Die Virasoro Algebra

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und Einführung

Vorbemerkung

Das Gebiet der konformen Feldtheorien ist extrem reichhaltig und es lassen sich viele Verbindungen zwischen Mathematik und Physik finden. Konforme Quantenfeldtheorien weisen einen besonders hohen Symmetriegrad auf, weshalb sie mathematisch rigoros behandelbar sind. Weiter stehen sie in direktem Bezug zur Stringtheorie.
Dieser Vortrag soll einen Einblick ist dieses komplexe Gebiet geben und eine für die konforme Feldtheorie wichtige Mathematische Struktur einführen: die Virasoro Algebra.

Literatur:

- Martin Schottenloher: „A Mathematical Introduction into Conformal Field Theory"
- Matthias R. Gaberdiel: „Skript zur konformen Feldtheorie"
- A. Kriegl, P. W. Michor: „The Convenient Setting of Global Analysis"
- P. Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal: „Conformal Field Theory"

1.1 Konforme Abbildungen

1. **Definition**
   Ein Diffeomorphismus $f : M \to N$. zwischen zwei (semi -) riemannschen Mannigfaltigkeiten (M,g) und (N,h) heißt konform, falls:
   $h_{f(x)}(\mathrm{d}f_x(v), \mathrm{d}f_x(w)) = e^{\sigma(x)} \cdot g_x(v,w)$, $\forall x \in M$ und $\forall v,w \in T_xM$ Wobei $\sigma(x)$ eine beliebige, von x abhängige reelle Zahl sei.

2. **Bemerkung**
   Konforme Abbildung sind winkelerhaltend, wie unmittelbar aus der Definition folgt.

1.2 Konform Invariante Quantenfeldtheorien

Wir interessieren uns nun für konform invariante zweidimensionale Quantenfeldtheorien, wobei dieser Begriff zu präzisieren ist:
Gegeben sei eine Quantenfeldtheorie in der Ebene (die Signatur ist noch zu wählen, und für die Definition unerheblich), welche vermöge der Lagrange Dichte $\mathscr{L}(\phi, \partial^\mu \phi, x)$ beschrieben wird.
Die Wirkung ist also somit gegeben durch:

$$S[\phi] = \int \mathscr{L}(\phi, \partial^\mu \phi, x) \mathrm{d}^2 x$$

1. **Definition** (vorläufige Definition konformer Invarianz)
   Sei $f : \mathbb{R}^{p,q} \to \mathbb{R}^{p,q}$ eine konforme, invertierbare, Abbildung, $p+q=2$.
   Sei $\tilde{\phi}(x) = \phi(f^{-1}(x))$ das konform transformierte Feld.
   Eine Quantenfeldtheorie heißt konform invariant, falls:

$$\mathscr{L}(\phi, \partial^\mu \phi, x) \mathrm{d}^2 x = \mathscr{L}(\tilde{\phi}, \partial^\mu \tilde{\phi}, f(x)) \mathrm{d}^2 f(x)$$

Es folgt also insbesondere: $S[\phi] = S[\tilde{\phi}]$.

Diese Definition scheint sinnvoll, da die Dynamik des Feldes unter konformen Deformationen des zugrundeliegenden Raumes erhalten bleibt, also invariant ist.
Das Folgende gilt in dieser Form nur für den Fall der Euklidischen Signatur, welche bis Ende des Kapitels genutzt wird. Sei $T_{\mu\nu} = \partial^\nu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \mathrm{diag}(1,1)\mathscr{L}$ der vermöge des Noether Theorems definierte Energie Impuls Tensor. Es lässt sich herleiten ($\rightarrow$ Skript zur konformen Feldtheorie §3) :

2. **Satz**
   Falls eine zweidimensionale konforme Feldtheorie, welche mittels einer Lagrangedichte beschrieben wird, konform invariant ist, so gilt für den korrespondieren Energie Impuls Tensor:

   - $\frac{\partial}{\partial x_0} T_{00} + \frac{\partial}{\partial x_1} T_{10} = \frac{\partial}{\partial x_0} T_{01} + \frac{\partial}{\partial x_1} T_{11} = 0$
   - $T_{00} = -T_{11}$ und $T_{01} = T_{10}$

   Es folgt hieraus, dass $T := \frac{1}{2}(T_{00} - iT_{10})$ und $\overline{T} := \frac{1}{2}(T_{00} + iT_{10})$ holomophe (T), bzw antiholmorphe ($\overline{T}$) Felder sind.

Diese Eigenschaften werden uns später nochmals in einer axiomatischen Beschreibung konformer Feldtheorien begegnen. Wir wollen uns noch kurz ein Beispiel für eine konform invarianten Feldtheorie angucken, das bereits erwähnte masselose freie Fermion. Hierbei folgen wir im Wesentlichen dem Skript zur Konformen Feldtheorie, und für eine ausführlichere Beschreibung sei hierauf verwiesen.

1.3 Das masselose freie Fermion

Die euklidische Wirkung eines freien masselosen Fermion ist durch die folgende Lagrangedichte definiert:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi \ , \ i = 0,1$$

Wir stellen die Dirac Matrizen γ^0, γ^1 wie folgt dar:

$$\gamma^0 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 \cong \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Wirkung folgt (in dieser Darstellung):

$$S[\psi] = \int \psi \partial_{\bar{z}} \psi + \bar{\psi} \partial_z \bar{\psi} \mathrm{d}z \mathrm{d}\bar{z}, \ \partial_z = \partial_0 + i\partial_1 \text{ und } \partial_{\bar{z}} = \partial_0 - i\partial_1$$

wobei wir $\psi = (\psi, \bar{\psi})^t$ gesetzt haben. Die hieraus folgenden Euler Lagrange Gleichungen

$$\partial_{\bar{z}} \psi = \partial_z \bar{\psi} = 0$$

implizieren nach Wirtinger Kalkül, dass sich das Feld in einen holomorphen Anteil ψ, bzw antiholomorphen Anteil $\bar{\psi}$ aufspaltet.
Im Folgenden werde nur der holomorphe Anteil betrachtet, das antiholomorphe Gegenstück ist analog zu behandeln. Für den Energie Impuls Tensor folgt unter Ausnutzung der Bewegungsgleichungen:

$T = \psi \partial_z \psi$, also holomorph.
Wir können nun sowohl T als auch ψ wie folgt in Moden entwickeln :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^{-n}$$
$$T = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{n+1}$$

und finden:

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_r r : b_{n-r} b_r :$$

wobei die Normalordnungsvorschrift für Fermionen durch:

$$\begin{aligned} : b_r b_s : \quad &= b_r b_s \text{ , falls } s \geq r \\ &= -b_r b_s \text{ , sonst} \end{aligned}$$

gegeben ist.

Anmerkung
Dies gilt für den Fall, dass man für das Feld antiperiodische Randbedingungen annimmt, was im Wesentlichen durch die statistische Physik motiviert ist und im Rahmen der konformen Feldtheorie auf die sogenannte Radiale Quantisierung führt. Eine ausführliche Beschreibung findet sich in „Conformal Field Theory" §6 für die radiale Quantisierung, §2, §5, §6 für das Fermion.

Es zeigt sich, dass das Fermionfeld ψ ein sogenanntes Primäres Feld ist, und mithin konform invariant. Es sei auf „Conformal Field Theory" und Schottenloher §9 verwiesen.
Für uns interessant ist hier der Kommutator der Koeffizienten L_n, welcher sich zu

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m} + \delta_{n,-m} \tfrac{1}{24} n(n^2 - 1)$$

berechnet.
Diese Relation definiert eine Virasoro Algebra! Die Virasoro Algebra steht, in (mehr oder weniger direkter) Verbindung mit den konformen Transformationen, und liefert somit einen Zusammenhang zwischen den konformen Deformationen des Raumes und den Feldern, deren Wirkung unter diesen invariant bleibt! Dies gilt allgemein für zweidimensionale konforme Feldtheorien.
Im nächsten Kapitel wird die Mathematik der Virasoro Algebra erläutert.

2 Virasoro Algebra

Wie bereits angemerkt, steht die Virasoro Algebra in direktem Bezug zu den konformen Transformationen. Diese Beziehung wird mittels der Witt Algebra klar, welche nun eingeführt werden soll. Es sei angemerkt, dass vieles was nur bis auf Isomorphie bzw Homöomorphie gilt als gleich angesehen wird.

2.1 Die Witt Algebra

Im Folgenden werden wir folgende Resultate der globalen Analysis brauchen, welche in „ The Convenient Setting of global Analysis" §42 & §43 bewiesen sind:

1. **Satz**
   Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $\mathrm{Diff}_+(M)$ die Gruppe aller orientierungserhaltenden Diffeomorphismen $\varphi : M \to M$. Dann gilt:

   - $\mathscr{C}^\infty(M,M)$ ist eine Mannigfaltigkeit über Vect(M), dem Vektorraum aller Vektorfelder mit kompaktem Träger auf M.
   - $\mathrm{Diff}_+(M)$ ist offen in $\mathscr{C}^\infty(M,M)$, und mithin eine Mannigfaltigkeit über Vect(M). Insbesondere ist $\mathrm{Diff}_+(M)$ eine Lie Gruppe über Vect(M), wenn wir die Räume mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz versehen.
   - $\mathit{Lie}\mathrm{Diff}_+(M) \cong \mathrm{Vect}(M)$, wobei $\mathit{Lie}\mathrm{Diff}_+(M)$ die Lie Algebra von $\mathrm{Diff}_+(M)$ bezeichne.

   Wir betrachten nun spezieller die Sphäre $\mathbb{S}^1$. Es gilt:

   $$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{S}^1) \cong \mathscr{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ und } f(x) = f(x+2\pi)\}$$

   Und da $\mathbb{S}^1$ eindimensional ist, lässt sich $X \in \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1)$ wie folgt darstellen:
   $X = f\frac{\partial}{\partial\vartheta}$, $f \in \mathscr{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$, wobei wir $z \in \mathbb{S}^1$ als $z = e^{i\vartheta}$ darstellen, und ϑ kanonisch als Karte auffassen. Formal ist bei so einer Identifizierung natürlich die Komplexifizierung von Vect($\mathbb{S}$) zu betrachten.
   Weiter lässt sich f in eine Fourier Reihe entwickeln:

   $$f(\vartheta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\vartheta n}$$

   und man somit findet folgende Basisvektoren für $\mathrm{Vect}(\mathbb{S}^1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$:

   $$\{\, e^{in\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \}_{n\in\mathbb{Z}}$$

   Definiere nun: $L_n := z^{1-n}\frac{\partial}{\partial z} = -ie^{-in\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$, $n \in \mathbb{Z}$. Wir können nun die Witt Algebra definieren, und, vor allem, ihren Bezug zu den konformen Transformationen verstehen:

2. **Definition (Witt Algebra)**
   Die Witt Algebra W ist die lineare Hülle der L_n über $\mathbb{C}$, versehen mit dem Kommutator als Lie Klammer. Also:

   $$\mathrm{W} := \mathbb{C}\{L_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

3. **Lemma**
   Seien L_n , $L_m \in$ W. Dann berechnet man:
   $$[L_n,L_m] = (n-m)L_{n+m}$$
   Womit auch klar ist, dass W, versehen mit [,], zu einer Lie Algebra über $\mathbb{C}$ wird.

   Der Bezug zu den konformen Abbildungen wird nun an folgendem Satz deutlich:

4. **Satz** (konforme Abbildungen in der Minkowski Ebene)
   Es gilt:
   $$\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^{1,1}) \cong \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}^1) \times \mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}^1),$$
   wobei Conf($\mathbb{R}^{1,1}$) die Gruppe aller konformen Abbildungen in der (konformen) Kompaktifizierung $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^{2,0} \times \mathbb{R}^{0,2}$ der Minkowski Ebene ist.
   Es muss natürlich gezeigt werden, dass es sich hierbei wirklich um eine Gruppe handelt. Dieser Beweis, und der des Satzes finden sich z.B. im Buch von Schottenloher §2

   Generelles zur konformen Kompaktifizierung findet sich hier.

   Die Witt Algebra ist also, salopp gesagt, die von den (komplexifizierten) Basiselementen der Lie Algebra der konformen Transformationen aufgespannte lineare Hülle (vgl Satz 1). Sie tritt somit in natürlicher Weise in der Beschreibung konformer Quantenfeldtheorien, die auf der Minkowski Ebene definiert sind, auf.
   Formal muss natürlich noch eine weitere Kopie der Witt Algebra hinzu genommen werden, um die zweite Gruppe $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}^1)$ zu berücksichtigen.
   Die Kommutatorrelation der Witt Algebra, und die in §1.3 gefundene Relation der Virasoro Algebra, sehen sich überraschend ähnlich, und stimmen offenbar für $n \neq -m$ überein. Es scheint also nicht abwegig zu vermuten, dass diese Algebren miteinander zusammenhängen und in der Tat ist dies der Fall, wie wir in den nächsten zwei Abschnitten sehen werden.

5. **Bemerkung** (Die Witt Algebra in der euklidischen Ebene)
   Im euklidischen Fall sind alle konformen Transformationen die holomorphen bzw antiholomorphen Funktionen.
   Das offensichtliche Problem ist nun, dass diese keine Gruppe bilden, das Konzept der Minkowski Ebene kann also nicht direkt auf die Euklidische Ebene übertragen werden. Dennoch taucht die Witt Algebra in euklidischen konformen Quantenfeldtheorien auf, und zwar als Erzeuger der <u>infinitesimalen</u> Transformationen. Wir wollen uns dies am Beispiel eines spinlosen Feldes klarmachen, welches sich trivial unter konformen Transformationen transformiert. (das heißt, wenn $\bar{\phi}$ das unter f transformierte Feld ist, so gilt: $\bar{\phi}(f(z)) = \phi(z)$)
   Eine ausführliche Behandlung findet sich in „Conformal Field Theory".
   Sei $f(z) = z + \varepsilon(z)$ eine infinitesimale konforme Transformation (also insbesondere holomorph).
   Sei nun ein Feld $\phi(z,\bar{z})$ gegeben, welches sich wie oben angegeben verhält. Dann zeigt sich, dass für das transformierte Feld $\tilde{\phi}$ gilt (wir lassen f und das korrespondierenden antiholomorphe Gegenstück wirken):
   $$\tilde{\phi}(f(z),\overline{f(z)}) = \phi(f(z),\overline{f(z)})) - \varepsilon(f(z))\partial_{f(z)}\phi - \varepsilon(\overline{f(z)})\partial_{\overline{f(z)}}\phi$$
   nutzt man nun aus, dass sich ε in einer Laurentreihe entwickeln lässt, so findet man folgende Erzeuger der Transformation:

$$L_n = -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} \text{ und } \overline{L_n} = -\bar{z}^{n+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

welche gerade die Kommutatorrelationen zweier kommutierender Witt Algebren erfüllen, d.h. $[L_n,\overline{L_m}] = 0$.
Dieses Transformationsverhalten erscheint auf den ersten Blick sehr natürlich, da es im Wesentlichen einer Taylor Entwicklung bis zur ersten Ordnung in der holomorphen und antiholomorphen Komponente entspricht, was man vlt intuitiv unter der Wirkung „infinitesimaler" Transformationen verstehen würde.
Im Folgenden wollen wir die Witt Algebra jedoch wie in Definition 2 betrachten.
Es zeigt sich, dass auch diese im Bezug zu euklidischen Quantenfeldtheorien steht (was man zunächst nicht vermuten würde). Wir kommen später darauf zurück.

Um den Bezug zwischen der Witt Algebra und der Virasoro Algebra herzustellen bedarf es einiger technischer Hilfsmittel aus der Theorie der Lie Algebren.

2.2 Zentrale Erweiterungen von Lie Algebren

Im Folgenden seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ Lie-Algebren, weiter sei $\mathfrak{a}$ abelsch (d.h. die Lie Klammer ist trivial) und sei mit $\hom_{\mathrm{LIE}}(X,Y)$ die Menge aller Lie-Algebren Homomorphismen von einer Lie Algebra X in eine Lie Algebra Y notiert.

1. **Definition** (zentrale Erweiterung)
   Eine zentrale Erweiterung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ vermöge der abelschen Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ ist eine kurze exakte Sequenz von Lie-Algebra Homomorphismen:

   $$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

   derart, dass $[X,Y] = 0, \forall X \in im(\alpha), \forall Y \in \mathfrak{h}$ gilt.

   Konvention
   Wir sagen in der obigen Situation: $\mathfrak{h}$ ist eine zentrale Erweiterung von $\mathfrak{g}$ vermöge $\mathfrak{a}$.

2. **Definition / Lemma** (triviale Erweiterung)
   Gegeben sei eine zentrale Erweiterung $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ wie oben. Diese Erweiterung heißt trivial, falls es ein $\beta \in \hom_{\mathrm{LIE}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ gibt, mit: $\pi \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, da die zentrale Erweiterung dann äquivalent ist zu folgenden kurzen exakten Sequenz:

   $$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathfrak{g} \to 0$$

   wobei ι die Inklusion und pr die Projektion ist. Das heißt:
   $\exists\ [\phi : \mathfrak{h} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}] \in \hom_{\mathrm{LIE}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g})$ derart, dass: $\alpha = \phi \circ \iota$ und $\pi = \mathrm{pr} \circ \phi$ gilt. (ganz analog definiert man die Äquivalenz zweier zentraler Erweiterungen)

3. **Definition** (Kozykel)
Eine Abbildung $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ heißt Kozykel, falls:

- Θ ist bilinear und alternierend
- $\Theta(X,[Y,Z]) + \Theta(Y,[Z,X]) + \Theta(Z,[X,Y]) = 0$

Wir wollen das Kapitel mit folgendem Lemma schließen, was uns auch letztlich den Bezug zwischen der Virasoro Algebra und der Witt Algebra herstellt:
Die Virasoro Algebra ist eine nichttriviale zentrale Erweiterung von W (Dies werden wir allerdings erst im nächsten Kapitel sehen).

4. **Satz**
Jeder Kozykel $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ erzeugt eine zentrale Erweiterung $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ vermöge $\mathfrak{a}$.
Es gilt dann: $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{h}$ ist mit der Lie Klammer

$$[X \oplus Z, Y \oplus Z']_{\mathfrak{h}} = [X,Y]_{\mathfrak{g}} \oplus \Theta(X,Y)$$

versehen.
Weiter ist die von Θ erzeugte zentrale Erweiterung genau dann trivial, wenn es ein $\mu \in \hom_{\mathrm{LIE}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ gibt, so dass:

$$\Theta(X,Y) = \mu([X,Y]), \forall X,Y \in \mathfrak{g}$$

Ein Beweis findet sich z.B. im Buch von Schottenloher §4

2.3 Die Virasoro Algebra

1. **Satz**
Die lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \omega : \mathrm{W} \times \mathrm{W} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (L_n, L_m) &\mapsto \delta_{n,-m} \tfrac{n}{12}(n^2 - 1) \end{aligned}$$

definiert eine nichttriviale zentrale Erweiterung von W vermöge $\mathbb{C}$, und diese ist bis auf Äquivalenz eindeutig.

Wir geben hier nur die Beweisidee an, der gesamte Beweis kann in Schottenloher §5 nachgelesen werden.
Beweisidee
zeige:

(a) $\omega \in \{\Theta : \mathrm{W} \times \mathrm{W} \to \mathbb{C} \mid \Theta \text{ ist ein Kozykel}\} =: \mathrm{Z}^2$
Dies rechnet man nach.

(b) $\omega \notin \{\Theta : \mathrm{W} \times \mathrm{W} \to \mathbb{C} \mid \exists \mu \in \hom_{\mathrm{LIE}}(\mathrm{W}, \mathbb{C}), \text{mit: } \Theta = \tilde{\mu}\}$
wobei $\tilde{\mu}(X,Y) = \mu([X,Y])$ gilt.
Dies zeigt man mittels Widerspruchsbeweis und somit folgt nach Satz 4, §2.2, dass ω nicht trivial sein kann.

(c) Sei $\Theta \in \mathrm{Z}^2$. Dann gilt: $\exists c \in \mathbb{C}$ mit: $\exists \mu \in \hom_{\mathrm{LIE}}(\mathrm{W}, \mathbb{C})$, so dass $c \cdot \omega = \Theta + \tilde{\mu}$ gilt. Hieraus folgt die Eindeutigkeit, wie man sich mittels des kanonischen Isomorphismus klar macht.

2. **Definition (Virasoro Algebra)**
Die Virasoro Algebra $\mathfrak{vir}$ ist die eindeutige Zentrale Erweiterung der Witt Algebra (vermöge $\mathbb{C}$), das heißt:

$$\mathfrak{vir} := \mathrm{W} \oplus \mathbb{C} \cdot c$$

$c \in \mathbb{C}$ wird auch die zentrale Ladung der Virasoro Algebra genannt, wobei jedes c eine äquivalente Darstellung von $\mathfrak{vir}$ liefert, und für die Lie Klammer gilt:

- $[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{n,-m} \frac{n}{12}(n^2-1)c$
- $[L_n, c] = 0$

Bemerkung:

- Die Virasoro Algebra, welche in der Beschreibung des masselosen freien Fermion auftritt, besitzt Zentrale Ladung $c = \frac{1}{2}$ (vgl §1.3)
- Auch das masselose freie Boson kann als konforme Quantenfeldtheorie verstanden werden. Die hier auftretende Virasoro Algebra besitzt die Zentrale Ladung $c = 1$

Wie bereits angemerkt, findet sich die Virasoro Algebra in jeder konformen Quantenfeldtheorie wieder. Im euklidischen Fall lassen sich diese Feldtheorien durch die Osterwalder - Schrader Axiome charakterisieren. Es gibt dann ein Theorem von Lüscher und Mack, welches die Virasoro Algebra in die Theorie mit einbezieht. Zumindest ein Teil dieses umfangreichen Programmes soll im nächsten Kapitel vorgestellt werden.

3 Axiomatische Konforme Quantenfeldtheorie

Vorbemerkungen
Wir werden uns hier auf die Aspekte beschränken, welche für die Virasoro Algebra wesentlich sind. Ein umfassende Abhandlung findet sich in Schottenloher §9, und für die Beweise sei hierauf verwiesen.
Weiter beschränken wir uns von nun an auf die euklidische Ebene $\mathbb{R}^{2,0}$. Die Operatoren bzw Felder sind Funktionen $\Phi_i : \mathbb{C} \to \mathcal{O}(\mathcal{H})$ von der Ebene in den Raum der (unbeschränken) Operatoren eines festen Hilbertraums. Es sei $i \in B_0$ wobei B_0 eine abzählbare Indexmenge ist. Wir identifizieren kanonisch $\mathbb{R}^{2,0} = \mathbb{C}$ und schreiben $z = t + iy$, wobei, natürlich physikalisch motiviert, t für die Zeit und y für die Raumkoordinate steht.
Es sei an dieser Stelle an den im letzten Semester erarbeiteten Zusammenhang zwischen den Wightman und Schwinger Funktionen erinnert, wonach sich die Schwinger Funktionen (welche auf dem euklidischen Raum definiert sind) in direkten Bezug zu den N-Punkt Funktionen und Feldern einer skalaren Quantenfeldtheorie auf einem Hilbertraum setzten lassen.
Zum Skript geht es hier.
Unsere Definition in §1.3 weist das offensichtliche Problem auf, dass sie nur für Felder mit Lagrange Dichte gilt.
Das Ziel der axiomatischen konformen Feldtheorie ist es, die Theorie nur vermöge der N-Punkt Funktionen zu beschreiben, also losgelöst von der Lagrange Dichte. Wir wollen im Folgenden die N-Punkt Funktionen, losgelöst von der Physik, als eine Familie $(G_i)_{i\in B}, B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} B_0^n$, stetiger und polynomial beschränkter Funktionen $G_i : \mathbb{C}^{|i|} \to \mathbb{C}$ betrachten, wobei wir den Index $i = (i_1,...,i_n) \in B_0^n$ gesetzt haben.

3.1 Osterwalder Schrader Axiome

Im Wesentlichen fordert man für die G_i wie schon im letzten Semester:

(I) Permutationssymmetrie
(II)Reflexionspositivität

Die erste Forderung, welche eine konforme QFT von einer Euklidischen unterscheidet, ist nun:

(III) Euklidische und Skalen-Kovarianz

$\forall i \in B_0\ \exists$ sogenannte <u>konforme Gewichte</u> h_i und $\bar{h_i} \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle euklidischen Transformationen w, für alle Dilatationen $w(z) = e^{\tau z}, \tau \in \mathbb{R}$ und für alle $n \geq 1$ gilt:

$$G_{i_1,...,i_n}(z_1,\bar{z}_1,...,z_n\bar{z}_n) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial z}(z_j)\right)^{h_{i_j}} \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}(z_j)\right)}^{\bar{h_{i_j}}} G_{i_1,...i_n}(w_1,\bar{w_1},...,w_n,\bar{w_n})$$

wobei wir $w_i = w(z_i)$, $\bar{w}_i = \overline{w(z_i)}$ gesetzt haben.

Bemerkung(Das masselose freie Fermion)
Für das masselose freie Fermion gilt $h = \frac{1}{2}$ (hier sehen wir, dass sich das Fermionfeld nichtrivial unter konformen Transformationen verhält).

Dies schränkt die 2-Punkt Funktionen stark ein:

1. **Lemma**:
Jede 2−Punkt Funktion, die die Axiome (I) bis (III) erfüllt ist von der Form:

$$G_{i,j}(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2) = \frac{C_{ij}}{(z_1-z_2)^{-(h_i+h_j)}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{-(\bar{h}_i+\bar{h}_j)}}$$

für eine geeignete Konstante $C_{ij} \in \mathbb{C}$.

Bemerkung
Aus den obigen Axiomen lassen sich Hilbertraum $\mathscr{H}$ und Feldoperatoren Φ_i rekonstruieren, analog zur Wightman Rekonstruktion.

Weiter fordert man die Existenz eines Energie Impuls Tensors (vlg diese Forderungen und das folgende Theorem mit den in §1.2 gefundenen Eigenschaften!):

(IV)Existenz des Energie-Impuls Tensors

unter den Feldern Φ_i existieren vier Felder $T_{\mu\nu}$, $\mu\nu \in \{0,1\}$ mit den Eigenschaften:

(i) $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ und $T^*_{\mu\nu}(z) = T_{\mu\nu}(\vartheta(z))$
wobei $\vartheta(z) = -\bar{z}$.
(ii) $\partial_t T_{\mu 0} + \partial_y T_{\mu 1} = 0$
(iii) $h_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} = 2$, und für den (konformen) Spin $s_i := h_i - \bar{h}_i$ gilt:
$s(T_{00} - T_{11} \pm 2iT_{01}) = \pm 2$

Die Virasoro Algebra findet sich nun wie folgt in der axiomatischen Beschreibung konformer Feldtheorien wieder:

2. **Theorem** (Lüscher-Mack)

Die Axiome (I) bis (IV) implizieren:
(i) tr($T_{\mu\nu}$) = 0. Hieraus folgt insbesondere:
$T := T_{00} - iT_{01}$ ist holomorph, und $\overline{T} := T_{00} + iT_{01}$ ist antiholomorph.
(ii) Die über

$$L_{-n} := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1} \mathrm{d}\zeta \frac{T(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \text{ ,und } \overline{L}_{-n} := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1} \mathrm{d}\zeta \frac{\overline{T}(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$$

definierten Operatoren auf $\mathscr{H}$ erfüllen die Kommutatorrelationen zweier kommutierender Virasoro Algebren mit zentraler Ladung c:

$$[L_n,L_m] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{n,-m}\tfrac{c}{12}n(n^2-1)$$
$$[\overline{L}_n,\overline{L}_m] = (n-m)\overline{L}_{n+m} + \delta_{n,-m}\tfrac{c}{12}n(n^2-1)$$
$$[L_n,\overline{L}_m] = 0$$

3. **Korollar**

Es gilt:

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-(n+2)} \text{ und } \overline{T}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{L}_n \bar{z}^{-(n+2)}$$

Bemerkung
Die obige Virsaoro Algebra lässt sich am besten darstellungstheorietisch verstehen. Es sei auf §6 Schottenloher verwiesen.
Die Darstellungstheorie basiert auf der Virasoro Algebra welche wir in §2 eingeführt hatten, steht also insbesondere im Bezug zur Witt Algebra, und damit im Bezug zu der Konformen Gruppe der

Minkowski Ebene.
In diesem Sinne lässt sich ein Zusammenhang zwischen konformen Transformationen des Minkowski Raumes und konform invarianten euklidischen Quantenfeldtheorien finden.