Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch

WS 2014/2015

Übungen zu Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 28.11.2014 bis 10h00, in den Briefkästen — Blatt 6

Aufgabe 1. Sei $A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem der DGL $x'(t) = A(t)x(t)$.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ mit $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. Sei I ein Intervall, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : I \to M(2, \mathbb{C})$ stetig und $x\colon I \to \mathbb{C}^2$ eine Lösung der homogenen DGL $x'(t) = A(t)x(t)$ mit $x_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

(a) Zeigen Sie: Eine Funktion $y\colon I \to \mathbb{C}^2$ der Form $y(t) = \phi(t)x(t) + z(t)$ mit $\phi\colon I \to \mathbb{C}$ und $z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ erfüllt $y'(t) = A(t)y(t)$ genau dann, wenn

$$a_{12}(t)z_2(t) - \phi'(t)x_1(t) = 0 \quad \text{und} \quad z_2'(t) = \left(a_{22}(t) - a_{12}(t)\frac{x_2(t)}{x_1(t)} \right) z_2(t).$$

(b) Die Funktion y der Form wie in (a) ist linear unabhängig von x.

(c) Finden Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem für

$$x'(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & -1 \\ t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix} x(t), \quad t \neq 0.$$

(*Hinweis:* Eine Lösung ist gegeben durch $x(t) = (t^2, -t)$.)

Aufgabe 3. Die *Hermite-Polynome* h_n, $n \in \mathbb{N}$, sind definiert durch

$$h_n = \frac{(-1)^n}{n!} \mathrm{e}^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} \mathrm{e}^{-t^2}.$$

(a) Zeigen Sie $(n+1)h_{n+1} = 2th_n - h_n'$ und

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathrm{e}^{-(t-s)^2} = n! h_n(t-s)\, \mathrm{e}^{-(t-s)^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für $s, t \in \mathbb{R}$ heißt $\Phi(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t)s^n$ die *erzeugende Funktion* der Hermite-Polynome h_n. Beweisen Sie $\Phi(s,t) = \mathrm{e}^{2st-s^2}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

(c) Leiten Sie die Formel $h_{n+1}' = 2h_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ her. (*Hinweis*: Warum ist $\Phi(s,t)$ partiell nach t differenzierbar?)

(d) Folgern Sie aus den bisherigen Ergebnissen, daß für $n \in \mathbb{N}$ das Hermite-Polynome h_n die *Hermitesche Differentialgleichung*

$$y'' - 2ty' + 2ny = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 4. Eine Weltraumrakete starte senkrecht zur Erdoberfläche (Vertikalstart). Nach einer gewissen Zeit ist iht Treibstoff verbrannt: Es tritt der sogenannte Brennschluß ein. Die beim Brennschluß erreichte Höhe h_b über der Erdoberfläche heiß die Brennschlußhöhe, die dann erlangte Geschwindigkeit v_b die Brennschlußgeschwindigkeit. Nach dem Brennschluß beginnt die Rakete ihren antriebslosen Aufstieg mit der Anfangsgeschwindigkeit v. Die kleinste Geschwindigkeit v, die es der Rakete ermöglicht, dem Gravitationsfeld der Erde zu entfliehen (d.h. nicht mehr zurück zur Erdoberfläche zu fallen), wird als *Fluchtgeschwindigkeit* bezeichnet, um deren (näherungsweise) Bestimmung es in dieser Aufgabe geht.
Die Rakete bewege sich längs einer x-Achse, deren Nullpunkt der Erdmittelpunkt sei. Gibt $x(t)$ die Entfernung der Rakete vom Erdmittelpunkt zum Zeitpunkt t an, wobei wir als Nullpunkt der Zeitmessung den Brennschluß wählen, so haben wir $x(0) = R + h_b =: x_b$ und $v(0) = x'(0) = v_b$. Hierbei bezeichnet R den Erdradius.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung der antriebslosen Raketenbewegung auf (genauer: Geben Sie eine Differentialgleichung an, deren Lösung durch $x(t)$, $t \geq 0$, gegeben wird). Beachten Sie dabei, daß zum Zeitpunkt t gemäß dem Newtonschen Gravitationsgesetz an die Rakete die Schwerkraft $K = -\gamma\, m(t)/x(t)^2$ angreift, wobei $m(t)$ die Masse der Rakete sowie $\gamma = G\times$Erdmasse das Produkt der Graviationskonstante $G = 6,67384\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2)$ und der Erdmasse ($\approx 5,9722\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$) ist. Beachten Sie ferner, daß nach dem Newtonschen Kraftgesetz $K = mx''(t)$ für einen Punkt mit der Masse m und der Ortskoordinate $x(t)$ gilt, der sich unter dem Einfluß einer Kraft mit der Stärke K längs der x-Achse bewegt. Warum darf der Luftwiderstand vernachlässigt werden?

(b) Gewinnen Sie aus der Differentialgleichung in (a) eine Gleichung für die Geschwindigkeit $v(t) = x'(t)$ und ermitteln Sie daraus die Fluchtgeschwindigkeit. Sie dürfen dabei x_b näherungsweise durch den Erdradius R ersetzen.