n(V \cap B) - v_n(A)| < \frac{\epsilon}{2M}$. Damit ist $\phi_\epsilon \mathbf{1}_A$ eine Treppenfunktion mit $\text{supp}(\phi_\epsilon \mathbf{1}_A) \subseteq V$, für die gilt

$$\|\phi_\epsilon \mathbf{1}_A - \phi_\epsilon \mathbf{1}_V\|_1 = \|\phi_\epsilon \mathbf{1}_A - \phi_\epsilon \mathbf{1}_{V \cap B}\|_1 \leq M|v_n(A) - v_n(V \cap B)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Somit gilt $\|f_V - \phi_\epsilon \mathbf{1}_A\|_1 \leq \|f_V - \phi_\epsilon \mathbf{1}_V\|_1 + \|\phi_\epsilon \mathbf{1}_V - \phi_\epsilon \mathbf{1}_A\|_1 < \epsilon$, d.h. wir können annehmen, daß die approximierenden Treppenfunktionen zu f_V ihren Träger in V haben. Nach Auswahl einer Teilfolge gemäß Satz 23.3 gibt es also zu f_V eine Familie $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit Träger in V , die fast überall punktweise gegen f konvergieren und außerdem L^1 -konvergent gegen f sind.

ii) Wir betrachten die Folge der Funktionen $\tilde{\phi}_k := |\det(DT)|(\phi_k \circ T)$. Nach Satz 29.5 ist $\tilde{\phi}_k$ über U integrierbar, und es gilt

$$\|\tilde{\phi}_k - \tilde{\phi}_l\|_{1,U} = \int_U dx |\tilde{\phi}_k(x) - \tilde{\phi}_l(x)| = \int_V |\phi_k(y) - \phi_l(y)| = \|\phi_k - \phi_l\|_{1,V}.$$

Damit ist $(\tilde{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -Cauchyfolge auf U , so daß eine Teilfolge fast überall punktweise gegen eine über U integrierbare Funktion \tilde{f} konvergiert mit $\int_U dx \tilde{f}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U dx \tilde{\phi}_k(x)$. Andererseits konvergiert $\tilde{\phi}_k$ auch fast überall punktweise gegen die Funktion $|\det(DT)|(f \circ T)$. Nach dem Modifikationsatz ist dann auch $|\det(DT)|(f \circ T)$ über U integrierbar, und es gilt

$$\int_U dx |\det(DT)(x)| f(T(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U dx \tilde{\phi}_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_V dy \phi_k(y) = \int_V dy f(y).$$

Ist umgekehrt $|\det(DT)|(f \circ T)$ über U integrierbar, dann folgt durch Vertauschen der Rollen von T und T^{-1} , daß $|\det(DT^{-1})|(|\det(DT)|(f \circ T)) \circ T^{-1} = f$ über V integrierbar ist. Damit ist der Transformationssatz bewiesen. \square

30 Integration über Untermannigfaltigkeiten

Wir haben bisher die Methoden entwickelt, um Funktionen über Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zu integrieren und z.B. Volumina solcher Teilmengen zu berechnen. Wir können damit aber noch nicht die Oberfläche des Randes von A berechnen. Die dazu notwendigen Ideen sollen nun kurz vorgestellt werden, wobei wir aus Zeitgründen keine Beweise angeben können. Wir erinnern an die folgende Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten, die wir in Satz 5.6 für die Richtung (\Rightarrow) bewiesen hatten:

Satz 30.1 *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ ist genau dann eine n -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq M$, eine offene Umgebung $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Immersion $\phi : T \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ gibt, so daß T durch ϕ homöomorph auf V abgebildet wird.*

Bemerkungen. Zur Erinnerung: Immersion bedeutet, daß ϕ differenzierbar ist mit $\text{rang}(D\phi)(t) = n$ für alle $t \in T$.

Insbesondere gibt es eine Überdeckung einer Untermannigfaltigkeit durch offene Mengen V_i . Dann heißt (V_i, ϕ_i) mit $\phi_i : T_i \rightarrow V_i$ eine *lokale Karte* von M . Für $V_{ij} := V_i \cap V_j \neq \emptyset$ gibt es zwei Homöomorphismen $\phi_i^{-1} : V_{ij} \rightarrow \phi_i^{-1}(V_{ij}) \subseteq T_i \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\phi_j^{-1} : V_{ij} \rightarrow \phi_j^{-1}(V_{ij}) \subseteq T_j \subseteq \mathbb{R}^n$. Über die Konstruktion von ϕ im Beweis von Satz 5.6 zeigt man, daß $\tau_{ij} := \phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(V_{ij}) \rightarrow \phi_j^{-1}(V_{ij})$ sogar ein Diffeomorphismus ist zwischen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Man sagt, die Kartenwechsel sind Diffeomorphismen.

Die Integration einer Funktion f über die Teilmenge $V \subseteq M$ wird nun über einen analogen Transformationssatz durch Integration der Funktion “ $|\det D\phi|$ ” ($f \circ \phi$) über T erklärt. Das Problem dabei ist, daß die Determinante der rechteckigen Matrix $D\phi$ so nicht existiert. Man zeigt, daß

$$\text{“}|\det D\phi|\text{”} := \sqrt{\det((D\phi)^t \cdot (D\phi))}$$

die richtigen Eigenschaften hat. Dabei ist $(D\phi)^t(D\phi)$ punktweise eine $n \times n$ -Matrix. Entsprechend definiert man das Integral einer Funktion f über eine Karte (V, ϕ) von M mit $\phi(T) = V$ zu

$$\int_{(V, \phi)} dS f(x) := \int_T du \sqrt{\det((D\phi)^t(u) \cdot (D\phi)(u))} f(\phi(u)). \quad (*)$$

Die Idee ist wieder zu beweisen, daß das durch die n Vektoren $a_1, \dots, a_n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ aufgespannte Parallelotop das Volumen $\sqrt{\det(A^t \cdot A)}$ hat, wobei a_i die Spalten von $A \in M((n+k) \times n, \mathbb{R})$ sind. Dann identifiziert man das Parallelotop mit dem Bild des n -dimensionalen Einheitswürfels im \mathbb{R}^{n+k} , dessen letzte k Komponenten identisch Null sind, unter einer affinen Transformation. Durch analoge Konvergenzbetrachtungen wie im Transformationssatz beweist man, daß durch (*) das Integral einer Funktion über $V \subseteq M$ sinnvoll definiert ist.

Beispiel 30.2 (Oberfläche der dreidimensionalen Kugel) Es sei

$$M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}$$

die Oberfläche der dreidimensionalen Kugel vom Radius R . Mittels Polarkoordinaten gewinnen wir die folgende Abbildung $\phi :]0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow V \subseteq M$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \phi(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} R \cos \varphi \sin \vartheta \\ R \sin \varphi \sin \vartheta \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Das offene Rechteck $T :=]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ wird durch ϕ homöomorph auf die Teilmenge $V := M \setminus N$ abgebildet, d.h. aus der Kugeloberfläche wird der Halbkreis

$N := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0, x_1 \geq 0, x_1^2 + x_3^2 = R^2\}$ herausgeschnitten. Dann ist

$$(D\phi)(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \sin \vartheta & R \cos \varphi \cos \vartheta \\ R \cos \varphi \sin \vartheta & R \sin \varphi \cos \vartheta \\ 0 & -R \sin \vartheta \end{pmatrix},$$

$$(D\phi)^t(\varphi, \vartheta) \cdot (D\phi)(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix},$$

so daß wir erhalten:

$$\int_{(V, \phi)} dS f(x) = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta f(\phi(\varphi, \vartheta)).$$

Der Halbkreis N ist eine Nullmenge. Man kann wieder zeigen, daß Nullmengen für die Integrationstheorie ignoriert werden können. Also stimmt das Integral mit dem Integral über ganz M überein. Insbesondere erhalten wir für $f = 1$ die Oberfläche der zweidimensionalen Sphäre vom Radius R zu $\int_M dS = 4\pi R^2$. \triangleleft

Eine wichtige Konsequenz des Transformationssatzes ist, daß (*) unabhängig von der Wahl der Karte ist. Gibt es zu V zwei Karten (V, ϕ_1) und (V, ϕ_2) mit Immersionen $\phi_i : T_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, so daß $\phi_i : T_i \rightarrow V_i$ Homöomorphismen sind, so gilt $\int_{(V, \phi_1)} dS f(x) = \int_{(V, \phi_2)} dS f(x)$. Zum Beweis verwendet man, daß $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : T_1 \rightarrow T_2$ ein Diffeomorphismus ist und den entsprechenden Transformationssatz, der $|\det D(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})|$ beinhaltet.

Das nutzt man aus, um Integrationen über Untermannigfaltigkeiten zu definieren, die aus mehreren Karten zusammengesetzt werden müssen. Wir betrachten nur den einfachsten Fall, daß es endlich viele Karten $(V_1, \phi_1), \dots, (V_p, \phi_p)$ gibt, die $M = V_1 \cup \dots \cup V_p$ überdecken. Dann kann man immer eine Familie von Funktionen $\alpha_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ konstruieren mit

- $\text{supp}(\alpha_i) \subseteq V_i$
- $\sum_{i=1}^p \alpha_i(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Eine solche Familie heißt *Zerlegung der Eins*. Mittels Zerlegung der Eins erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_M dS f(x) &= \sum_{i=1}^p \int_M dS f(x) \alpha_i(x) = \sum_{i=1}^p \int_{V_i} dS (f \alpha_i)(x) \\ &= \sum_{i=1}^p \int_{T_i} du_i \sqrt{\det((D\phi_i)^t(u_i) \cdot (D\phi_i)(u_i))} (f \alpha_i)(\phi_i(u_i)). \end{aligned}$$

Die Eigenschaften der Zerlegung der Eins garantieren, daß diese Definition unabhängig von der Wahl der Überdeckung und der α_i ist. Die Konstruktion verallgemeinert sich sogar auf abzählbar viele Karten, wenn sich jeweils nur endlich viele schneiden und $|f \alpha_i|$ integrierbar ist:

Definition 30.3 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit, ausgestattet mit einem Atlas lokaler Karten (V_i, ϕ_i) entsprechend Satz 30.1, so daß $M = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ und jeder Punkt $x \in M$ nur in endlich vielen V_i enthalten ist.

Eine auf M definierte Funktion f heißt *über M integrierbar*, wenn es eine dem Atlas $(V_i, \phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gibt, so daß

i) Jede Funktion $f\alpha_i$ ist über V_i (damit über M) integrierbar

$$\text{ii) } \sum_{i=0}^{\infty} \int_{(V_i, \phi_i)} dS |(f\alpha_i)(x)| < \infty.$$

Dann ist das Integral von f über M (unabhängig von der Zerlegung der Eins) definiert durch

$$\int_M dS f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \int_{T_i} du_i \sqrt{\det((D\phi_i)^t(u_i) \cdot (D\phi_i)(u_i))} (f\alpha_i)(\phi_i(u_i)).$$

Wir sehen uns noch einige interessante Integrale über Karten an:

Beispiel 30.4 (Integrale längs Kurven) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Intervall und $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Unter der Annahme $(Dc)(t) = c'(t) \neq 0$ handelt es sich um eine Immersion, d.h. c spielt die Rolle von ϕ in Definition 30.3. Sei f jetzt eine Funktion auf der Spur $\Gamma := c(I)$, dann ist das Kurvenintegral gegeben durch

$$\int_{\Gamma} dS f(x) = \int_I dt \|c'(t)\| f(c(t)).$$

Insbesondere ist $L(c) = \int_{\Gamma} dS = \int_I dt \|c'(t)\|$ die Bogenlänge. ◁

Die Berechnung von Determinanten des Typs $\det(A^t \cdot A)$ mit $A \in M((n+k) \times n, \mathbb{R})$ kann für große n, k sehr umständlich werden. Hier hilft das Determinanten-Multiplikationstheorem (Binet-Cauchy-Theorem) entscheidend weiter:

Satz 30.5 (Binet-Cauchy) Es seien $A = (a_1, \dots, a_{n+k}) \in M((n+k) \times n, \mathbb{R})$ und $B = (b_1, \dots, b_{n+k}) \in M((n+k) \times n, \mathbb{R})$ zwei rechteckige Matrizen, gebildet aus den Zeilenvektoren $a_i, b_i \in \mathbb{R}^n$. Für $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_n \leq n+k$ seien quadratische Matrizen $A^{m_1 m_2 \dots m_n} := (a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_n}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $B^{m_1 m_2 \dots m_n} := (b_{m_1}, b_{m_2}, \dots, b_{m_n}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert. Dann gilt

$$\det(A^t \cdot B) = \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_n \leq n+k} (\det A^{m_1 m_2 \dots m_n}) \cdot (\det B^{m_1 m_2 \dots m_n})$$

Die Summe läuft über die $\binom{n+k}{n} = \frac{(n+k)!}{n!k!}$ verschiedenen Möglichkeiten, n der $n+k$ Zeilen der Matrizen auszuwählen.

Ein Beweis findet sich z.B. in G. Fischer: Lineare Algebra, Kapitel 3.3.

Beispiel 30.6 Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und die Höhenfunktion $h : T \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist die Abbildung $\phi : T \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\phi(u) := (u, h(u))$ eine Immersion. Zur Berechnung von Integralen über den Graphen $\Gamma := \phi(T) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ benötigen wir die Determinante der Matrix $G(u) = (D\phi)^t(u) \cdot (D\phi)(u)$. Dabei ist $(D\phi)(u) = \begin{pmatrix} E_n \\ (\text{grad } h)(u) \end{pmatrix}$, wenn $(\text{grad } h)(u) \in \mathbb{R}^n$ als Zeilenvektor betrachtet wird. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 30.5

$$\det((D\phi)^{1,2,\dots,n}) = 1, \quad \det((D\phi)^{1,\dots,i-1,i+1,\dots,n+1}) = \pm \partial_i h$$

und damit $\det(D\phi)^t(u) \cdot (D\phi)(u) = 1 + \|(\text{grad } h)(u)\|^2$. Somit erhalten wir das Integral einer Funktion f über den Graph $\Gamma := \phi(T) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ (Höhenfläche) zu

$$\int_{\Gamma} dS f(x) = \int_T du \sqrt{1 + \|(\text{grad } h)(u)\|^2} f(u, h(u)).$$

Wir berechnen auf diese Weise noch einmal die Oberfläche der Halbkugel HK . Dazu sei $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ und $h(x, y) := \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Dann ist $HK := (x, y, h(x, y)) \subseteq \mathbb{R}^3$, und wir erhalten

$$v_2(HK) = \int_{HK} dS = \int_T d(x, y) \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Das Integral lösen wir in Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Mit Satz 27.3 erhalten wir

$$v_2(HK) = \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} \stackrel{r=R \sin t}{=} 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin t = 2\pi R^2. \quad \triangleleft$$

Beispiel 30.7 (Rotationsflächen im \mathbb{R}^3) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und die Radiusfunktion $r : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ differenzierbar. Sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I, x^2 + y^2 = (r(z))^2\}$ die Rotationsfläche. Dann ist die Abbildung

$$\phi : I \times]0, 2\pi[\rightarrow M \setminus N, \quad \phi(\varphi, z) := (r(z) \cos \varphi, r(z) \sin \varphi, z)$$

eine Immersion, wobei der Nullmeridian $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I, y = 0, x^2 = (r(z))^2\}$ herausgeschnitten ist. Wir erhalten

$$(D\phi)(z, \varphi) = \begin{pmatrix} r'(z) \cos \varphi & -r(z) \sin \varphi \\ r'(z) \sin \varphi & r(z) \cos \varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $(\det(D\phi)^t \cdot (D\phi))(z, \varphi) = r(z)^2(1 + (r'(z))^2)$. Da N eine Nullmenge ist, erhalten wir das Integral einer Funktion f über die Rotationsfläche zu

$$\int_M dS f(x) = \int_I dz \int_0^{2\pi} d\varphi r(z) \sqrt{1 + (r'(z))^2} f(r(z) \cos \varphi, r(z) \sin \varphi, z).$$

Für $I =]-R, R[$ und $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ erhalten wir die Oberfläche der dreidimensionalen Kugel $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ zu

$$v_2(M) = \int_M dS = 2\pi \int_{-R}^R dz \sqrt{R^2 - z^2} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}}\right)^2} = 2\pi R \int_{-R}^R dz = 4\pi R^2.$$

◁

31 Der Gaußsche Integralsatz

Wir betrachten jetzt (differenzierbare) Hyperflächen im \mathbb{R}^n , d.h. $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Lokal auf einer Teilmenge $U \subseteq M$ ist der Normalenvektorraum $N_a(U)$ ein eindimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^n , gegeben durch Vielfache des Gradienten der Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, die die Untermannigfaltigkeit beschreibt.

Definition 31.1 Ein *Einheitsnormalenfeld* auf einer Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein stetiges Vektorfeld $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, so daß in jedem Punkt $x \in M$ gilt

- i) $\nu(x)$ steht senkrecht auf dem Tangentialraum $T_x(M)$
- ii) $\|\nu(x)\| = 1$

Eine differenzierbare Hyperfläche heißt *orientierbar*, wenn es auf ihr ein Einheitsnormalenfeld gibt. Ein Paar (M, ν) mit festgelegtem Einheitsnormalenfeld ν heißt *orientierte Hyperfläche*.

Entweder es existieren zwei Einheitsnormalenfelder ν und $-\nu$, oder gar keines. Lokal in jeder Karte (V, ϕ) von M existiert immer ein Einheitsnormalenfeld $\nu = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$. Beim Zusammensetzen der Karten zu einer Überdeckung von M kann es aber das Problem geben, daß auf dem Durchschnitt $V_i \cap V_j$ sich die Einheitsnormalenfelder der Karten um das Vorzeichen unterscheiden. Das Möbiusband ist ein Beispiel für eine nichtorientierbare Hyperfläche.

Definition 31.2 Es sei (M, ν) eine orientierte differenzierbare Hyperfläche im \mathbb{R}^n . Ein Vektorfeld $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *integrierbar über M* , wenn die Funktion $\langle F, \nu \rangle$ über M integrierbar ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_{(M, \nu)} \vec{dS} F(x) := \int_M dS \langle F(x), \nu(x) \rangle.$$

Zur Formulierung des Gaußschen Integralsatzes benötigen wir den Begriff des C^1 -Polyeders:

Definition 31.3 Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und ∂G der Rand von G . Ein Randpunkt $x \in \partial G$ heißt *regulärer Randpunkt*, wenn es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $(\text{grad } f)(y) \neq 0$

für alle $y \in U$ und $G \cap U = \{y \in U : f(y) \leq 0\}$. Jeder nicht reguläre Randpunkt von ∂G heißt singulär. Die Menge der regulären Randpunkte heißt *regulärer Rand* $\partial_r G$. Die Menge der singulären Randpunkte heißt *singulärer Rand* $\partial_s G$. Die Menge G heißt \mathcal{C}^1 -Polyeder, wenn $\partial_s G$ eine $n - 1$ -dimensionale Nullmenge ist.

Die Definition besagt, daß der reguläre Rand eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit (Hyperfläche) ist. Singuläre Randpunkte sind z.B. die Ecken und Kanten eines Quaders. Diese dürfen wir nicht ausschließen, da der Beweis des Gaußschen Integralsatzes auf den Fall der Quader zurückgeführt wird. Da es für $\partial_r G$ "innen" und "außen" gibt, ist $\partial_r G$ orientierbar. Das äußere Einheitsnormalenfeld ist dann dadurch ausgezeichnet, daß es für jeden Punkt $x \in \partial G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß $x + t\nu(x) \notin G$ für alle $t \in]0, \epsilon[$.

In Vorbereitung des Gaußschen Integralsatzes sei an die Divergenz eines Vektorfeldes F auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ erinnert: Ist $F = (F_1, \dots, F_n)$ mit differenzierbaren Funktionen $F_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist die Divergenz des Vektorfeldes die Funktion $(\operatorname{div} F) = \partial_1 F_1 + \dots + \partial_n F_n$.

Theorem 31.4 (Gauß) *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Polyeder, und $\partial_r G$ sei durch das äußere Einheitsnormalenfeld orientiert. Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $G \subseteq U$. Ist die Divergenz des Vektorfeldes $\operatorname{div} F$ über $G \subseteq U$ integrierbar und das Vektorfeld F über den regulären Rand $\partial_r G$ integrierbar, dann gilt*

$$\int_G dy (\operatorname{div} F)(y) = \int_{\partial_r G} d\vec{S} F(x) = \int_{\partial_r G} dS \langle \nu, F(x) \rangle .$$

Der entscheidende Schritt im Beweis ist die Betrachtung der Situation für einen kompakten achsenparallelen Quader, der offenbar ein \mathcal{C}^1 -Polyeder ist.

Lemma 31.5 *Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offener Quader und $F = (F_1, \dots, F_n)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung U von Q . Dann gilt*

$$\int_Q dy (\operatorname{div} F)(y) = \int_{\partial Q} d\vec{S} F(x)$$

Beweis. Es sei $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂Q . Wegen Linearität der Integrale genügt es zu zeigen, daß für jede auf U stetig differenzierbare Funktion f und jede Komponente $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\int_Q dy (\partial_i f)(y) = \int_{\partial_r Q} (\nu_i f)(x) .$$

Durch Ummumerierung der Richtungen können wir $i = n$ annehmen. Dann ist $Q = Q' \times]a, b[$, wobei $Q' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ wieder ein offener Quader ist. Entsprechend sei

$y = (y', z)$ die Parametrisierung mit $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $z \in \mathbb{R}$. Der reguläre Rand von Q ist

$$\partial_r Q = ((Q')^\circ \times \{a\}) \cup ((Q')^\circ \times \{b\}) \cup (\partial_r Q' \times]a, b[),$$

wobei $(Q')^\circ$ das offene Innere von Q' ist. Für die n -te Komponente ν_n des äußeren Einheitsnormalenfeldes auf dem regulären Rand gilt dann

$$\nu_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{auf } (Q')^\circ \times \{b\} \\ -1 & \text{auf } (Q')^\circ \times \{a\} \\ 0 & \text{auf } \partial_r Q' \times]a, b[\end{cases}$$

Also ist die Funktion $f\nu_n$ nur über die Randflächen $(Q')^\circ \times \{b\}$ und $(Q')^\circ \times \{a\}$ zu integrieren. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial_r Q} dx (\nu_n f)(x) &= \int_{(Q')^\circ} dy' f(y', b) - \int_{(Q')^\circ} dy' f(y', a) \\ &= \int_{(Q')^\circ} dy' \int_a^b dz (\partial_n f)(y', z) = \int_Q d(y', z) (\partial_n f)(y', z). \quad \square \end{aligned}$$

Wir sehen uns einige Anwendungen des Gaußschen Integralsatzes an.

Beispiel 31.6 (Oberfläche der Einheitskugel)

Es sei $G = K_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ die n -dimensionale Einheitskugel und $S^{n-1} := \partial G = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ die $(n-1)$ -dimensionale Sphäre. Wir betrachten das Vektorfeld $F = x$ mit $(\operatorname{div} F)(x) = n$. Das äußere Einheitsnormalenfeld auf S^{n-1} ist $\nu(x) = x$. Dann gilt

$$\int_{K_n} dx (\operatorname{div} F)(x) = n \int_{K_n} dx = n\kappa_n = \int_{S^{n-1}} dS \langle x, x \rangle = \int_{S^{n-1}} dS =: \omega_n.$$

Die Oberfläche der S^{n-1} ist also $v_{n-1}(S^{n-1}) =: \omega_n = n\kappa_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$. ◁

Beispiel 31.7 Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Polyeder, $a \in \mathbb{R}^n \setminus \partial G$ ein Punkt und $F(x) := \frac{x-a}{\|x-a\|^n}$. Wir beweisen

$$\int_{\partial_r G} d\vec{S} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \notin G \\ \omega_n & \text{für } a \in G \end{cases} \quad (*)$$

Zunächst gilt für $x \neq a$

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} F)(x) &= \left\langle x-a, \operatorname{grad} \frac{1}{\|x-a\|^n} \right\rangle + \frac{1}{\|x-a\|^n} \operatorname{div}(x-a) \\ &= \left\langle x-a, \frac{-n}{\|x-a\|^{n+1}} \frac{x-a}{\|x-a\|} \right\rangle + \frac{n}{\|x-a\|^n} = 0. \end{aligned}$$

Ist $a \notin G$, dann liefert der Gaußsche Integralsatz sofort die Behauptung (*).

Ist andererseits $a \in G$, dann gibt es wegen $a \notin \partial G$ eine offene Kugel $K_r(a) \subseteq G$. Dann ist $G_a := G \setminus K_r(a)$ wieder ein \mathcal{C}^1 -Polyeder, und $(\operatorname{div} F)(y) = 0$ für alle $y \in G_a$. Es gilt $\partial_r G_a = \partial_r G \cup \partial K_r(a)$. Das äußere Einheitsnormalenfeld ν auf $\partial K_r(a)$ aus Sicht von G_a ist das innere Einheitsnormalenfeld aus Sicht von $K_r(a)$, so daß gilt $\nu(x) = -\frac{x-a}{\|x-a\|} = -\frac{1}{r}(x-a)$. Das ergibt $\langle \nu(x), F(x) \rangle = -\frac{1}{r^{n-1}}$ für alle $x \in K_r(a)$ und damit

$$\int_{\partial_r G} d\vec{S} F(x) = - \int_{\partial K_r(a)} d\vec{S} F(x) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial K_r(a)} dS = \omega_n .$$

Die Gleichung (*) verallgemeinert sich auf Linearkombinationen von Vektorfeldern F . Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Polyeder und seien q_1, \dots, q_k die Punktladungen in den Punkten $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial G$, dann ist nach dem Coulombschen Gesetz die elektrische Feldstärke in einem Punkt $x \neq a_i$ gegeben durch

$$E(x) = \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{4\pi} \frac{x - a_i}{\|x - a_i\|^3} .$$

Der Fluß der elektrischen Feldstärke durch die Oberfläche ∂G ist dann gleich der Gesamtladung in G :

$$\int_{\partial G} d\vec{S} E(x) = \sum_{\{i : a_i \in G\}} q_i . \quad \triangleleft$$

Definition 31.8 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f auf U heißt *harmonisch*, wenn $(\Delta f)(x) = 0$ für alle $x \in U$.

Die Newtonschen Potentiale $N_a : (\mathbb{R}^n \setminus \{a\}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$N_a(x) := \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{\|x-a\|^{n-2}} & \text{für } n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln \|x-a\| & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

sind auf $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ harmonisch, denn mit $r := \|x-a\| > 0$ gilt ($n \geq 3$)

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \frac{1}{r^{n-2}}) = \operatorname{div}\left(\frac{(2-n)}{r^{n-1}} \frac{x-a}{r}\right) = (2-n) \operatorname{div}\left(\frac{x-a}{\|x-a\|^2}\right) = 0$$

nach Beispiel 31.7. Wir zeigen nun, daß die Verallgemeinerung des Coulombschen Gesetzes auf kontinuierliche Ladungsdichten die Poisson-Gleichung löst:

Satz 31.9 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\rho \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ mit $\rho(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\phi(x) := \int_{\Omega} dy N_y(x) \rho(y) .$$

Dann ist $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und ϕ löst die Poisson-Gleichung $\Delta \phi = \rho$.

Beweis. (für $n \geq 3$) Formal gilt

$$(\partial_i \phi)(x) = \int_{\Omega} dy (\partial_i N_y)(x) \rho(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} dy \frac{(x-y)_i}{\|x-y\|^n} \rho(y)$$

Für $x \notin \Omega$ existiert das Integral ohne Probleme. Für $x \in \Omega$ teilen wir Ω auf in die abgeschlossene Kugel $\overline{K_\epsilon(x)}$ und den Rest. Nach Voraussetzung ist ρ stetig und beschränkt, und nach Übergang zu Polarkoordinaten in $\overline{K_\epsilon(x)}$ folgt die Integrierbarkeit von $\frac{(x-y)_i}{\|x-y\|^n} \rho(y)$. Der Satz von Lebesgue sichert dann die Korrektheit der formalen Lösung.

Da ρ stetig differenzierbar ist, gilt nach Vertauschen von x, y

$$\begin{aligned} (\partial_i \phi)(x) &= - \int_{\Omega} dy (\partial_i N_x)(y) \rho(y) \\ &= - \int_{\Omega} dy (\partial_i (N_x(\cdot) \rho))(y) + \int_{\Omega} dy N_x(y) (\partial_i \rho)(y) \end{aligned}$$

Wir identifizieren $\partial_i (N_x(\cdot) \rho) = \operatorname{div}(N_x(\cdot) \rho e_i)$ und erhalten über den Gaußschen Integralsatz

$$(\partial_i \phi)(x) = - \int_{\partial_r \Omega} dS \nu_i N_y(x) \rho(y) + \int_{\Omega} dy N_y(x) \frac{\partial}{\partial y_i} (\rho(y) - \rho(x)) .$$

Nochmalige partielle Ableitung ergibt

$$\begin{aligned} (\partial_i \partial_i \phi)(x) &= - \int_{\partial_r \Omega} dS \nu_i (\partial_i N_y)(x) \rho(y) + \int_{\Omega} dy (\partial_i N_y)(x) \frac{\partial}{\partial y_i} (\rho(y) - \rho(x)) \\ &= \int_{\partial_r \Omega} dS \nu_i (\partial_i N_x)(y) \rho(y) \\ &\quad - \int_{\Omega} dy \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial N_x(y)}{\partial y_i} (\rho(y) - \rho(x)) \right) + \int_{\Omega} dy \frac{\partial^2 N_x(y)}{\partial y_i \partial y_i} (\rho(y) - \rho(x)) \\ &= \rho(x) \int_{\partial_r \Omega} dS \nu_i (\partial_i N_x)(y) + \int_{\Omega} dy \frac{\partial^2 N_x(y)}{\partial y_i \partial y_i} (\rho(y) - \rho(x)) , \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wieder der Gaußsche Integralsatz benutzt wurde. Nach Summation über i entsteht

$$(\Delta \phi)(x) = \rho(x) \int_{\partial_r \Omega} dS \langle \nu, \operatorname{grad}_y N_x(y) \rangle + \int_{\Omega} dy \Delta_y N_x(y) (\rho(y) - \rho(x)) .$$

Nach Beispiel 31.7 gilt $\int_{\partial_r \Omega} dS \langle \nu, \operatorname{grad}_y N_x(y) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \Omega \\ 0 & \text{für } x \notin \Omega \end{cases}$. Im Ω -Integral ist $\Delta_y N_x(y) = 0$ für $x \neq y$, so daß wir das Integral auf $K_\epsilon(x)$ beschränken dürfen.

Dann gilt mit $|\rho(y) - \rho(x)| \leq M\|x - y\|$ und $\|x - y\| = r$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{K_\epsilon(x)} dy (\Delta_y N_x(y)) (\rho(y) - \rho(x)) \right| \\ & \leq \frac{M}{(n-2)\omega_n} \sum_{i=1}^n \int_{K_\epsilon(0)} dy \left| \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \frac{1}{r^{n-2}} \right| r \leq \frac{M}{\omega_n} \sum_{i=1}^n \int_{K_\epsilon(0)} dy \left| \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{y_i}{r^n} \right| r \\ & \leq \frac{M}{\omega_n} \sum_{i=1}^n \int_{K_\epsilon(0)} dy \left(\frac{1}{r^n} + \frac{ny_i y_i}{r^{n+2}} \right) r = (n+1)M\epsilon. \end{aligned}$$

Für $\epsilon \rightarrow 0$ folgt die Behauptung $(\Delta\phi)(x) = \rho(x)$. □

Dabei kann man sich ρ als Ladungsdichte vorstellen und ϕ als elektrisches Potential. Auf diese Weise findet man das Coulombsche Gesetz als Lösung der statischen Maxwell'schen Gleichungen. Die Lösung ϕ der Poisson-Gleichung kann nicht eindeutig sein: $\phi + h$ mit h harmonisch ist ebenfalls eine Lösung. Die Eindeutigkeit kann durch Randbedingungen erzwungen werden.

Satz 31.10 (Greensche Formeln) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Polyeder und f, g zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf einer offenen Umgebung von G . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_G dy \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle(y) &= \int_{\partial G} dS (f D_\nu g)(x) - \int_G dy (f \Delta g)(y), \\ \int_G dy (f \Delta g - g \Delta f)(y) &= \int_{\partial G} dS (f D_\nu g - g D_\nu f)(x), \end{aligned}$$

wobei $D_\nu f = \langle \nu, \text{grad } f \rangle$ die Richtungsableitung in die äußere Normalenrichtung ist.

Beweis. Man wendet den Gaußschen Integralsatz auf das Vektorfeld $F = f \text{grad } g$ an und benutzt die Leibnizregel $\text{div } F = \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle + f \Delta g$. □

Satz 31.11 Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Teilmenge, für die der Gaußsche Integralsatz gilt, und $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei das äußere Einheitsnormalenfeld. Eine Funktion $h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ sei harmonisch, $\Delta h = 0$ in Ω . Dann gilt:

- i) $\int_{\partial\Omega} dS \langle \text{grad } h, \nu \rangle = 0$ (Gaußscher Integralsatz)
- ii) Ist zu $a \in \Omega$ die Kugel $\overline{K_r(a)} \subseteq \Omega$, dann gilt
$$h(a) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K_r(a)} dS h(x) \quad (\text{Mittelwertsatz})$$
- iii) Ist Ω zusammenhängend und nimmt h ihr Maximum oder Minimum auf $\overline{\Omega}$ im Inneren Ω an, so ist h auf $\overline{\Omega}$ konstant (Maximumprinzip).

iv) Erfüllen h_1, h_2 die Voraussetzungen und ist $h_1 = h_2$ auf $\partial\Omega$ mit Ω zusammenhängend, so gilt $h_1 = h_2$ auf $\overline{\Omega}$.

Beweis. ii) (für $n \geq 2$) Sei $G := \overline{K_r(a)} \setminus K_\rho(a)$ die Kugelschale mit innerem Radius ρ und äußerem Radius $r > \rho$, und sei $S_r := \partial K_r(a)$ und $S_\rho := \partial K_\rho(a)$. Dann sind h, N_a harmonisch auf G , so daß nach der 2. Greenschen Formel gilt

$$\int_{S_r} dS (hD_\nu N_a - N_a D_\nu h)(x) = \int_{S_\rho} dS (hD_\nu N_a - N_a D_\nu h)(x) .$$

Dabei ist ν jeweils das äußere Einheitsnormalenfeld auf den Sphären. Die 1. Greensche Formel für $G = \overline{K_R(a)}$ sowie $f \mapsto 1$ und $g \mapsto h$ liefert $\int_{S_R} dS (D_\nu h)(x) = 0$ für $R = \rho$ und $R = r$. Da N_a auf S_R konstant ist, folgt $\int_{S_r} dS (hD_\nu N_a)(x) = \int_{S_\rho} dS (hD_\nu N_a)(x)$. Für alle $x \in S_R$ gilt $(D_\nu N_a)(x) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{\|x-a\|^{n-1}} = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}$ und damit

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S_r} dS h(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{S_\rho} dS h(x) .$$

Für $\rho \rightarrow 0$ folgt aus der Stetigkeit von h die Behauptung.

iii) Sei $M := \max_{x \in \overline{\Omega}} h(x)$ und $F := \{x \in \Omega : h(x) = M\} \subseteq \Omega$. Wir zeigen, F ist offen und abgeschlossen. Das heißt $F = \Omega$ (dann ist h konstant) oder $F = \emptyset$ (dann nimmt h das Maximum auf dem Rand an).

Sei $F \neq \emptyset$ und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $x_k \in F$, die gegen $x \in \Omega$ konvergiert. Dann ist $h(x_k) = M$ für alle k und wegen der Stetigkeit von h folgt $h(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k) = M$, also ist F abgeschlossen.

Sei $x \in F$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{K_r(x)} \subseteq \Omega$. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz $h(y) = M$ für alle $y \in \partial K_r(x)$, denn wäre $h(y) < M - \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$, dann folgt aus der stetigen Differenzierbarkeit von h die Existenz einer Teilmenge $V \subseteq \partial K_r(x)$ mit Volumen $\geq \delta > 0$, auf der $h(y) < M - \epsilon/2$ gilt. Nach ii) wäre dann auch $h(x) < M$, Widerspruch. Also gibt es zu jedem $x \in F$ auch eine Kugel $K_r(x) \subseteq F$, damit ist F offen. Die Aussagen für das Minimum ergeben sich mit $h \mapsto -h$.

iv) Mit h_1, h_2 ist auch $h := h_1 - h_2$ harmonisch mit $h = 0$ auf $\partial\Omega$. Dann ist $h = 0$ auf $\overline{\Omega}$ nach iii). \square

Eine wichtige Anwendung betrifft das Dirichlet-Problem

$$(\Delta\phi)(x) = \rho(x) \text{ für alle } x \in \Omega, \quad \phi(y) = f \text{ für alle } y \in \partial\Omega$$

mit vorgegebenen Ladungsdichten ρ und Randwerten f . Nach Satz 31.11 gibt es höchstens eine Lösung des Dirichlet-Problems.

Satz 31.12 (Sektorformel von Leibniz) *Es sei $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare reguläre Kurve und $S_c := \{s \cdot c(t) : s \in [0, 1], t \in [\alpha, \beta]\}$ der von c gebildete Sektor. Dann ist mit $c(t) = (x(t), y(t))$ der Flächeninhalt des Sektors gegeben durch*

$$v_2(S_c) = \frac{1}{2} \int_c (-y dx + x dy) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta dt (-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)) .$$

Beweis. Der Tangentialvektor an c in t ist $(x'(t), y'(t))$. Damit ist $\nu := \left(\frac{y'(t)}{\|c'(t)\|}, -\frac{x'(t)}{\|c'(t)\|} \right)$ mit $\|c'(t)\| = \sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2}$ ein Einheitsnormalenvektor an den von c gebildeten Rand von S_c . Wird c im positiven Sinn durchlaufen, dann ist ν der äußere Einheitsnormalenvektor. Betrachte das Vektorfeld $F = \text{id} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, d.h. $F(x, y) = (x, y)$. Nach Beispiel 30.4 gilt

$$\int_{c([\alpha, \beta])} dS \langle F, \nu \rangle = \int_\alpha^\beta dt \|c'(t)\| \langle F(c(t)), \nu \rangle = \int_\alpha^\beta dt (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) .$$

Auf den Radien $sc(\alpha)$ und $sc(\beta)$, mit $s \in [0, 1]$ ist F tangential gerichtet, somit $\langle F, \nu \rangle = 0$. Andererseits ist $\text{div}(F) = 2$ und damit $\int_G dy (\text{div } F)(y) = 2v_2(G)$. Der Gaußsche Integralsatz liefert die Behauptung. \square

Beispiel 31.13 Sei $c(t) = (x(t), y(t))$ mit $x = r \cos t$ und $y = r \sin t$ ein Kreisbogen, dann ist

$$v_2(S_c) = \frac{r^2}{2} \int_\alpha^\beta dt (\sin^2 t + \cos^2 t) = \frac{r^2(\beta - \alpha)}{2} .$$

Der Vollkreis $\beta - \alpha = 2\pi$ hat die Fläche πr^2 \triangleleft

Als weitere Anwendung leiten wir die Keplerschen Gesetze aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz

$$x''(t) = -\frac{Mx(t)}{\|x(t)\|^3}$$

her. Dabei ist M für alle Planeten der gleiche Wert. Wir benötigen das Vektorprodukt von Vektoren $a = (a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_1, b_2, b_3)$:

$$(a \times b)_1 := a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad (a \times b)_2 := a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad (a \times b)_3 := a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

Dann gilt $a \times b = -b \times a$, insbesondere $a \times a = 0$. Weiter gilt die Graßmann-Identität $a \times (b \times c) = b\langle a, c \rangle - c\langle a, b \rangle$ sowie $\langle a, b \times c \rangle = \det(a, b, c) = \langle b, c \times a \rangle = \langle c, a \times b \rangle$ (Spatprodukt).

Der Drehimpuls $J = x \times x'$ ist eine Erhaltungsgröße:

$$J' = x \times x'' + x' \times x' = -\frac{G}{\|x\|^3} x \times x = 0 .$$

Weiter sei $A := \frac{1}{M}J \times x' + \frac{x}{\|x\|}$ der Lenz-Runge-Vektor. Er ist ebenfalls eine Erhaltungsgröße:

$$A' = \frac{1}{M}J \times x'' + \frac{x'}{\|x\|} - \frac{x \langle x, x' \rangle}{\|x\|^3} = \frac{1}{\|x\|^3} \left(-(x \times x') \times x + x' \langle x, x \rangle - x \langle x, x' \rangle \right) = 0$$

wegen der Graßmann-Identität. Die Gleichung $\langle x, J \rangle = 0$ (Spatprodukt) besagt, daß der Bahnvektor x in einer Ebene E senkrecht zum konstanten Drehimpulsvektor J liegt. Dann ist auch $A \perp J$, d.h. A, x liegen in E . Somit gilt

$$\langle A, x \rangle = \|A\| \|x\| \cos \phi = \frac{1}{M} \langle J \times x', x \rangle + \|x\| = -\frac{1}{M} \langle x \times x', J \rangle + \|x\| = -\frac{\|J\|^2}{M} + \|x\|.$$

Ist $A = 0$, so ist $r := \|x\| = \frac{\|J\|^2}{M} = \text{const}$, die Bahn also ein Kreis. Ansonsten folgt

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \phi}, \quad \epsilon = \|A\|, \quad p = \frac{\|J\|^2}{M}.$$

Das ist die Darstellung eines Kegelschnittes in Polarkoordinaten $(r(\phi), \phi)$ mit Brennpunkt $r = 0$. Somit folgt:

Die Bahnen der Planeten sind ebene Kegelschnitte, in deren einen Brennpunkt die Sonne steht.

Sei $J = \|J\|e_3$ und $x = x_1e_1 + x_2e_2$, dann ist $\|J\| = x_1x_2' - x_2x_1'$. Nach der Sektorformel von Leibniz gilt

$$\|J\|(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \|J\| = \int_{t_1}^{t_2} dt (x_1x_2' - x_2x_1') = 2v_2(S_{t_1, t_2}),$$

wobei S_{t_1, t_2} der Sektor unter der Bahnkurve zwischen t_1, t_2 ist. Somit gilt:

Der Radiusvektor Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Für $0 \leq \epsilon < 1$ ist die Bahn eine geschlossene Ellipse. Ist T die Umlaufzeit, dann ist $F = \frac{\|J\|T}{2}$ die Fläche der Ellipse. Andererseits ist

$$F = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r(\phi)} d\rho \rho = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1 - \epsilon \cos \phi} \right)^2 = \frac{\pi p^2}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Integral kann über den Residuensatz berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{(1 - \epsilon \cos \phi)^2} &= 2\pi \operatorname{res}_{z_0 \in K_1(0)} \left(\frac{1}{z \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)^2} \right) \\ &= 2\pi \operatorname{res}_{z_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon}} \left(\frac{4z}{(2z - \epsilon(z^2 + 1))^2} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{4z(z - z_0)^2}{(2z - \epsilon(z^2 + 1))^2} \right)' \Big|_{z=z_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \left(\frac{4z}{(\epsilon z - 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2})^2} \right)' \Big|_{z=z_0} \\
&= 2\pi \left(\frac{4}{(\epsilon z - 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2})^2} - \frac{8z\epsilon}{(\epsilon z - 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2})^3} \right) \Big|_{z=z_0} \\
&= \frac{2\pi}{(\sqrt{1 - \epsilon^2})^3}.
\end{aligned}$$

Die große Halbachse a der Ellipse ist definiert durch $2a := r(0) + r(\pi) = \frac{p}{1-\epsilon} + \frac{p}{1+\epsilon^2} = \frac{2p}{1-\epsilon^2} = \frac{2\|J\|^2}{M(1-\epsilon^2)}$. Somit gilt: $\|J\|T = 2\pi \frac{\|J\|^4}{M^2(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{M}} \|J\| a^{\frac{3}{2}}$.

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich zueinander wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

Der Gaußsche Integralsatz ist Spezialfall des *Integralsatzes von Stokes*. Dieser wird in der Sprache der Differentialformen formuliert, die wir in Definition 14.5 eingeführt hatten. Eine k -Form $\omega^{(k)} \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ läßt sich über k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n integrieren. Zunächst definiert man für $\omega^{(n)} \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ das Integral über $G \subseteq \mathbb{R}^n$ als

$$\int_G \omega_{12\dots n} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n := \int_G \omega_{12\dots n} d(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Über die Kartenabbildungen $\phi : T \rightarrow V \subseteq M$ lassen sich k -Formen $\omega^{(k)} \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ über k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^n$ integrieren. Dann gilt:

Satz 31.14 (Stokes) *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit, deren Rand ∂M eine $(k-1)$ -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit ist. Dann gilt für $\omega^{(k-1)} \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$*

$$\int_M d\omega^{(k-1)} = \int_{\partial M} \omega^{(k-1)}.$$

Symbolisch schreibt man $\langle M, d\omega \rangle = \langle \partial M, \omega \rangle$, d.h. Differential d und Rand ∂ sind zueinander adjungiert bezüglich der durch das Integral gegebenen Linearform.

Der Gaußsche Integralsatz ist nun ein Spezialfall des Stokesschen. Unter Verwendung der im Anschluß an Definition 14.6 eingeführten Isomorphismen ϱ_k können wir ein Vektorfeld F als eine $(n-1)$ -Form $\omega^{(n-1)} = \varrho_{n-1}(F) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ auffassen. Wir hatten $\operatorname{div} F = \varrho_n^{-1}(d(\varrho_{n-1}F))$ eingeführt, also ist

$$\int_G d\omega^{(n-1)} = \int_G \varrho_n(\operatorname{div} F) = \int (\operatorname{div} F) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Andererseits sehen wir uns $\int_{\partial G} \omega^{(n-1)} = \int \varrho_{n-1}(F)$ in kartesischen Basen an. Mit $F = f_1 e_1$ wird $\varrho_{n-1}(f_1 e_1) = f_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \langle \nu, f_1 e_1 \rangle dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$, denn e_1

ist gerade der Normalenvektor ν zur Hyperebene mit konstanter 1. Komponente. Summation über alle Richtungen liefert damit

$$\int_{\partial G} \omega^{(n-1)} = \int_{\partial G} \varrho_{n-1}(F) = \int_{\partial G} dS \langle \nu, F \rangle .$$

Der Stokessche Integralsatz wird vor allem in höherer Kodimension wichtig. Im \mathbb{R}^3 hatten wir die *Rotation* eines Vektorfeldes F erklärt als das Vektorfeld $\text{rot } F = \varrho_2^{-1}(d\varrho_1(F))$, also $\varrho_2(\text{rot } F) = d\varrho_1(F)$. Der Satz von Stokes liefert deshalb für eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Rand ∂M :

$$\int_M dS \langle \nu, \text{rot } F \rangle = \int_M \varrho_2(\text{rot } F) = \int_M d(\varrho_1(F)) = \int_{\partial M} \varrho_1(F) .$$

Das letzte Integral ist genau das Kurvenintegral der 1-Form $\varrho_1(F)$ längs der Kurve ∂M , deren Umlaufsinn durch die Wahl von ν entsprechend der rechten Hand zu wählen ist.