

# Konstruktion des Gross-Neveu-Modells

## 1 Vorbemerkungen

Das Gross-Neveu-Modell [GN74] ist die Verallgemeinerung des Thirring-Modells auf  $N$ -komponentige Fermionen  $\psi_a$ . Es zeigt asymptotische Freiheit (die skalenabhängige Kopplungskonstante konvergiert bei hoher Energie gegen 0) und dynamischen Masseerzeugung (auch wenn man zunächst ohne Masseterm startet, entsteht das entsprechende Verhalten der Korrelationsfunktionen als Renormierungseffekt) ähnlich wie in der QCD. Das Gross-Neveu Modell (mit explizitem Masseterm) wurde in [GK85, FMRS86] unter Verwendung der Cluster-Entwicklung konstruiert, die jedoch schwer nachzuvollziehen ist. Später haben Disertori-Rivasseau eine Konstruktion ausgearbeitet [DR00], die die Cluster-Entwicklung vermeidet und stattdessen die BKAR-Waldformel [AR95] nutzt. Wir folgen dieser Arbeit. Ein abgerüstetes Spielzeug-Modell wird in [Dis06] behandelt.

## 2 Fermionische Integrale

Wir beginnen mit der regularisierten Euklidischen Wirkung in einem endlichen Volumen  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  und Energie-cut-off  $\Lambda_0$ . Die Wirkung an der Ausgangsskala  $\Lambda_0$  wird durch nackte Parameter  $m_0, \lambda_0, Z_0$  parametrisiert, die von den renormierten Parametern  $m, \lambda$  sowie der Skala  $\Lambda_0$  und einer Renormierungsskala  $\Lambda$  abhängen. Letztere kann im Fall  $m \neq 0$  zu  $\Lambda = 0$  gesetzt werden, nicht jedoch für  $m = 0$ . Wir starten mit

$$S = \int_V dx \left( \sum_a i Z_0 \bar{\psi}_a(x) \gamma^\mu \partial_\mu^{(\Lambda, \Lambda_0)} \psi_a(x) + m_0 \bar{\psi}_a(x) \psi_a(x) + \frac{\lambda}{N} \left( \sum_a \bar{\psi}_a(x) \psi_a(x) \right)^2 \right). \quad (2.1)$$

Dabei symbolisiert ist  $\partial^{(\Lambda, \Lambda_0)}$ , daß die zugehörige Kovarianz (=Propagator) von den Skalen abhängt:

$$C_\Lambda^{\Lambda_0}(x - y) = \pi \int_{\Lambda_0^{-2}}^{\Lambda^{-2}} d\alpha \left( i \frac{\not{x} - \not{y}}{2\alpha^2} + \frac{m}{\alpha} \right) e^{-\alpha m^2 - |x-y|^2/(4\alpha)}, \quad (2.2)$$

wobei  $\not{x} = \gamma^\mu x_\mu$ . Diese Kovarianz wird mit der renormierten Masse gebildet und definiert das Berezin-Maß  $d\mu_C$  (s.u.). Die Differenzen  $\delta m = m_0 - m$  und  $\delta Z = Z_0 - 1$  parametrisieren neue Wechselwirkungsvertices.

Die Felder  $\psi_a$  werden auch im Euklidischen als antikommutierend (Graßmannwertig) angesehen. Damit gilt  $\psi^2 = 0$  für jede Spin-Komponente  $\psi$ , folglich die

exakte Taylor-Entwicklung  $F(\psi) = F(0) + \psi F'(0)$ . Deshalb genügt die Integration linearer Funktionen durch das Berezin-Integral

$$\int d\psi (c_0 + c_1\psi) := c_1 .$$

Diese Definition führt bei  $N$  verschiedenen Grassmann-Feldern (und deren Konjugierten) und eine invertierbare  $N \times N$ -Matrix  $A$  auf

$$\int d\bar{\psi}_1 d\psi_1 \dots d\bar{\psi}_N d\psi_N e^{-\bar{\psi} A^{-1} \psi} = \det A^{-1} . \quad (2.3)$$

Das nächstkompliziertere Integral ist

$$\frac{1}{\det A^{-1}} \int d\bar{\psi}_1 d\psi_1 \dots d\bar{\psi}_N d\psi_N e^{-\bar{\psi} A^{-1} \psi} \psi_k \bar{\psi}_l = A_{kl} , \quad (2.4)$$

was letztlich nichts anderes ist als die Darstellung der Matrixelemente  $A_{kl}$  durch die Komplementärmatrix von  $A^{-1}$ . Diese Formel läßt sich kombinatorisch begründen; durch Verallgemeinerung dieser Kombinatorik zeigt man

$$\frac{1}{\det A^{-1}} \int d\bar{\psi}_1 d\psi_1 \dots d\bar{\psi}_N d\psi_N e^{-\bar{\psi} A^{-1} \psi} \psi_{k_1} \bar{\psi}_{l_1} \psi_{k_2} \bar{\psi}_{l_2} = \det \begin{pmatrix} A_{k_1 l_1} & A_{k_1 l_2} \\ A_{k_2 l_1} & A_{k_2 l_2} \end{pmatrix} . \quad (2.5)$$

Diese Formel überträgt sich auf beliebig viele Produkte, und diese Verallgemeinerung kann als Definition des Berezin-Maßes  $\mu_C$  zur Kovarianz  $C$  angesehen werden:

$$\int d\mu_C(\psi, \bar{\psi}) \prod_{i=1}^n (\psi(x_i) \bar{\psi}(y_i)) = \det \begin{pmatrix} C(x_1, y_1) & C(x_1, y_2) & \dots & C(x_1, y_n) \\ C(x_2, y_1) & C(x_2, y_2) & \dots & C(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(x_n, y_1) & C(x_n, y_2) & \dots & C(x_n, y_n) \end{pmatrix} . \quad (2.6)$$

Nach Einführung von Quellen  $\bar{J}, J$  (diese sind unabhängig voneinander!) läßt sich die Zustandssumme

$$\mathcal{Z}[J, \bar{J}] = \int d\mu_{C_\Lambda^{\Lambda_0}}(\psi, \bar{\psi}) e^{-S_{int}(\psi, \bar{\psi}) + \int_V dy \bar{J}(y)\psi(y) + \int_V dy \bar{\psi}(z)J(z)} \quad (2.7)$$

in eine Reihe nach Determinanten entwickeln mit Einträgen in den Matrixelementen (Farbe und Spin) der Kovarianzen  $\delta_{ab} C_\Lambda^{\Lambda_0}(x-y)$  und  $\delta_{ab} C_\Lambda^{\Lambda_0}(x-y)$  (s.u.), integriert gegen die Quellen  $J(y_i), \bar{J}(z_j)$  und über die Orte der Wechselwirkungsvertices zu Kopplungskonstanten  $\frac{\lambda}{N}, \delta m, \delta Z$ . Die Ableitung am Vertex zu  $\delta Z$  wird partiell integriert und liefert die Kopplung dieses Vertex an eine zweite Kovarianz

$$C_\Lambda^{\Lambda_0}(x-y) = \int_{\Lambda_0^{-2}}^{\Lambda^{-2}} d\alpha \left( \frac{|x-y|^2}{4\alpha^3} + \frac{im(\not{x} - \not{y})}{2\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha m^2 - |x-y|^2/(4\alpha)} . \quad (2.8)$$

Die Ausmultiplikation der Determinante nach Leibniz liefert die übliche Störungstheorie-Darstellung des Gross-Neveu-Modells. Die Konstruktive Renormierung geht hier anders vor.

### 3 Gram-Matrizen

Seien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf einem unitären Vektorraum  $H$  und  $(f_i)_{i=1,\dots,L}$  und  $(g_i)_{i=1,\dots,L}$  Familien von Vektoren aus  $H$ . Bilde die  $n \times n$ -Matrix  $G(f, g)$  mit  $(G(f, g))_{ij} := \langle f_i, g_j \rangle$ . Matrizen mit gleichen Familien sind offenbar hermitesch und heißen *Gram-Matrizen*  $G(f, f)$ . Diese sind positiv semidefinit, und umgekehrt läßt sich jede positiv semidefinite hermitesche Matrix als  $G(f, f)$  auffassen. Es folgt  $\det G(f, f) \geq 0$ . Für reelle  $H$  berechnet  $\sqrt{\det G(f, f)}$  das Volumen des durch  $f_i$  aufgespannten Polytops. Damit ergibt sich die (auch im Komplexen richtige) *Hadamard-Ungleichung*

$$\det G(f, f) \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|^2. \quad (3.1)$$

Auch wenn die Determinante nur multi-linear ist, folgt dennoch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\det G(f, g)|^2 \leq \det G(f, f) \det G(g, g) \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|^2 \prod_{j=1}^n \|g_j\|^2, \quad (3.2)$$

die in ihrer letzteren Form *Gram-Ungleichung* heißt.

Ein zentraler Schritt der Konstruktion besteht darin zu zeigen, daß in der Zustandssumme die Matrix unter der Determinante als  $G(f, g)$  geschrieben werden kann. Damit gilt statt der naiven Abschätzung  $|\det G(f, g)| \leq L!(\sup_{i,j} |G(f_i, g_j)|)^L$  aus der Leibniz-Formel eine sehr viel bessere nur durch  $L$ -te Potenzen. Für die regularisierte Theorie folgt damit (wegen des  $\frac{1}{n!}$ -Vorfaktors aus der Entwicklung von  $\exp(-S_{int})$ ) sogar die absolute Konvergenz für beliebige Kopplungskonstanten, während wegen  $L \sim 2n$  die naive Abschätzung nicht konvergiert. Für die (partiell) renormierte Theorie muß das abgeschwächt werden, man bekommt (mit Aufwand!) Konvergenz für genügend kleine Kopplungskonstanten. Geht man zu üblichen renormierten Kopplungen über, so liefern die Renormalons einen zusätzlichen  $n!$ -Faktor, so daß Borel-Summierbarkeit verbleibt.

### 4 Waldformel

Die Renormierung erfordert Kenntnis der Zusammenhangskomponenten, also der Waldstruktur. Im Hinblick auf die Anwendung der BKAR-Waldformel werden die Kovarianzen nichtzusammenfallender Punkte (d.h. keine Tadpole-Linien) ersetzt

durch

$$C_{\Lambda}^{\Lambda_0}(x-y, w) := \pi \int_{\Lambda_0^{-2}(w)}^{\Lambda^{-2}} d\alpha \left( i \frac{x-y}{2\alpha^2} + \frac{m}{\alpha} \right) e^{-\alpha m^2 - |x-y|^2/(4\alpha)}, \quad (4.1)$$

$$\Lambda_0^{-2}(w) := \Lambda^{-2} + w(\Lambda_0^{-2} - \Lambda^{-2}).$$

Analog für  $C_{\Lambda}^{\Lambda_0}(x-y, w)$ . Offenbar gilt  $C_{\Lambda}^{\Lambda_0}(x-y, 1) = C_{\Lambda}^{\Lambda_0}(x-y)$  (ursprüngliche Kovarianz) und  $C_{\Lambda}^{\Lambda_0}(x-y, 0) = 0$ . Sei  $\text{Det} = \text{Det}(1, \dots, 1)$  die fermionische Determinante in der Entwicklung der Zustandssumme, wobei sich die Argumente  $w_i = 1$  auf die  $w$ -Parameter in den Kovarianzen beziehen. Die BKAR-Waldformel liefert nun

$$\text{Det}(1, \dots, 1) = \sum_F \int_0^1 \left( \prod_{i \leftrightarrow j \in F} dw_{ij} \right) \left( \frac{\partial^{L(F)} \text{Det}}{\prod_{i \leftrightarrow j \in F} \partial x_{ij}} \right) (v_{12}^F(w), v_{13}^F(w), \dots, v_{n-1, n}^F(w)), \quad (4.2)$$

mit Summierung über die Wälder  $F$  und  $v_{ij}^F(w)$  als minimales  $w_{kl}$  entlang des Pfades (falls existent; sonst  $v_{ij}^F(w) = 0$ ) zwischen den Vertices  $i, j$ . Aus der Multilinearität der Determinante und dem Laplaceschen Entwicklungssatz folgt sofort:

$$\frac{\partial^{L(F)} \text{Det}}{\prod_{i \leftrightarrow j \in F} \partial x_{ij}} = \pm \left( \prod_{i \leftrightarrow j \in F} \partial_w C_{\Lambda}^{(\prime)\Lambda_0}(x_i - y_j, w) \right) \cdot \text{Det}_F \quad (4.3)$$

wobei  $\text{Det}_F$  jener Minor ist, der aus der ursprünglichen Matrix durch Weglassen der Zeilen und Spalten entsteht, in denen die  $C_{\Lambda}^{(\prime)\Lambda_0}(x_i - y_j)$  des Waldes  $F$  vorkamen. Die Ableitungen  $\partial_w C_{\Lambda}^{(\prime)\Lambda_0}(x_i - y_j, w)$  können leicht abgeschätzt werden (es gibt kein  $\alpha$ -Integral mehr!).

Wegen der  $v_{ij}^F(w) = 0$  für nichtzusammenhängende Vertices faktorisiert die Determinante  $\text{Det}_F$  in ein Produkt von Determinanten  $\text{Det}_T$  über die Bäume  $T$  des Waldes  $F$ . Nach einem fundamentalen Theorem der Kombinatorik ist der Logarithmus eines Funktionals, das in eine Summe über Wälder faktorisiert, nichts anderes als die Einschränkung auf eine Summe über Bäume. Damit hat der Logarithmus der Zustandssumme, welcher die zusammenhängenden Graphen generiert, die gleiche Determinanten-Darstellung, nur daß über die (zusammenhängenden!) Bäume zu summieren ist und nicht über die Wälder. Von fundamentaler Bedeutung ist nun, daß alle verbleibenden Schleifen-Linien *in einer Determinante zusammengefaßt bleiben*. Dadurch lassen sich Abschätzungen für die Determinante  $\text{Det}_T$  als ganzes gewinnen, die extrem viel besser sind als naive Schranken aus der Leibniz-Formel.

## 5 Bandstruktur

Jeder Punkt  $w_1 < \dots < w_{n-1}$  des Integrationsgebietes  $[0, 1]^{n-1}$  definiert eine Zerlegung der  $\alpha$ -Integrale in den Kovarianzen in  $n$  Bänder  $[\Lambda_0(0), \Lambda_0(w_1)]$ ,

$\dots, [\Lambda_0(w_{n-2}), \Lambda_0(w_{n-1})]$ . In den Minoren  $\text{Det}_T$  verbleiben ausschließlich die Kovarianzen der Schleifenlinien  $\ell$ , und diese liegen in den Bändern unterhalb  $\Lambda_0(v_{a_\ell \leftrightarrow b_\ell}^T(w))$ , wobei  $v_{a_\ell \leftrightarrow b_\ell}^T(w)$  der kleinste der  $w$ -Parameter entlang des Pfades in  $T$  zwischen den Anfangs- und Endpunkten  $a_\ell, b_\ell$  von  $\ell$  ist.

Nach Multilinearität gibt es eine Zerlegung  $\text{Det}_T = \sum_{\mu} \det(\mathcal{M}(\mu))$  nach Zuordnungen von Bandindizes  $\{1, \dots, n\}$  zu jeder Schleifenlinie. Jede Wahl der Zuordnung definiert eine Inklusionskette von Teilgraphen, die durch den Galavotti-Nicoló-Baum beschrieben wird. Für jede Zusammenhangskomponente wird der Divergenzgrad bestimmt und gegebenenfalls ein quasi-lokaler Subtraktionsterm einerseits subtrahiert und andererseits durch Redefinition der effektiven Kopplungskonstanten addiert. Durch Umordnung dieser Störungsreihe entsteht eine im Limes  $\Lambda_0 \rightarrow \infty$  wohldefinierte Entwicklung nach skalenabhängigen Kopplungskonstanten. Problematisch ist jedoch, daß wegen der Kardinalität  $n!$  aller  $\mu$  erneut ein gefährlicher Faktor erzeugt wird. Deshalb wird  $\text{Det}_T$  nicht nach allen Zuordnungen  $\mu$  entwickelt, sondern äquivalente Zuordnungen werden zu Paketen von Ketten zusammengefaßt. Der Hintergrund ist, daß Zusammenhangskomponenten des Galavotti-Nicoló-Baums mit  $\geq 5$  äußeren Halblinien konvergent sind. Da in diesem Fall nichts zu subtrahieren ist, ist die Skalenzuordnung völlig egal, d.h. alle Skalenzuordnungen können gemeinsam behandelt werden. Graphen mit  $< 5$  äußeren Halblinien divergieren. Die Divergenzstruktur ändert sich mit absteigender Skalenzuordnung nur dann, wenn weitere äußere Halblinien hinzukommen. Auf diese Weise entsteht eine Korrespondenz zwischen Divergenzgrad, äußeren Schleifen-Halblinien  $a$  (das sind die halben Kovarianzen in  $\text{Det}_T$ ) und Skala  $i$ , die in einer Kette  $C_{ai}$  kodiert wird. Es wird gezeigt, daß deren Zahl nur mit  $K^n$  wächst (wobei  $K < 3^{15}$ ).

Jeder Summand der Waldformel ist charakterisiert durch

- Spezifizierung eines Baumes  $T$  zwischen allen Vertices,
- Ordnung  $<_T$  der Linien von  $T$  entsprechend der Ordnung  $w_1 < \dots < w_{n-1}$  der Integrationsvariablen  $w_{ij}$  zu  $i \leftrightarrow j \in T$ .

Die Kovarianzen in der Determinate  $\text{Det}_T$ , um deren Skalenzuordnungen  $\mu$  es geht, werden als Halblinien  $\{a\}$  an die jeweiligen Vertices von  $T$  angeheftet. Die Ordnung  $<_T$  definiert nun einen neuen binären Wurzelbaum  $R_T$ , dessen innere Knoten die geordneten Linien von  $T$  sind dessen Blätter die Vertices von  $T$  sind:

- i) Wähle die Linie  $\ell_1$  von  $T$  mit kleinstem  $w_{\ell_1}$  als Wurzel.
- ii) Nach Entfernen von  $\ell_1$  zerfällt  $T$  in zwei Zusammenhangskomponenten  $T_1, T_2$ , möglicherweise nur aus einem Vertex bestehend.
- iii) Ist  $T_i$  ein einzelner Vertex, so verbinde ihn als Blatt mit der Wurzel.
- iv) Ansonsten gibt es eine Linie  $\ell_2$  in  $T_i$  mit kleinstem  $w_{\ell_2}$ ; dieses wird die neue Wurzel von  $T_i$ . Verbinde sie mit der Wurzel  $\ell_1$ .

v) Iteration des Verfahrens liefert  $R_T$ .

Die Halblinien  $\{a\}$  sind an den Blättern von  $R_T$  angeheftet. Sei  $i \in R_T$  ein innerer Knoten  $i \in R_T$  (=Kante von  $T$ ) und  $i_-$  der nächstniedrigere Knoten in  $R_T$  auf dem Weg zur Wurzel von  $R_T$ . Wir assoziieren zu  $i$  einen zusammenhängenden Teilgraphen  $g_i$  von  $R_T$  bestehend aus der

- Menge der inneren Knoten  $j \geq i$  in der Zusammenhangskomponente oberhalb  $i$ , zusammen mit ihren Verbindungskanten,
- Menge jener Blattvertices  $v_a$  (=Vertices von  $T$ ), an denen äußere Schleifen-Halblinien mit Skala  $\mu(a) \geq i_- + 1$  angeheftet sind (mit Verbindungskante).

Dann bestehen die äußeren Halblinien von  $g_i$  aus:

- der Teilmenge  $ee_i$  der äußeren Linien des ursprünglichen Graphen (damit von  $T$ ), die an  $g_i$  angeheftet sind. Ihre Skala ist definitionsgemäß die Renormierungsskala  $\Lambda$ , also  $\mu = 1$ .
- der Teilmenge  $et_i$  der von  $i$  aus nach unten reichenden Linien von  $R_T$  (sollte für die Wurzel leer sein und sonst aus einem Element bestehen).
- der Teilmenge  $el_i$  der Schleifenhalblinien  $a$ , die an einem mit  $i$  zusammenhängenden Blattvertex  $v_a$  oberhalb  $i$  angeheftet sind, aber eine Skala  $\mu(a) \leq i_-$  haben.

Geht man also von  $i$  aus nach oben, so wird sich die Menge  $el_i$  als Funktion von  $i$  vergrößern,  $ee_i$  verkleinern (oder gleich bleiben).

Als Ketten  $C_{ai}$  in den Paketen  $\mathcal{P}$  werden jetzt rekursiv gewisse Pfade in  $R_T$  zwischen  $a \in el_i$  und  $i$  gewählt. Diese Wahl ist abhängig von den Skalenzuordnungen  $\mu(a)$  und definiert deshalb eine Abbildung  $\phi : \{\mu\} \rightarrow \mathcal{P}$ . Die Konstruktion von  $\phi$  reflektiert den Divergenzgrad. Ein Teilgraph  $g_i$  ist im Gross-Neveu-Modell genau dann divergent und damit quasi-lokal, wenn er  $|ee_i| + |et_i| + |el_i| \leq 4$  äußere Linien kleinerer Skala hat.

- Sei zunächst  $i$  die Wurzel in  $R_T$ , somit  $|et_i| = 0$ . Ist  $|el_i| < 5 - |ee_i| - |et_i|$ , dann ist  $g_i$  divergent, und die  $c_i = |el_i| < 5$  Ketten  $C_{ai}$  zu jedem  $a \in el_i$  gehören zu  $\mathcal{P}$ . Ist  $|el_i| \geq 5 - |ee_i| - |et_i|$ , dann ist  $G_i$  konvergent, und wir wählen die ersten  $c_i := \max(0, 5 - |ee_i| - |et_i|) \leq 5$  der äußeren Schleifenhalblinien  $a$  (bezüglich der zyklischen Ordnung von  $R_T$ ) als Startpunkte von in  $i$  endenden Ketten  $C_{ai}$ .
- Gehe zum nächsten Knoten  $i$  in  $R_T$  (bezüglich der zyklischen Ordnung). Dann zerlegt sich  $el_i = el'_i \cup el''_i$  in die Menge der  $c'_i = |el'_i| \leq 5$  Schleifenhalblinien, die bereits eine Kettenzuordnung zu einem in  $R_T$  tieferen Knoten  $i'$  haben, und das Komplement. Ist  $|el''_i| < 5 - |ee_i| - |et_i| - c'_i$ , dann ist  $g_i$  divergent, und die  $c_i = |el''_i| < 5$  Ketten  $C_{ai}$  zu jedem  $a \in el''_i$  gehören zu  $\mathcal{P}$ . Ist  $|el''_i| \geq 5 - |ee_i| - |et_i| - c'_i$ , dann ist  $g_i$  konvergent, und

wir wählen die ersten  $c_i := \max(0, 5 - |ee_i| - |et_i| - c'_i) \leq 5$  der äußeren Schleifenhalblinien (bezüglich der zyklischen Ordnung) als Startpunkte von in  $i$  endenden Ketten  $C_{ai}$ .

- Iteration liefert eine Zuordnung  $a \mapsto i$  für eine Teilmenge der Schleifenhalblinien. Verbleiben an den Blättern nichtzugeordnete  $a$ , so sind die Blattgraphen konvergent, und ihre Skalen spielen keine Rolle.

Insgesamt entsteht eine durch  $R_T$  und  $\{\mu\}$  eindeutig bestimmte Familie  $\mathcal{P}$  von Ketten. Offenbar gehen durch einen inneren Knoten  $i$  maximal 5 Ketten, und eine äußere Halblinie  $a$  kommt in höchstens einer Kette vor. Nennen wir jetzt  $\mathcal{C}$  die Klasse aller überhaupt möglichen Ketten mit dieser Eigenschaft. Da die Anzahl aller disjunkten Ketten nur mit  $K_1^n$  wächst, besteht  $\mathcal{C}$  aus höchstens  $K^n$  Ketten; somit ist auch die Gesamtzahl  $|\mathcal{P}|$  der durch  $\phi : \{\mu\} \rightarrow \mathcal{P}$  konstruierten Ketten durch  $K^n$  beschränkt. Deshalb wird (für großes  $n$ ) die (nach Konstruktion surjektive) Abbildung  $\phi$  einen großen Kern haben. Genauer läßt sich zeigen, daß  $\phi^{-1}(\mathcal{C}) = \times_a J_a$  ein Quader (Produkt von Intervallen) ist.

## 6 Darstellung als Gram-Determinante

Entscheidend ist nun, daß die Urbilder  $\phi^{-1}(\mathcal{C})$  für jede Klasse  $\mathcal{C}$  von Ketten achsenparallele Quader sind, d.h. die Intervallgrenzen einer Richtung  $\mu(a)$  sind unabhängig von allen anderen  $\mu(a')$ . Deshalb können die entwickelten Determinanten partiell aufsummiert werden:

$$\text{Det}_T = \sum_{\mu} \det(\mathcal{M}(\mu)) = \sum_{\mathcal{C}} \sum_{\mu \in \phi^{-1}(\mathcal{C})} \det(\mathcal{M}(\mu)) =: \sum_{\mathcal{C}} \det(\mathcal{M}'(\mathcal{C})) \quad (6.1)$$

Von den einzelnen Summanden  $\det(\mathcal{M}'(\mathcal{C}))$  wird nun gezeigt, daß sie eine Darstellung als Gram-Determinanten haben.

Ein typisches Matricelement von  $\mathcal{M}'(\mathcal{C})$  ist:

$$\mathcal{M}'_{ab} = \sum_{k=1}^n \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{-i(x_a - x_b)p} \frac{(-\not{p} + m)}{p^2 + m^2} \eta_k(p) \chi_{J_a}(k) \chi_{J_b}(k) W_{v_a, v_b}(k). \quad (6.2)$$

Dabei ist

$$\eta_p(p) = e^{-\Lambda_0^{-2}(w_{k-1})(p^2 + m^2)} - e^{-\Lambda_0^{-2}(w_k)(p^2 + m^2)}$$

aus der Integration von  $e^{-\alpha(p^2 + m^2)}$  über Schwinger-Parameter  $\alpha \in [\Lambda_0^{-2}(w_{k-1}), \Lambda_0^{-2}(w_k)]$ , und  $\chi_{J_a}$  bezeichnen die charakteristischen Funktionen der Kanten  $J_a$  des Quaders  $\phi^{-1}(\mathcal{C})$ . Weiter ist  $W_{v_a, v_b}(k) = 1$ , falls die Vertices  $v_a, v_b$ , an denen die Schleifen-Halblinien  $a, b$  angeheftet sind, in der gleichen Zusammenhangskomponente  $g_k$  oberhalb  $\Lambda_0^{-2}(w_k)$  liegen, andernfalls  $W_{ab}(k) = 0$ . Mögliche Ableitungen der Kovarianzen können immer auf jede in den Bäumen geworfen werden.

Nun überlegt man sich, daß für jedes  $k$  die Tensorprodukt-Matrix  $\chi_{J_a}(k)\chi_{J_b}(k)W_{v_a,v_b}(k)$  positiv semidefinit ist. Deren positive Linearkombination mit Koeffizienten  $\eta_k(p)$  bleibt für jedes  $p$  positiv semidefinit, besitzt also eine Wurzel

$$\eta_k(p)\chi_{J_a}(k)\chi_{J_b}(k)W_{v_a,v_b}(k) = \sum_{c',v_c} U_{v_a,a,v,c}(p)U_{v_b,b,v,c}(p) .$$

Es folgt  $\mathcal{M}'_{ab} = \langle f^a, g^b \rangle$  mit

$$f_{v,c}^a(p) = \frac{e^{ipx_a}}{(p^2 + m^2)^{\frac{1}{4}}} U_{v_a,a,v,c}(p) , \quad g_{v,c}^b(p) = \frac{e^{ipx_b}(-\not{p} + m)}{(p^2 + m^2)^{\frac{3}{4}}} U_{v_b,b,v,c}(p) . \quad (6.3)$$

Das Skalarprodukt kombiniert Integration über  $p$  mit Summe über  $v, c$ .

Die verbleibenden Abschätzungen haben in der Originalarbeit einen Umfang von 25 Seiten, wozu besonders die notwendige Umorganisation der partiell renormierten Störungsreihe beiträgt. An dieser Stelle wird wichtig, daß die Subtraktion der quasi-lokalen Graphen nur Information aus der Klasse  $\mathcal{C}$  der Ketten benötigt, aus der einerseits Divergenz/Konvergenz abgelesen werden kann und andererseits im Divergenzfall die äußeren Schleifenhalblinien, in deren Positionen die Taylor-Entwicklung relativ zu einem Referenzort erfolgt.

Schließlich werden die Renormierungsgruppengleichungen diskutiert, durch die die zunächst unendlich vielen effektiven Kopplungskonstanten auf endlich viele Anfangsbedingungen zurückgeführt werden.

## Literatur

- [AR95] A. Abdesselam and V. Rivasseau, “Trees, forests and jungles: A botanical garden for cluster expansions,” *Lect. Notes Phys.* **446** (1995) 7 [hep-th/9409094], doi:10.1007/3-540-59190-7\_20.
- [Dis06] M. Disertori, “Constructive renormalization for interacting fermions,” *Lett. Math. Phys.* **78** (2006) 263, doi: 10.1007/s11005-006-0124-0
- [DR00] M. Disertori and V. Rivasseau, “Continuous constructive fermionic renormalization,” *Annales Henri Poincare* **1** (2000) 1–57 [hep-th/9802145], doi:10.1007/PL00000998
- [FMRS86] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and R. Seneor, “A renormalizable field theory: The massive Gross-Neveu model in two-dimensions,” *Commun. Math. Phys.* **103** (1986) 67–103 doi:10.1007/BF01464282
- [GK85] K. Gawedzki and A. Kupiainen, “Exact renormalization for the Gross-Neveu model of quantum fields,” *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 2191–2194, doi:10.1103/PhysRevLett.54.2191
- [GN74] D. J. Gross and A. Neveu, “Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories,” *Phys. Rev. D* **10** (1974) 3235, doi:10.1103/PhysRevD.10.3235