# Aspekte der Konstruktion des $P(\phi)_2$-Modells

## 1 Vorbemerkungen

Der Konstruktion des $P(\phi)_2$-Modells sind die Bücher von Simon [Sim74] und Glimm-Jaffe [GJ87] gewidmet. In drei Vorträgen sollen einige Aspekte dieses Programms vorgestellt werden. Die Themenauswahl folgt einer Vorlesung von Jakob Yngvason.

Relativistische Quantenfelder waren operatorwertige Distributionen $\Phi(f) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ auf dichten Definitionsbereichen $\mathcal{D}$ im Hilbert-Raum, mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$. Die Wightman-Axiome führten auf eine äquivalente Beschreibung durch die Wightman-Distributionen $\mathcal{W}_N(f_1, \dots, f_N) = \langle \Omega, \Phi(f_1) \cdots \Phi(f_N)\Omega \rangle$. Diese waren Randwerte holomorpher Funktionen auf der permutierten erweiterten Vorwärtsröhre. Die Werte an Euklidischen Punkten definieren Schwinger-Funktionen. Für das freie Feld und kleine Störungen in 2 Dimensionen haben auch die Schwinger-Funktionen eine Formulierung im Hilbert-Raum. Dabei spielt Maßtheorie eine entscheidende Rolle.

## 2 Maßtheorie

Siehe [Els05, Hal50] für eine umfassende Abhandlung der Maßtheorie. Die Bezeichnungen folgen [Sim74].

Ein *Maßraum* ist ein Tripel $(M, \Sigma, \mu)$, wobei $\Sigma$ eine Familie von Teilmengen von $M$ ist und jeder dieser Teilmengen $A \in \Sigma$ eine Zahl $\mu(A) \in [0, 1]$ (das *Maß* von $A$) zugeordnet wird, mit folgenden Eigenschaften: $M \in \Sigma$; $M \backslash A \in \Sigma$ falls $A \in \Sigma$; $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \Sigma$ falls $A_n \in \Sigma$. Für die Maße wird gefordert: $\mu(M) = 1$; $\mu(\varnothing) = 0$; $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$ falls $\{A_n\}$ paarweise disjunkt. Mengen $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$ heißen $\mu$-Nullmengen; man kann sich immer auf Äquivalenzklassen modulo Nullmengen einschränken. Für $M$ ein topologischer Raum, insbesondere $M = \mathbb{R}^n$, nehmen wir $\Sigma = \mathcal{B}(M)$ als die *Borel-Algebra*, d.h. die kleinste Familie von Teilmengen mit obigen Eigenschaften, die alle offenen Teilmengen von $M$ enthält. Maße auf Borel-Mengen heißen Borel-Maße. Eine Abbildung $f$ zwischen Maßräumen $(M, \Sigma, \mu)$ und $(M', \Sigma', \mu')$ heißt *meßbar*, falls $f^{-1}(A') \in \Sigma$ für jedes $A' \in \Sigma'$. Jedes Maß auf $M$ definiert ein Integral über meßbare Funktionen auf $M$ mittels Approximation durch Integrale von Treppenfunktionen.

Eine meßbare Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *Zufallsvariable*. Diese definiert ein Maß auf $\mathbb{R}$ durch

$$\mu_f(A) := \mu(f^{-1}(A)) , \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) .$$

Mit diesem Maß lassen sich komplexwertige Funktionen auf $\mathbb{R}$ integrieren. Von besonderer Bedeutung ist die zugehörige Fourier-Transformation des Maßes, also

$$c_f(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx} d\mu_f(x) = \int_M e^{\mathrm{i}tf(m)} d\mu(m) \;. \tag{2.1}$$

Diese heißt (in der Stochastik) die *charakteristische Funktion* von $f$. Uns wird vor allem das umgekehrte Problem beschäftigen: Wann definiert eine gegebene Funktion $c(t)$ eine Zufallsvariable $f$ mit $c(t) = c_f(t)$?

**Theorem 2.1 (Bochner)** *Notwendig und hinreichend für $c(t) = c_f(t)$ für eine Zufallsvariable $f$ ist*

i) $c(0) = 1$,

ii) $t \mapsto c(t)$ *ist stetig,*

iii) *Für jedes* $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ *und* $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ *gilt* $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j c(t_i - t_j) \geq 0$.

*Zum Beweis.* Ein funktionalanalytischer Beweis wird in Reed-Simon II [RS75, Thm IX.9] gegeben.

Eine Zufallsvariable $f$ mit charakteristischer Funktion $c_f(t) = \exp(-\frac{1}{2}at^2)$ heißt *Gaußsche Zufallsvariable* (der Varianz $a$). Entwicklung nach $t$ liefert

$$\int_M f^{2n+1}(m) d\mu(m) = 0 \;, \qquad \int_M f^{2n}(m) d\mu(m) = \frac{(2n)!}{2^n n!} a^n \;. \tag{2.2}$$

Alle Definitionen übertragen sich auf Tensorprodukte $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n : M \to \mathbb{R}^n$, $(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(m) := \big(f_1(m), \dots, f_n(m)\big)$. Diese liefern eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung $d\mu_{f_1 \dots, f_n}(\Omega) = \mu^{-1}((f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)^{-1}(\Omega))$ und eine zugehörige gemeinsame charakteristische Funktion

$$c_{f_1, \dots, f_n}(y) := \int_M e^{\mathrm{i}\langle y, f(m)\rangle} d\mu(m) \;, \qquad \langle (y^1, \dots, y^n), (f_1(m), \dots, f_n(m)) \rangle = \sum_{j=1}^n y^j f_j(m) \;.$$

Gemeinsam Gaußsche Zufallsvariablen haben die gemeinsame charakteristische Funktion $F(y) \equiv c_{f_1, \dots, f_n}(y) = \exp(-\frac{1}{2}\langle y, Ay\rangle)$ für $y \in \mathbb{R}^n$ und eine positiv-definite Matrix $A$. Setzt man nun $y = \sum_{k=1}^N \lambda_k y_k$ für Vektoren $y_k \in \mathbb{R}^n$, so liefert die Ableitung nach $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ an der Stelle $\lambda_k = 0$:

**Satz 2.2 (Wick)**

$$\begin{aligned}(-\mathrm{i})^N \frac{\partial^N F(\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_N y_N)}{\partial \lambda_1 \cdots \partial \lambda_N}\Big|_{\lambda_k = 0} &= \int_M \langle y_1, f(m)\rangle \cdots \langle y_N, f(m)\rangle d\mu(m) \qquad (2.3)\\ &= \begin{cases} 0 & \textit{für } N \textit{ ungerade} \\ \displaystyle\sum_{\textit{Paarungen}} \langle y_{i_1}, Ay_{j_1}\rangle \cdots \langle y_{i_{\frac{N}{2}}}, Ay_{j_{\frac{N}{2}}}\rangle & \textit{für } N \textit{ gerade} \;. \end{cases}\end{aligned}$$

*Dabei läuft die Summe über die* $\frac{(N)!}{2^{\frac{N}{2}}(\frac{N}{2})!}$ *verschiedenen Paarungen* $(i_1, j_1), \ldots, (i_{\frac{N}{2}}, j_{\frac{N}{2}})$ *in* $(1, \ldots, N)$*.*

Das Skalarprodukt $\langle y, Ay \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ definiert einen Euklidischen Fockraum[1] $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$[a(y_1), a^*(y_2)] = \langle y_1, Ay_2 \rangle \,, \qquad a(y)\Omega = 0 \,, \qquad \langle \Omega, \Omega \rangle = 1 \,. \tag{2.4}$$

Setzen wir $\Phi(y) = a(y) + a^*(y)$, so folgt $\langle \Omega, \Phi(y_1)\Phi(y_2)\Omega \rangle = \langle y_1, Ay_2 \rangle$. Diese Funktion ist symmetrisch in $y_1, y_2$. Höhere Funktionen faktorisieren in Produkte von 2-Punktfunktionen, so daß im Vergleich mit Satz 2.2 entsteht:

$$\begin{aligned} \langle \Omega, \Phi(y_1) \cdots \Phi(y_N)\Omega \rangle &= \int_M \langle f(m), y_1 \rangle \cdots \langle f(m), y_N \rangle d\mu(m) \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y_1 \rangle \cdots \langle x, y_N \rangle d\mu_f(x) \,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Auf diese Weise wird ein Isomorphismus $U : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_f)$ zwischen reellen Hilbert-Räumen erhalten. Konkret startet man mit $U(\Omega) = 1$ und $U\Phi(y)U^{-1} := \hat{\Phi}(y)$, wobei $\hat{\Phi}(y)\psi(x) := \langle x, y \rangle \psi(x)$ ist. Diese dicht definierte Isometrie $U$ setzt sich auf den Abschluß fort.

Es geht nun darum, diese Korrespondenz auf eine Klasse unendlich-dimensionaler Vektorräume fortzusetzen, die den Schwartz-Raum enthält. Dazu eine Vorbemerkung:

**Satz 2.3** *Sei* $V$ *ein topologischer Vektorraum mit stetigem Skalarprodukt* $\langle \ , \ \rangle$*. Dann hat die Funktion* $F(v) := \exp(-\frac{1}{2}\langle v, v \rangle)$ *folgende Eigenschaften:*

i) $F(0) = 1$

ii) $F$ *ist stetig*

iii) $F$ *ist von positivem Typ, d.h. für beliebige* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ *und* $v_1, \ldots, v_N \in V$ *gilt* $\sum_{i,j=1}^N \lambda_i \bar{\lambda}_j F(v_i - v_j) \geq 0$*.*

*Beweis von iii).* Entwickelung der Exponentialreihe liefert

$$\sum_{i,j=1}^N \lambda_i \bar{\lambda}_j F(v_i - v_j) = \sum_{i,j=1}^N \sum_{n=0}^\infty \Lambda_i \bar{\Lambda}_j \frac{(\langle v_i, v_j \rangle)^n}{n!}$$

mit $\Lambda_i := \lambda_i e^{-\frac{1}{2}\langle v_i, v_i \rangle}$. Die Gram-Matrix $(\langle v_i, v_j \rangle)$ is positiv (klar), und $(\langle v_i, v_j \rangle)^n$ ist als iteratives Hadamard-Produkt von positiven Matrizen wieder positiv `https://en.wikipedia.org/wiki/Schur_product_theorem`. □

[1]Diese Konstruktion folgt der Vorlesung von Yngvason; es erscheint uns aber natürlicher, alle Hilbert-Räume reell zu wählen.

Unter einer topologischen Zusatzannahme, der *Nuklearität*, liefert der Satz von Bochner-Minlos die Existenz eines Maßes, so daß die zugehörige charakteristische Funktion genau diese Eigenschaften hat.

**Definition 2.4** Seien $X, Y$ Banach-Räume und $X'$ der Dualraum von $X$. Ein linearer Operator $T : X \to Y$ heißt *nuklear*, falls es eine Folge $(y_n)$ in $Y$ mit $\|y_n\| \leq 1$, eine Folge $(x'_n)$ in $X'$ mit $\|x'_n\| \leq 1$ und eine Folge $(\mu_n)$ in $\mathbb{C}$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n| < \infty$ gibt mit $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x'_n(x) y_n$.

Für $X, Y$ Hilbert-Räume sind das genau die Spurklasse-Operatoren.

Sei nun $V$ ein lokal-konvexer topologischer Vektorraum, d.h. die Topologie ist definiert durch eine Familie $\{p_\alpha\}$ von Halbnormen. Jede dieser Halbnormen $p$ definiert einen Banach-Raum $V_p$ durch Quotientenbildung nach dem $p$-Nullraum und Vervollständigung bezüglich $p$. Die kanonische Abbildung $V \ni x \mapsto [x]_p \in V_p$ ist (i.a.) weder surjektiv noch injektiv. Sei nun $q \geq p$ eine größere Halbnorm, d.h. es gibt ein $M > 0$ mit $p(x) \leq Mq(x)$ für alle $x \in V$. Dann gibt es eine natürliche Abbildung $\iota_{qp} : V_q \ni [x]_q \mapsto [x]_p \in V_p$, denn $0 \in V_q$ wird auf $0 \in V_p$ geschickt und jede $q$-Cauchy-Folge ist auch $p$-Cauchy-Folge.

**Definition 2.5** Ein lokal-konvexer topologischer Vektorraum $(V, \{p_\alpha\})$ heißt *nuklear*, wenn es zu jeder Halbnorm $p$ eine größere Halbnorm $q$ gibt, so daß die natürliche Abbildung $\iota_{qp} : V_q \to V_p$ nuklear ist.

Der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sowie der Vektorraum $\mathcal{C}^\infty(M)$ der glatten Funktionen auf einer *kompakten* Mannigfaltigkeit $M$ sind nuklear. Für vollständige nukleare Räume gilt Heine-Borel (jede beschränkte abgeschlossene Menge ist kompakt).

Nach diesen Vorbemerkungen können wir zitieren:

**Theorem 2.6 (Bochner-Minlos)** *Sei $V$ reeller nuklearer Vektorraum, und eine stetige Abbildung $F : V \to \mathbb{R}$ mit $F(0) = 1$ sei von positivem Typ [d.h. es gilt i)-iii) in Satz 2.3]. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes normiertes Borel-Maß $\mu$ auf dem Dualraum $V'$, so daß*

$$F(v) = \int_{V'} e^{\mathrm{i}\phi(v)} d\mu(\phi) \;.$$

*Zum Beweis.* Ein Beweis für $V = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wird in [GJ87, §A.6] gegeben, basierend auf Thm 2.1 und Approximationstechniken gültig für nukleare Räume.

Wie im endlich-dimensionalen Fall gilt: Falls $\lambda \mapsto F(\lambda v)$ genügend oft differenzierbar ist, gilt

$$\int_{V'} \phi(v_1) \cdots \phi(v_N) d\mu(\phi) = (-\mathrm{i})^N \frac{\partial^N}{\partial\lambda_1 \cdots \partial\lambda_N} F(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_N v_N)\Big|_{\lambda_k=0} \;. \quad (2.6)$$

Wir betrachten die Schwinger-Funktion $\mathcal{S}_2$ des freien Euklidischen Feldes. Nach Aufgabe 1.iii) von Blatt 6 des letzten Semesters gilt für $x \neq y$

$$\mathcal{S}_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}^D} \frac{dq}{(2\pi)^D} \frac{e^{\mathrm{i}\langle x-y,q\rangle}}{\|q\|^2+m^2} . \tag{2.7}$$

Im distributionellen Sinn ist $(x,y,q) \mapsto v(x)v(y)\frac{e^{\mathrm{i}\langle x-y,q\rangle}}{\|q\|^2+m^2}$ für $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$ integrierbar, denn $\frac{e^{\mathrm{i}\langle x-y,q\rangle}}{\|q\|^2+m^2} = \frac{1}{(\|q\|^2+m^2)^{D+1}}\Big(\Big(\Big\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\Big\rangle + m^2\Big)^D e^{\mathrm{i}\langle x-y,q\rangle}\Big)$. Da dann die Integrationsreihenfolge getauscht werden kann, gilt für reellwertige $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2(v\otimes v) &\equiv \int_{\mathbb{R}^{2D}} d(x,y)\, v(x)v(y)\mathcal{S}_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}^D} dq \frac{|\hat{v}(q)|^2}{\|q\|^2+m^2} \geq 0 , \\ \hat{v}(q) &= \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \int_{\mathbb{R}^D} dx\; e^{\mathrm{i}\langle x,q\rangle} v(x) .\end{aligned} \tag{2.8}$$

Hier besteht eine gewisse Ähnlichkeit zum Schwinger-Funktional, das jedoch nur auf Testfunktionen erklärt war, die auf zusammenfallenden Punkten mit allen Ableitungen verschwinden: $\mathcal{S}_2(f^{(2)})$ mit $f^{(2)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2D})$ und $f^{(2)} = 0$ mit allen Ableitungen auf der Diagonalen. Hier sehen wir $\mathcal{S}_2(v\otimes v)$ als durch die rechte Seite definiert an. Dann erfüllt $F(v) := \exp(-\frac{1}{2}\mathcal{S}_2(v\otimes v))$ die Voraussetzungen des Bochner-Minlos-Theorems, so daß es ein normiertes Borel-Maß $\mu$ auf dem Raum $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^D))'$ der temperierten Distributionen gibt mit

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_N(v_1\otimes\cdots\otimes v_N) &= \int_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^D))'} \phi(v_1)\cdots\phi(v_N)d\mu(\phi) \\ &= (-\mathrm{i})^N \frac{\partial^N}{\partial\lambda_1\cdots\partial\lambda_N} F(\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_N v_N)\Big|_{\lambda_k=0} .\end{aligned} \tag{2.9}$$

Hier können die Träger der $v_j$ im Einklang mit dem Schwinger-Funktional $\mathcal{S}_N$ gewählt werden.

Diese Resultate machen die Definition der Schwinger-Funktionen über die formelle Zustandssumme rigoros:

$$\mathcal{S}_N(x_1,\dots,x_N) = \int \phi(x_1)\cdots\phi(x_N) \frac{e^{-\frac{1}{2}\int dx\;(\phi(-\Delta+m^2)\phi)(x)}\mathcal{D}[\phi]}{\mathcal{Z}} \tag{2.10}$$

mit $\mathcal{Z} = \int e^{-\frac{1}{2}\int dx\;(\phi(-\Delta+m^2)\phi)(x)}\mathcal{D}[\phi]$.

# 3 Feynman-Kac-Formel und Gell-Mann-Low Formel in der Quantenmechanik

Das Bochner-Minlos-Maß des freien Feldes soll geeignet gestört werden. Anhaltspunkt dafür ist die Feynman-Kac-Formel, die eine Störung des Wiener-Maßes beschreibt.

Der Wärmekern $e^{-tH_0}$ zum Hamilton-Operator $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ hat eine Darstellung als Integralkernoperator

$$(e^{-tH_0}\psi)(q) = \int_{\mathbb{R}^D} dq'\; K_t^{(0)}(q,q')\psi(q')\;, \qquad K_t^{(0)}(q,q') = \frac{1}{(2\pi t)^{D/2}} e^{-\frac{\|q-q'\|^2}{2t}}\;. \tag{3.1}$$

Positivität $K_t^{(0)}(q,q') > 0$ und Normiertheit $\int dq'\; K_t^{(0)}(q,q') = 1$ führen für $D \geq 3$ (in $D = 2$ gibt es ein IR-Problem) auf die Existenz eines Maßes $dW^t_{q,q'}$ auf dem Raum $\mathcal{W}(q,q',t)$ der stetigen Wege $q(t)$ zwischen festgehaltenen Punkten $q(-\frac{t}{2}) = q$ und $q(\frac{t}{2}) = q'$:

**Theorem 3.1** *Seien $A_i(q)$ beschränkte Multiplikationsoperatoren auf $L^2(q,dq)$ und $-\frac{t}{2} \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq \frac{t}{2}$. Dann kann explizit ein Maß $dW^t_{q,q'}$ auf $\mathcal{W}(q,q',t)$ konstruiert werden (das konditionierte Wiener-Maß) mit*

$$\int \prod_{i=1}^N A_i(q(t_i)) dW^t_{q,q'} = \Big(e^{-(t_1-(-\frac{t}{2}))H_0} A_1 e^{-(t_2-t_1)H_0} A_2 \cdots A_N e^{-(\frac{t}{2}-t_N)H_0}\Big)(q,q') \tag{3.2}$$

*Zum Beweis.* Siehe Glimm-Jaffe [GJ87, §3.1]. Betrachte zunächst eine Teilmenge

$$\begin{aligned} &Z^{t_1,\dots,t_N}_{I_1\times\dots\times I_N}(q,q') \\ &:= \{q : [-\tfrac{t}{2},\tfrac{t}{2}] \to \mathbb{R} \text{ stetig } :\; q(-\tfrac{t}{2}) = q,\; q(t_j) \in I_j,\; q(\tfrac{t}{2}) = q'\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

von Wegen $q(s)$ in $\mathcal{W}(q,q',t)$, die an $N$ Zwischenpunkten $t_j$ mit $-\frac{t}{2} \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq \frac{t}{2}$ in Borel-Mengen $I_j \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ liegen. Solche Mengen heißen *Zylindermengen*, und diesen ordnen wir folgendes (konditioniertes) Maß zu:

$$\begin{aligned} &\mu(Z^{t_1,\dots,t_N}_{I_1\times\dots\times I_N}(q,q')) \\ &:= \int_{I_1} dq_1 \cdots \int_{I_N} dq_N\; K^0_{t_1-(-t/2)}(q,q_1) K^0_{t_2-t_1}(q_1,q_2) \cdots K^0_{t/2-t_N}(q_N,q')\;. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Für dieses muß man die Eigenschaften wie $\sigma$-Additivität zeigen, was letztlich auf Gaußsche Prozesse der Kovarianz $C(s,t) = \begin{cases} \min(|t|,|s|) & \text{für } st > 0 \\ 0 & \text{für } st < 0 \end{cases}$ zurückgeführt wird. Die Gleichung (3.6) ist für diese Zylindermaße automatisch [GJ87, Cor 3.1.2] und setzt sich auf Borel-Maße auf dem kompakten Raum $\times_{s\in[-t/2,t/2]}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ fort (kann mit Stone-Weierstraß und Riesz-Markov-Theorem gezeigt werden, siehe [RS75, §X.11]). Diese Maße sind jedoch konzentriert auf Hölder-stetigen Wegen mit Hölder-Exponent $< \frac{1}{2}$ ([RS75, Thm X.67] oder [GJ87, Thm A.4.4]).

Für *beschränkte* Operatoren gilt die Trottersche Produktformel $e^{A+B} = \lim_{n\to\infty}(e^{A/n}e^{B/n})^n$. Diese verallgemeinert sich für gewisse unbeschränkte Operatoren:

**Satz 3.2** *Seien $H_0, V$ wesentlich selbstadjungiert und unterhalb beschränkt, und sei $H := H_0 + V$ wesentlich selbstadjungiert. Dann gilt $e^{-H} = \text{s-}\lim_{n\to\infty}(e^{-H_0/n}e^{-V/n})^n$.*

*Zum Beweis:* z.B. Glimm-Jaffe [GJ87, Thm 3.2.2].

Durch Einsetzen von (3.6) und Grenzübergang garantiert durch dominierte Konvergenz zeigt man:

**Theorem 3.3** *Sei $V$ eine stetige reellwertige und unterhalb beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}^D$, mit $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ wesentlich selbstadjungiert*[2]*. Dann gilt für den Integralkern $K_t(q, q')$ von $e^{-tH}$ die Feynman-Kac-Formel*

$$K_t(q, q') = \int \exp\Big( - \int_{-t/2}^{t/2} V(q(s))ds\Big)dW^t_{q,q'} \tag{3.5}$$

Analoge Aussagen gelten für $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\|q\|^2 - 1$, d.h. den harmonischen Oszillator. In diesem Fall ist $K^{(0)}_t(q, q')$ der Mehler-Kern, und sei $dU^t_{q,q'}$ das zugehörige Maß.

Sei $\Omega_0$ der Grundzustand des harmonischen Oszillators, $H_0\Omega_0 = 0$. Dann läßt sich ein neues Maß

$$d\mu_0 := \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}^D} dqdq'\ \Omega_0(q)\Omega_0(q')dU^t_{q,q'}$$

einführen, für das nach dem Analogon von (3.6) gilt

$$\int \prod_{i=1}^{N} A_i(q(t_i))d\mu_0 = \langle\Omega_0, A_1e^{-(t_2-t_1)H_0}A_2 \cdots A_N\Omega\rangle\ . \tag{3.6}$$

Ziel ist die Verallgemeinerung auf den Integralkern zu $e^{-t(H_0+V)}$. Dieser ist punktweise positivitätserhaltend, und für solche Kerne läßt sich zeigen (Glimm-Jaffe, §3.3), daß der Grundzustand $\Omega$ von $H = H_0+V$ (falls existent) bis auf Phase eindeutig ist, strikt positiv gewählt werden kann und $\langle\Omega, \Omega_0\rangle \neq 0$ gilt. Sei $H\Omega = E\Omega$ und $\hat{H} = H - E \geq 0$. Nach Spektraltheorem gilt $e^{-t\hat{H}} = \int e^{-t(\lambda-E)}dP_\lambda$. Für $t \to \infty$ überlebt (im Sinn der starken Operator-Topologie) nur die Projektion auf den Grundzustand, also $\Omega\langle\Omega, \Omega_0\rangle = \text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{-t\hat{H}}\Omega_0$. Nach kleiner Rechung ergibt sich die euklidische Gell-Mann-Low-Formel

$$\langle\Omega, A_1e^{-(t_2-t_1)\hat{H}}A_2 \cdots e^{-(t_N-t_{N-1})\hat{H}}A_N\Omega\rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int \prod_{i=1}^{N} A_i(q(t_i))e^{-\int_{-t}^{t} V(q(s))ds}d\mu_0}{\displaystyle\int e^{-\int_{-t}^{t} V(q(s))ds}d\mu_0} \tag{3.7}$$

[2]Nach Kato-Rellich automatisch für $V = V_2 + V_\infty$ mit $V_2 \in L^2$ und $V\infty \in L^\infty$

Wir nehmen diese Formel als Motivation, Schwinger-Funktionen einer wechselwirkende Theorien zu definieren als

$$\mathcal{S}_N(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = \frac{\displaystyle\int_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^D))'} \phi(v_1) \cdots \phi(v_N) e^{-\int P(\phi(x))g(x)dx} d\mu(\phi)}{\displaystyle\int_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^D))'} e^{-\int P(\phi(x))g(x)dx} d\mu(\phi)} \tag{3.8}$$

für ein Polynom $P$, z.B. $P(\phi(x)) = \phi^4(x)$. Dabei ist $d\mu(P)$ das Minlos-Maß des freien Feldes. Im Unterschied zur Quantenmechanik treten in der Feldtheorie jedoch mehrere Probleme auf:

- Produkte $\phi^n$ von Distributionen sind zunächst nicht erklärt und müssen geeignet konstruiert werden. In $D = 2$ Dimensionen genügt eine *Normalordnung*, um die es im nächsten Abschnitt geht.
- Bei der Normalordnung geht die Beschränktheit von unten verloren, aber auch sonst ist die Integrierbarkeit von $e^{-\int P(\phi(x))dx}$ nicht garantiert! (es geht hier nicht um formale Störungstheorie, sondern Konvergenz!) Deshalb muß das Integral auf endliches Volumen und endliches Zeitintervall eingeschränkt werden, was am zweckmäßigsten über eine Testfunktion $g$ mit kompaktem Träger an Stelle einer Kopplungskonstanten geschieht (Regularisierung). Dadurch geht Euklidische Invarianz verloren.
- Der Grenzübergang $g(x) \mapsto g = \text{const}$ zur Restauration der Symmetrien ist äußerst schwierig.

# 4 Normalordnung

Beginnen wir mit einer formalen Definition der Normalordnung. Daß damit manche Probleme gelöst werden, wird erst später klar. Intuitiv beseitigt die Normalordnung in der Formulierung durch Feynman-Graphen die Tadpole-Beiträge, und diese sind für $D = 2$ die einzigen störungstheoretischen Divergenzen. Das Problem der Konvergenz der Störungsreihe verbleibt jedoch.

Hintergrund der Konstruktion ist die Tatsache, daß die positive Bilinearform auf dem nuklearen Vektorraum $V$, die nach Bochner-Minlos das Maß $\mu$ bestimmt, ebenso zur Konstruktion eines Euklididischen Fockraus $\mathcal{F}(V)$ genutzt werden kann (analog zu (2.4)-(2.5) für $V = \mathbb{R}^n$). Normalordnung im Fockraum bedeutet "Erzeuger links von Vernichtern". Mit $\phi(v) = a(v) + a^*(v)$ folgt

$$\begin{aligned} :\phi(v_1)\phi(v_2): &= a(v_1)a(v_2) + a^*(v_1)a(v_2) + a^*(v_2)a(v_1) + a^*(v_1)a^*(v_2) \\ &= \phi(v_1)\phi(v_2) - [a(v_1), a^*(v_2)] = \phi(v_1)\phi(v_2) - \langle v_1, v_2\rangle \\ &= \phi(v_1)\phi(v_2) - \langle \Omega, \phi(v_1)\phi(v_2)\Omega\rangle = \phi(v_1)\phi(v_2) - \int_{V'} \phi(v_1)\phi(v_2) d\mu(\phi) \;. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Insbesondere hängt die Normalordnung vom Maß $\mu$ ab!

Sei nun abkürzend $\phi_i := \phi(v_i)$ und $\langle\phi_1\cdots\phi_N\rangle_\mu := \int_{V'}\phi_1\cdots\phi_N d\mu(\phi)$. Man kann per Induktion beweisen, daß die Normalordnung durch folgende Rekursionsvorschrift definiert ist:

$$
\begin{aligned}
:\phi_i^0: &= 1 \\
\langle :\phi_1^{n_1}\cdots\phi_N^{n_N}:\rangle_\mu &= 0 \quad \text{für } n_1+\cdots+n_N \geq 1 \\
\frac{\partial}{\partial\phi_k} :\phi_1^{n_1}\cdots\phi_N^{n_N}: &= n_k :\phi_1^{n_1}\cdots\phi_k^{n_k-1}\cdots\phi_N^{n_N}: \; .
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Sämtliche Ableitungen von $\mu$-Integralen verschwinden. Es folgt beispielsweise

$$
\begin{aligned}
:\phi_1: &= \phi_1 - \langle\phi_1\rangle_\mu \\
:\phi_1^2: &= \phi_1^2 - 2\phi_1\langle\phi_1\rangle_\mu - \langle\phi_1^2\rangle + 2\langle\phi_1\rangle_\mu^2 \\
:\phi_1\phi_2: &= \phi_1\phi_2 - \phi_1\langle\phi_2\rangle_\mu - \phi_2\langle\phi_1\rangle_\mu - \langle\phi_1\phi_2\rangle_\mu + 2\langle\phi_1\rangle_\mu\langle\phi_2\rangle_\mu \\
:\phi_1^3: &= \phi_1^3 - 3\phi_1^2\langle\phi_1\rangle_\mu - 3\phi_1\langle\phi_1^2\rangle_\mu + 6\phi_1\langle\phi_1\rangle_\mu^2 - \langle\phi_1^3\rangle + 6\langle\phi_1\rangle_\mu\langle\phi_1^2\rangle_\mu - 6\langle\phi_1\rangle_\mu^3 \\
:\phi_1^2\phi_2: &= \phi_1^2\phi_2 - 2\phi_1\phi_2\langle\phi_1\rangle_\mu - \phi_2\langle\phi_1^2\rangle_\mu + 2\phi_2\langle\phi_1\rangle_\mu^2 - \phi_1^2\langle\phi_2\rangle_\mu - 2\phi_1\langle\phi_1\phi_2\rangle_\mu + 4\phi_1\langle\phi_1\rangle_\mu\langle\phi_2\rangle_\mu \\
&\quad - \langle\phi_1^2\phi_2\rangle_\mu + 4\langle\phi_1\phi_2\rangle_\mu\langle\phi_1\rangle_\mu + 2\langle\phi_2\rangle_\mu\langle\phi_1^2\rangle_\mu - 6\langle\phi_2\rangle_\mu\langle\phi_1\rangle_\mu^2
\end{aligned}
$$

Der Unterschied zu (4.1) liegt darin, daß für Gaußsche Verteilungen die $\mu$-Intgrale über Monome ungeraden Grades verschwinden.

Für eine einzige Zufallsvariable definiert man sinnvollerweise das erzeugende Funktional $:\exp(\alpha\phi_0) := \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha^n}{n!} :\phi_0^n:$. Ableitung und Normierungsbedingung liefern sofort $:\exp(\alpha\phi_0) := \dfrac{\exp(\alpha\phi_0)}{\langle\exp(\alpha\phi_0)\rangle_\mu}$, woraus $:\phi_0^n:$ direkt zu erhalten ist. Tatsächlich ist eine einzige Zufallsvariable keine Einschränkung: Für kommutierende Variablen, insbesondere kommutierende Zufallsvariablen, gilt die Polarisationsformel

$$
X_1\cdots X_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}(X_{i_1}+\cdots+X_{i_k})^n \; . \tag{4.3}
$$

Für lineare Funktionale $v\mapsto\phi(v)$ genügt es deshalb, die Normalordnungen $:\phi(v_0)^n:$ einer einzigen Variable zu kennen.

Für gaußverteilte Zufallsvariablen gilt

$$
\langle e^{\mathrm{i}\alpha\phi_1}\rangle_\mu = \int_{V'} e^{\mathrm{i}\alpha\phi(v_1)}d\mu(\phi) = e^{-\alpha^2\langle v_1,v_1\rangle} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}\langle\phi_1^2\rangle_\mu} \tag{4.4}
$$

und somit nach analytischer Fortsetzung

$$
:\exp(\alpha\phi_1) := \exp\left(\alpha\phi_1 - \frac{\alpha^2}{2}\langle\phi_1^2\rangle_\mu\right) \; . \tag{4.5}
$$

Daraus gewinnt man Identitäten der folgenden Art: Sind $\phi_1,\phi_2$ gaußverteilt, so auch $\alpha\phi_1+\beta\phi_2$, und es folgt

$$
\langle :\phi_1^n::\phi_2^m:\rangle_\mu = \delta_{mn}n!\langle\phi_1\phi_2\rangle_\mu^n \; . \tag{4.6}
$$

## Literatur

[GJ87] J. Glimm and A. M. Jaffe, *Quantum physics. A functional integral point of view*, Springer-Verlag (1987), 535pp.

[Sim74] B. Simon, *The $P(\phi)_2$ Euclidean (quantum) field theory*, Princeton Univ. Pr. (1974), 392 pp.

[Els05] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Grundwissen Mathematik, Springer-Verlag Berlin (2005)

[Hal50] P. R. Halmos, *Measure theory*, Springer-Verlag New-York (1950).

[RS75] M. Reed & B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. Vol II: Fourier analysis and self-adjointness*, Academic Press (1975).