Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann

WS 15/16

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 19.11.2015, 10 Uhr in den Briefkästen — Blatt 4

Aufgabe 1. Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

$$ax + by = e, \qquad cx + dy = f. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, daß (1) im Fall $ad \neq bc$ die folgende eindeutige Lösung besitzt:

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

(b) Sei $ad = bc$. Welche Bedingung muss zusätzlich erfüllt sein, damit für jedes x genau ein y existiert, für welches (x, y) das System (1) löst?

(c) Finden Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme (ggf. in der Form $(x, y(x))$):

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} 2x + 5y &= 8, \\ 3x - 2y &= -7, \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} x - 3y &= 4, \\ -2x + 6y &= 8. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4-a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a sind die Vektoren $u_1, \ldots, u_4$ linear unabhängig?

(b) Für welche (möglicherweise unendlich vielen) Werte von a und b gilt $v \in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_4)$?

Aufgabe 3. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} x + 2y - 4z &= -4, \\ 5x + 11y - 21z &= -22, \\ 3x - 2y + 3z &= 11, \end{aligned} \qquad \text{(b)} \quad \begin{aligned} (1+\mathrm{i})x + y &= 3, \\ (2-\mathrm{i})x + \mathrm{i}y &= 1 - \mathrm{i}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Welche der folgenden Mengen von Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig? Ein Erzeugendensystem? Eine Basis? Warum?

$$\text{(a)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$