Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 2014/2015**
I. Ullisch

Übungen zu Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 7.11.2014 bis 10h00, in den Briefkästen Blatt 3

Aufgabe 1. Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x,y) := x^3 - \cos^2 y$.

(a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Gleichung $F(x,y) = 0$ nach x oder y auflösbar ist, und geben Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der jeweils gegebenen impliziten Funktionen an.

(b) Approxieren Sie die Auflösung $x = g(y)$ an der Stelle $y = \pi/8$ durch das Fixpunktverfahren bis zum vierten Folgeglied.

Aufgabe 2. Sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(r,\vartheta,\varphi) := (r \sin\vartheta \cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta).$$

(a) In welchen Punkten (r,ϑ,φ) ist F lokal umkehrbar?

(b) Berechnen Sie die Ableitung der jeweiligen Umkehrfunktionen.

(c) Geben Sie in einer Umgebung von $(0,1,0) = F(1,\pi/2,\pi/2)$ eine lokale Umkehrfunktion an.

Aufgabe 3. Sei $0 < r < R$ und $T \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte, die man von $(r+R,0,0)$ aus durch Nacheinanderausführung

- einer Drehung um die Achse $x = R, z = 0$ um einen Winkel $\theta \in [0,2\pi)$ und
- einer Drehung um die z-Achse um einen Winkel $\phi \in [0,2\pi)$

erreichen kann.

(a) Zeige mit Hilfe der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2}-R)^2 + z^2 - r^2$, dass $T \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

(b) Beschreibe $(x,y,z) \in T$ als Funktionen von ϕ und θ.

(c) Bestimme eine möglichst einfache Basis für den Tangentialraum an T an dem durch $\phi = \theta = \pi/4$ bestimmten Punkt. (*Hinweis:* Verwende (b), nicht (a).)

Aufgabe 4. Für die Bearbeitung dieser Aufgabe darf der *Satz vom regulären Wert* vorausgesetzt werden: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ offen und $c \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert der stetig differenzierbaren Abbildung $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$, d.h. für jedes $x \in U$ mit $f(x) = c$ ist das Differential $(Df)(x) : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ surjektiv. Dann ist $f^{-1}(c)$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$.

(a) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $M_c := \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) : \det A = c\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$? Welche Dimension liegt jeweils vor?

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := x^2 - y^2$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(c)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$? Skizzieren Sie $f^{-1}(c)$.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $O(n) := \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) : A^{\mathrm{t}} A = E_n\}$. Zeigen Sie, daß $O(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ ist und bestimmen Sie deren Dimension. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) : A^{\mathrm{t}} = A\}$, definiert durch $f(A) = A^{\mathrm{t}} A$.)