Das Thirring-Modell

1 Vorbemerkungen

Das Modell wurde 1958 von Walter Thirring vorgeschlagen [Thi58]. Es beschreibt ein Dirac-Fermion in zwei Dimensionen mit Strom-Strom-Wechselwirkung. Das Modell ist einfach genug, um sämtliche Korrelationsfunktionen (Wightman/Schwinger) bestimmen zu können. Dennoch ist es ein sehr reichhaltiges Modell, das viele typische Effekte der Quantenfeldtheorie zeigt: Renormierung, anomale Dimension, chirale Symmetrie (und deren Brechung), anomale Phase.

In den ersten Jahren gab es widersprüchliche Resultate, weil Renormierung und Normierungsbedingungen noch nicht verstanden waren. Der entscheidende Schritt zur Lösung gelang Johnson [Joh61], der eine Selbstkonsistenzgleichung für die 2-Punktfunktion herleiten konnte. Die dazu notwendigen Schritte sind keinesfalls trivial. Genutzt werden Symmetrie-Forderungen, allerdings in bestimmter Weise abgeschwächt als Folge von Renormierungseffekten. Die Ward-Takahashi-Identitäten (welche die Symmetrie beschreiben) besitzen Anomalien (auch erst später verstanden), da die Feld-Strom-Kommutatorrelationen durch Renormierungseffekte modifiziert werden müssen. Die Form dieser Anomalien wurde geschickt erraten, um die Gleichungen nichttrivial zu machen. Eine Kombination von Schwinger-Dyson-Gleichungen (Quanten-Bewegungsgleichungen) mit Ward-Takahashi-Identitäten für die chirale Symmetrie liefert eine geschlossene und lösbare Gleichung.

In Verallgemeinerung dieser Methode konnten Klaiber [Kla68] und unabhängig Hagen [Hag67] sämtliche Korrelationsfunktionen angeben. Einen guten Überblick bietet eine Arbeit von Swieca [Swi77] sowie das Buch von Abdalla-Abdalla-Rothe [AAR91].

Wir folgen im wesentlichen der Arbeit von Klaiber.

2 Thirring-Modell als klassische Feldtheorie

Wir betrachten die Wirkung

$$S = \int_{\mathbb{R}^2} dx \Big(\mathrm{i}\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi)(x) + \frac{g}{2}J^\mu(x)J_\mu(x)\Big)\;, \qquad J^\mu(x) := \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\;. \tag{2.1}$$

Wir können $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ für die γ-Matrizen in $C\ell_{1,1}$ annehmen und definieren $\gamma^5 := \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\bar{\Psi} = \Psi^*\gamma^0$ mit Ψ^* als zu Ψ adjungierter Matrix. Über Paare gleicher oberer+unterer Indizes wird von 0 bis 1 summiert. Das Heben/Senken von Indizes geschieht mit der Minkowsi-Metrik: $v^0 = v_0$ und $v^1 = -v_1$. Mit diesen Konventionen folgt

$$J^\mu J_\mu = -\tilde{J}^\mu \tilde{J}_\mu \ , \qquad \tilde{J}^\mu(x) := \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\Psi(x) = \epsilon^{\mu\nu} J_\nu \ . \qquad (2.2)$$
$$\epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = -\epsilon^{01} = \epsilon^{10} = 1 \ , \qquad \epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0 \ .$$

Somit erhalten wir die Feldgleichungen

$$\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) = -gJ_\nu(x)\gamma^\nu\Psi(x) = g\tilde{J}_\nu(x)\gamma^\nu\gamma^5\Psi(x) \ , \qquad (2.3)$$

welche eingesetzt in die Ströme $J^\mu, \tilde{J}^\mu$ auf die Erhaltungsätze

$$\partial_\mu J^\mu = -\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{J}_\nu = 0 \ , \qquad \partial_\mu\tilde{J}^\mu = \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu J_\nu = 0 \qquad (2.4)$$

führen. Auf $\mathbb{R}^2$ folgt nach Poincaré-Lemma

$$J_\nu(x) =: \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_\nu J(x) \ , \qquad \tilde{J}_\nu(x) =: \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_\nu\tilde{J}(x) \ , \qquad (2.5)$$

für Funktion $J, \tilde{J}$, welche jeweils die d'Alembert-Gleichung lösen:

$$\partial^\mu\partial_\mu J(x) = 0 \ , \qquad \partial^\mu\partial_\mu\tilde{J}(x) = 0 \ . \qquad (2.6)$$

Bilde nun $\psi(x) := e^{-\mathrm{i}(\alpha J(x) + \beta\gamma^5\tilde{J}(x))}\Psi(x)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann folgt

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) &= e^{-\mathrm{i}(\alpha J(x) - \beta\gamma^5\tilde{J}(x))}\Big(-\mathrm{i}\sqrt{\pi}\alpha J_\mu(x)\gamma^\mu\psi(x) - \mathrm{i}\sqrt{\pi}\beta\gamma^\mu\gamma^5\tilde{J}_\mu(x)\psi(x) + \gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x)\Big) \\ &= e^{\mathrm{i}(\alpha J(x) - \beta\gamma^5\tilde{J}(x))}\Big(\tfrac{-\alpha\sqrt{\pi}+\beta\sqrt{\pi}}{g} + 1\Big)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) \ . \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Somit erhalten wir eine einparametrige Familie von Lösungen der freien Feldgleichung:

$$\alpha - \beta = \frac{g}{\sqrt{\pi}} \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0 \ . \qquad (2.8)$$

Starten wir umgekehrt mit einer Lösung der masselosen Dirac-Gleichung $\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$, so folgt für $j^\mu(x) := \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ und $\tilde{j}^\mu(x) := \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ genauso $j_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_\mu j(x)$ und $\tilde{j}_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_\mu\tilde{j}(x)$, und

$$\Psi(x) := e^{\mathrm{i}(\alpha j(x) + \beta\gamma^5\tilde{j}(x))}\psi(x) \qquad (2.9)$$

löst für $\alpha - \beta = \frac{g}{\sqrt{\pi}}$ die Bewegungsgleichung des Thirring-Modells.

Es scheint also, daß die Kopplungskonstante g keine Bedeutung hat und auf jeden anderen Wert, insbesondere 0, transformiert werden kann. Führt man diese Schritte mit Quantenfeldern aus, so hat man es in einem Zwischenschritt mit masselosen Klein-Gordon-Feldern $\partial^\mu\partial_\mu j = 0$ und $\partial^\mu\partial_\mu\tilde{j} = 0$ zu tun. Solche Felder gibt es in zwei Dimensionen nicht! Das manifestiert sich in Divergenzen, man hat also zu regularisieren, und im Limes überlebt etwas (Anomalien), was doch einen Unterschied zur freien Theorie macht (wenn auch nicht in g sichtbar).

3 Das freie masselose Fermion

Dieses hat eine Fockraum-Darstellung

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dp \Big(a^*(p) e^{\mathrm{i}(|p|x^0 - px^1)} + b(p) e^{-\mathrm{i}(|p|x^0 - px^1)} \Big) u(p) \, , \tag{3.1}$$
$$\{a(p), a^*(q)\} = \{b(p), b^*(q)\} = \delta(p-q) \, ,$$

mit $u(p) = \begin{pmatrix} \theta(-p) \\ \theta(p) \end{pmatrix}$ als Lösung von $(\gamma^0|p| - \gamma^1 p)u(p) = 0$. Insbesondere hängt die obere Komponente ψ_1 nur von $x^0 + x^1$ ab, die untere ψ_2 nur von $x^0 - x^1$. Unter Verwendung von $\bar{u}(p) = u^*(p)\gamma^0 = \begin{pmatrix} \theta(p) & \theta(-p) \end{pmatrix}$ lassen sich die Antikommutatoren $-\mathrm{i}S_{\alpha\dot{\alpha}}(x-y) := \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(y)\}$ berechnen.

Als Ströme werden *normal-geordnete* Operatorprodukte definiert:

$$j(x) =: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) : \, , \qquad \tilde{j}(x) =: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x) : \; . \tag{3.2}$$

Nach formaler Ausmultiplikation werden die Operatoren a, a^*, b, b^* unter Beachtung von Vorzeichen so angeordnet, daß alle Erzeuger a^*, b^* links von den Vernichtern a, b stehen. Konkret ersetzt man $a(q)a^*(p) \mapsto -a^*(p)a(q)$. Definiert man das Vakuum durch $a(p)\Omega = b(p)\Omega = 0$, so folgt $\langle \Omega, j^\mu(x)\Omega \rangle = 0 = \langle \Omega, \tilde{j}^\mu(x)\Omega \rangle$. Ohne die Normalordnung würden diese Erwartungswerte divergieren. Eine längliche Rechnung liefert:

$$j^\mu(x) = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{\sqrt{2|k|}} \, k^\mu \Big(c(k) e^{-\mathrm{i}(|k|x^0 - kx^1)} - c^*(k) e^{\mathrm{i}(|k|x^0 - kx^1)} \Big) \, , \tag{3.3}$$

$$c(k) := \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{|k|}} \int_{\mathbb{R}} dp \Big(\theta(kp) b^*(p) b(p+k) - \theta(kp) a^*(p) a(p+k) + \theta(p(k-p)) a(k-p) b(p) \Big) \, . \tag{3.4}$$

Die c, c^* sind bosonische Operatoren auf dem fermionischen Fock-Raum, $[c(p), c^*(k)] = \delta(k-p)$ und $c(p)\Omega = 0$.

4 Regularisierung

Der Stromoperator $j^\mu(x)$ kann nun nicht einfach als Gradient eines Operators $j(x)$ aufgefaßt werden, der formal durch Weglassen des k^μ entsteht. Die Divergenz bei $k = 0$ wird wie folgt regularisiert:

$$j^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{\sqrt{2|k|}} \, c(k) \big(e^{-\mathrm{i}(|k|x^0 - kx^1)} - \theta(\mu - |k|) \big) \, ,$$
$$j^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{\sqrt{2|k|}} \, c^*(k) \big(e^{\mathrm{i}(|k|x^0 - kx^1)} - \theta(\mu - |k|) \big) \, , \tag{4.1}$$

mit c, c^* wie oben. Diese Operatoren haben wohldefinierte Ableitungen: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\partial_\mu j^+ + \partial_\mu j^-) = j_\mu$. Analog gilt für

$$\begin{aligned}
\tilde{j}^-(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{\sqrt{2|k|}} \, \mathrm{sign}(k)\, c(k) \big(e^{-\mathrm{i}(|k|x^0 - kx^1)} - \theta(\mu - |k|)\big) \ , \\
\tilde{j}^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{\sqrt{2|k|}} \, \mathrm{sign}(k)\, c^*(k) \big(e^{\mathrm{i}(|k|x^0 - kx^1)} - \theta(\mu - |k|)\big) \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

die Relation $\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\partial_\mu \tilde{j}^+ + \partial_\mu \tilde{j}^-) = \tilde{j}_\mu$.

Wir benötigen die Kommutatorrelationen dieser Felder:

$$\begin{aligned}
[j^-(x), j^+(y)] &= [\tilde{j}^-(x), \tilde{j}^+(y)] = -\mathrm{i} D^-_{\mu\mu}(x,y) \ , \qquad (4.3) \\
[j^-(x), \tilde{j}^+(y)] &= [\tilde{j}^-(x), j^+(y)] = -\mathrm{i} \tilde{D}^-_{\mu\mu}(x,y) \ , \\
[j^\pm(x), \psi(y)] &= -\sqrt{\pi}\Big(D^\pm_\mu(x,y) + \gamma^5 \tilde{D}^\pm_\mu(x,y)\Big)\psi(y) \\
[\tilde{j}^\pm(x), \psi(y)] &= -\sqrt{\pi}\Big(\tilde{D}^\pm_\mu(x,y) + \gamma^5 D^\pm_\mu(x,y)\Big)\psi(y) \\
D^-_{\mu\mu}(x,y) &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2|k|} (e^{-\mathrm{i}(|k|x^0 - kx^1)} - \theta(\mu - |k|))(e^{\mathrm{i}(|k|y^0 - ky^1)} - \theta(\mu - |k|)) \\
&= D^-(x-y) - \Delta^-(x) + \Delta^+(y) \ , \qquad (4.4) \\
D^\pm_\mu(x,y) &= \mp\frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2|k|} (e^{\pm\mathrm{i}(|k|x^0 - kx^1)} - \theta(\mu - |k|)) e^{\mp\mathrm{i}(|k|y^0 - ky^1)} \\
&= D^\pm(x-y) + \Delta^\pm(y) \ , \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
D^\pm(\xi) &:= \mp\frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2|k|} (e^{\pm\mathrm{i}(|k|\xi^0 - k\xi^1)} - \theta(\mu - |k|)) \ , \qquad (4.6) \\
\Delta^\pm(x) &:= \mp\frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2|k|} \theta(\mu - |k|)(e^{\pm\mathrm{i}(|k|x^0 - kx^1)} - 1) \ .
\end{aligned}$$

Alle Distributionen $\tilde{D}$ enthalten ein zusätzliches $\mathrm{sign}(k)$ unter dem Integral. Die Kommutatoren sind also nicht mehr translationsinvariant!

Das Problem läßt sich für die Strom-Fermion-Kommutatoren reparieren durch geschickte Kombination mit den Ladungsoperatoren

$$\begin{aligned}
Q &:= \int_{\mathbb{R}} dp \big(b^*(p)b(p) - a^*(p)a(p)\big) \ , \qquad (4.7) \\
\tilde{Q} &:= \int_{\mathbb{R}} dp \, \mathrm{sign}(p) \big(b^*(p)b(p) - a^*(p)a(p)\big) \ .
\end{aligned}$$

Diese Operatoren erfüllen

$$\begin{aligned}
&[Q, \psi(x)] = -\psi(x) \ , \qquad [\tilde{Q}, \psi(x)] = -\gamma^5 \psi(x) \ , \qquad (4.8) \\
&[Q, j^\pm(x)] = [\tilde{Q}, j^\pm(x)] = [\tilde{Q}, j^\pm(x)] = [\tilde{Q}, \tilde{j}^\pm(x)] = 0 \ .
\end{aligned}$$

Wir bilden für noch zu bestimmende ν_i die Operatoren

$$\begin{aligned} q^{\pm}(x) &= \sqrt{\pi}\big(\nu_1 Q \Delta^{\pm}(x) + \nu_2 \tilde{Q} \tilde{\Delta}^{\pm}(x)\big) , \\ \tilde{q}^{\pm}(x) &= \sqrt{\pi}\big(\nu_3 Q \tilde{\Delta}^{\pm}(x) + \nu_4 \tilde{Q} \Delta^{\pm}(x)\big) . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Es werden Kandidaten für wechselwirkende Fermionen definiert als

$$\begin{gathered} \Psi(x) := e^{\mathrm{i}\chi^+(x)} \psi(x) e^{\mathrm{i}\chi^-(x)} , \qquad \bar{\Psi}(x) := e^{-\mathrm{i}\chi^+(x)} \bar{\psi}(x) e^{-\mathrm{i}\chi^-(x)} , \\ \chi^{\pm}(x) := \alpha j^{\pm}(x) + q^{\pm}(x) + \gamma^5_x \beta \tilde{j}^{\pm}(x) + \gamma^5_x \tilde{q}^{\pm}(x) . \end{gathered} \tag{4.10}$$

Dabei wirkt γ^5_x als -1 auf die obere Komponente von $\Psi(x)$ und als $+1$ auf die untere Komponente. Nach Konstruktion gilt $\langle \Omega, \Psi(x)\Omega\rangle = 0 = \langle \Omega, \bar{\Psi}(x)\Omega\rangle$.

5 Wightman-Funktionen

Ziel ist zu klären, ob es α, β, ν_i derart gibt, daß

$$\langle \Omega, \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(y_1) \dots \bar{\Psi}(y_n) \Omega \rangle \tag{5.1}$$

die Wightman-Axiome erfüllen. Dazu müssen die $e^{\mathrm{i}\chi^+}$ nach links und die $e^{\mathrm{i}\chi^-}$ nach rechts kommutiert werden, wo sie auf dem Vakuum die Identität ergeben. Wegen $e^A e^B = e^{\lambda} e^B e^A$ für $[A,B] = \lambda$ und $A e^B = e^{\lambda} e^B A$ für $[A,B] = \lambda A$ ergeben die Kommutatoren eine globale Phase mit gewissen Vorfaktoren vor $\Delta^{\pm}(x_i)$, die dann verschwinden müssen. Es gilt

$$e^{\mathrm{i}\chi^-(x)} e^{\mathrm{i}\chi^+(y)} = e^{\mathrm{i}(\alpha^2+\beta^2\gamma^5_x\gamma^5_y) D^-_{\mu\mu}(x,y) + \mathrm{i}\alpha\beta(\gamma^5_y \tilde{D}^-_{\mu\mu}(x,y) + \gamma^5_x \tilde{D}^-_{\mu\mu}(y,x))} e^{\mathrm{i}\chi^+(y)} e^{\mathrm{i}\chi^-(x)} , \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) e^{\mathrm{i}\chi^+(y)} &= e^{\mathrm{i}\sqrt{\pi}(D^+_\mu(y,x) + \gamma^5_x \tilde{D}^+_\mu(y,x) + \nu_1 \Delta^+(y) + \nu_2 \tilde{\Delta}^+(y) + \nu_3 \gamma^5_x \tilde{\Delta}^+(y) + \nu_4 \gamma^5_x \Delta^+(y))} e^{\mathrm{i}\chi^+(y)} \Psi(x) \\ e^{\mathrm{i}\chi^-(x)} \Psi(y) &= e^{-\mathrm{i}\sqrt{\pi}(D^-_\mu(x,y) + \gamma^5_y \tilde{D}^-_\mu(y,x) + \nu_1 \Delta^+(x) + \nu_2 \tilde{\Delta}^+(x) + \nu_3 \gamma^5_y \tilde{\Delta}^+(x) + \nu_4 \gamma^5_y \Delta^+(x))} \Psi(y) e^{\mathrm{i}\chi^+(x)} \end{aligned} \tag{5.3}$$

und ähnlich für Kommutatoren mit $\bar{\Psi}$. Die ν_i sind nun so zu wählen, daß alle Koeffizienten von $\Delta^{\pm}(x_i)$ verschwinden:

$$\nu_1 = \alpha\Big(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\Big) , \quad \nu_2 = \beta\Big(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\Big) , \quad \nu_3 = \alpha\Big(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\Big) , \quad \nu_4 = \beta\Big(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\Big) . \tag{5.4}$$

Insgesamt erhält man die translationsinvarianten Wightman-Distributionen

$$\begin{aligned} &\langle \Omega, \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \bar{\Psi}(y_1) \dots \bar{\Psi}(y_n) \Omega \rangle = e^{\mathrm{i}F(x,y)} \langle \Omega, \psi(x_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \dots \bar{\psi}(y_n) \Omega \rangle , \\ &\quad F(x,y) = \sum_{j<k} \Big(\big(a + b\gamma^5_{x_j}\gamma^5_{x_k}\big) D^-(x_j - x_k) + \lambda\big(\gamma^5_{x_j} + \gamma^5_{x_k}\big) \tilde{D}^-(x_j - x_k) \Big) \\ &\qquad + \sum_{j<k} \Big(\big(a + b\gamma^5_{y_j}\gamma^5_{y_k}\big) D^-(y_j - y_k) - \lambda\big(\gamma^5_{y_j} + \gamma^5_{y_k}\big) \tilde{D}^-(y_j - y_k) \Big) \\ &\qquad + \sum_{j,k} \Big(\big(-a + b\gamma^5_{x_j}\gamma^5_{y_k}\big) D^-(x_j - y_k) + \lambda\big(-\gamma^5_{x_j} + \gamma^5_{y_k}\big) \tilde{D}^-(x_j - y_k) \Big) , \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$a := \alpha^2 - 2\sqrt{\pi}\alpha , \quad b := \beta^2 - 2\sqrt{\pi}\beta , \quad \lambda := \alpha\beta - \sqrt{\pi}(\alpha + \beta) . \tag{5.6}$$

Lorentz-Invarianz ist nicht automatisch; wir zeigen $\tilde{D}^-(\xi) \neq \tilde{D}^-(\Lambda\xi)$. Deshalb hat Johnson $\lambda = 0$ gesetzt, was jedoch nicht zwingend ist. Zur Berechnung von D^- und $\tilde{D}^-$ starten wir mit folgenden regularisierte Integralen, die in Gradsteyn-Ryshik zu finden sind:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2+m^2}}\Big(e^{-\mathrm{i}k(\xi^0-\xi^1)} - \theta(\mu-k)\Big) \\
&= K_0(m|\xi^0{-}\xi^1|) - \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\mathrm{sign}(\xi^0{-}\xi^1)\Big(I_0(m|\xi^0{-}\xi^1|) - \boldsymbol{L}_0(m|\xi^0{-}\xi^1|)\Big) \\
&- \log\Big(\frac{\mu+\sqrt{\mu^2{+}m^2}}{m}\Big)\;.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Dabei sind K_0, I_0 Besselfunktionen und $\boldsymbol{L}_0$ eine Struve-Funktion. Mit $I_n(0) = 1$, $\boldsymbol{L}_0(0) = 0$ sowie der Reihendarstellung

$$K_0(z) = -\sum_{k=0}^\infty \frac{\big(\frac{z}{2}\big)^{2k}}{(k!)^2}\Big(\ln\frac{z}{2} - \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}\Big)$$

folgt im Limes $m \to 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dk}{k}\Big(e^{-\mathrm{i}k(\xi^0-\xi^1)} - \theta(\mu-k)\Big) &= -\log(\mu e^{-\Gamma'(1)}|\xi^0-\xi^1|) - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\mathrm{sign}(\xi^0-\xi^1) \\
&= -\log(\mu e^{-\Gamma'(1)}(\xi^0-\xi^1-\mathrm{i}\epsilon)) - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\;.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Analog findet man

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dk}{|k|}\Big(e^{-\mathrm{i}(|k|\xi^0-k\xi^1)} - \theta(\mu-|k|)\Big) = -\log(\mu e^{-\Gamma'(1)}(\xi^0+\xi^1-\mathrm{i}\epsilon)) - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\;. \tag{5.9}$$

Somit ist D^-, nicht aber $\tilde{D}^-$, Lorentz-invariant:

$$\begin{aligned}
D^-(\xi) &= \frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\Big(\log((\mu e^{-\Gamma'(1)}(\xi^\mu\xi_\mu - \mathrm{i}\epsilon\xi^0)) - \mathrm{i}\pi\Big) \\
\tilde{D}^-(\xi) &= \frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\log\frac{\xi^0-\xi^1-\mathrm{i}\epsilon}{\xi^0+\xi^1-\mathrm{i}\epsilon}\;.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Genauer gilt, wenn $\xi^\mu \mapsto (\Lambda\xi)^\mu$,

$$\begin{pmatrix}\xi^0\\ \xi^1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\cosh\chi & \sinh\chi\\ \sinh\chi & \cosh\chi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^0\\ \xi^1\end{pmatrix}\;, \qquad \begin{cases}\Lambda(\xi^0-\xi^1) & = e^{-\chi}(\xi^0-\xi^1)\;,\\ \Lambda(\xi^0+\xi^1) & = e^{\chi}(\xi^0+\xi^1)\;.\end{cases} \tag{5.11}$$

Somit folgt $\tilde{D}^-(\Lambda\xi) = \tilde{D}^-(\xi) - \frac{\chi}{2\pi\mathrm{i}}$. Zusammen mit der chiralen Transformation $\psi(x) \mapsto e^{\frac{\chi}{2}\gamma^5}\psi(\Lambda^{-1}x)$ und $\bar{\psi}(x) \mapsto \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)e^{-\frac{\chi}{2}\gamma^5}$ entsteht effektiv die folgende chirale Lorentz-Transformation auf dem durch $\Psi, \bar{\Psi}$ erzeugten Unterraum:

$$\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda)\Psi(x)U(\Lambda) &:= e^{(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\pi})\chi\gamma^5}\Psi(\Lambda^{-1}x)\;, \\
U^{-1}(\Lambda)\bar{\Psi}(x)U(\Lambda) &:= \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)e^{-(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\pi})\chi\gamma^5}\;.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Insgesamt liefert diese chirale Lorentz-Transformation der Wightman-Funktionen einen von χ, nicht aber von x_i^μ, y_i^μ abhängigen konstanten Faktor. Sieht man sich die nichtverschwindenden Spin-Konfigurationen genauer an, so heben sich alle Faktoren gegeneinander weg, und die Wightman-Funktionen sind Lorentz-invariant.

Literatur

[AAR91] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla and K. D. Rothe, *Nonperturbative methods in two-dimensional quantum field theory*, World Scientific, Singapore (1991) 728 pp

[Hag67] C. R. Hagen, "New solutions of the Thirring model," Nuovo Cim. **51** (1967) 169–186, doi:10.1007/BF02712329

[Joh61] K. Johnson, "Solution of the equations for the Green's functions of a two-dimensional relativistic field theory," Nuovo Cim. **20** (1967) 773–790, doi:10.1007/BF02731566

[Kla68] B. Klaiber, "The Thirring model," in: Boulder 1967 Lectures In Theoretical Physics, vol. Xa - Quantum Theory and Statistical Physics, New York 1968, 141–176

[Swi77] J. A. Swieca, "Solitons and confinement," Fortsch. Phys. **25** (1977) 303–326, doi:10.1002/prop.19770250109.

[Thi58] W. E. Thirring, "A Soluble relativistic field theory?," Annals Phys. **3** (1958) 91–112, doi:10.1016/0003-4916(58)90015-0