Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann

WS 15/16

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 29.10., 10 Uhr in den Briefkästen — Blatt 1

Aufgabe 1. Zu finden sind zwei natürliche Zahlen die echt zwischen 1 und 100 liegen. Herr Produkt kennt das Produkt der Zahlen und Frau Summe kennt die Summe der Zahlen. Herr Produkt und Frau Summe führen die folgende Unterhaltung:

- Herr Produkt: "Ich kenne die beiden Zahlen nicht."
- Frau Summe: "Ich kenne die beiden Zahlen auch nicht, aber ich wußte, daß Sie die Zahlen nicht kennen."
- Herr Produkt: "Dann kenne ich die beiden Zahlen jetzt."
- Frau Summe: "Dann kenne ich die beiden Zahlen jetzt auch."

Welches der folgenden Zahlenpaare ist die richtige Lösung? (Wir setzen voraus, daß eines der angegebenen Paare richtig ist!)

3 und 5, 2 und 7, 8 und 11, 4 und 13.

Aufgabe 2. Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie durch Gegenbeispiele folgende Aussagen:

(a) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

(b) $g \circ f$ ist genau dann surjektiv, wenn g und f surjektiv sind.

(c) Wenn $g \circ f$ surjektiv und g injektiv ist, dann muß g bijektiv und f surjektiv sein.

Aufgabe 3. Von Leonardo Fibonacci stammt folgendes Modell zur Vermehrung von Kaninchen. Nimmt man an, daß Kaninchen unsterblich sind, stets in Paaren auftreten und jedes Paar in jedem Jahr ein neues Kaninchenpaar zeugt, welches nach Ablauf zweier Jahre selbst fortpflanzungsfähig ist, so genügt die Anzahl f_n der Kaninchenpaare im Jahr n der Rekursionsgleichung

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, daß im Fall $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$.

(b) $\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$.

(c*) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

(a) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

(c) $\prod_{k=0}^{n}(1 + x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$.