Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch **WS 2014/2015**

Übungen zu Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 5.12.2014 bis 10h00, in den Briefkästen Blatt 7

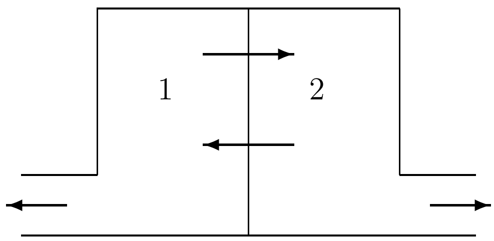
Aufgabe 1. Man gebe die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten an:

(a) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = t^3$;

(b) $x''(t) + x'(t) + x(t) = t + e^t$;

(c) $x''(t) + x(t) = t \cos t$.

Aufgabe 2. Eine Substanz der Menge y_1 in der Kammer 1 und der Menge y_2 in der Kammer 2 diffundiere von 1 nach 2 mit der Geschwindigkeit $a_1 y_1$ und von 2 nach 1 mit der Geschwindigkeit $a_2 y_2$. Ferner trete die Substanz mit der Geschwindigkeit $b_1 y_1$ aus der Kammer 1 und mit der Geschwindigkeit $b_2 y_2$ aus der Kammer 2 aus. Dabei seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.



Das Differentialgleichungssytem lautet also

$$\begin{aligned} y_1' &= -(a_1 + b_1) y_1 + a_2 y_2 \\ y_2' &= a_1 y_1 - (a_2 + b_2) y_2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $y_1(t)$, $y_2(t)$ in Abhängigkeit von $y_{10} = y_1(0)$ und $y_{20} = y_2(0)$.

Aufgabe 3. Eine Kette mit Masse m hängt zum Zeitpunkt $t = 0$ über einem glatten Rundholz c Meter auf der einen und $d > c$ Meter auf der anderen Seite herab und gleitet infolge der Erdanziehung g herunter.

(a) Stelle eine Differentialgleichung für die Länge $x(t)$ der Kette, die bis zum Zeitpunkt t über das Rundholz geglitten ist, auf. (*Hinweis:* Verwende den Parameter $v := \sqrt{\frac{2g}{c+d}}$.)

(b) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(c) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

(d) Zu welchem Zeitpunkt ist die Kette heruntergeglitten?

Aufgabe 4. Gegeben sei eine DGL der Form $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$. Seien $x_{(1)}, x_{(2)}$ zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL. Überführung in eine lineare DGL erster Ordnung für $c(t) = (x(t), x'(t))^t$ liefert die DGL

$$c'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} c(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

mit dem Lösungs-Fundamentalsystem $\Phi = \begin{pmatrix} x_{(1)} & x_{(2)} \\ x'_{(1)} & x'_{(2)} \end{pmatrix}$ der homogenen DGL.

(a) Zeigen Sie: Eine Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}^2$ erfüllt $\Phi(t)y'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$ genau dann, wenn

$$y_1'(t) = -\frac{f(t)x_{(2)}(t)}{W(t)} \text{ und } y_2'(t) = \frac{f(t)x_{(1)}(t)}{W(t)},$$

wobei $W(t) = x_{(1)}(t)x'_{(2)}(t) - x'_{(1)}(t)x_{(2)}(t)$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL zweiter Ordnung $x''(t) + x(t) = 1/\cos t$ durch Überführung in eine DGL erster Ordnung und Variation der Konstanten. (*Hinweis:* Wählen Sie x_1, x_2 reell!)