

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 26.11.2015, 10 Uhr in den Briefkästen

Blatt 5

Aufgabe 1. (a) Welche der folgenden Teilmengen V_1, \dots, V_4 des \mathbb{R}^3 ist ein Untervektorraum?

$$V_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}, \quad V_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + yz = 0\}, \\ V_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 5\}, \quad V_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - z = 0\}.$$

(b) Geben Sie ein Beispiel für 3 Untervektorräume U_1, U_2, U_3 des \mathbb{R}^3 an mit

$$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}, \quad (U_1 + U_2) \cap U_3 = U_3.$$

Aufgabe 2. (a) Seien $V, W \subseteq \mathbb{R}^6$ zwei *verschiedene* 4-dimensionale Untervektorräume. Welche Werte kann dann $\dim(V \cap W)$ annehmen?

(b) Sei $U = \text{span}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2) \subset \mathbb{R}^3$ und $V = \text{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\dim(U \cap V)$. (*Hinweis:* Was sind $\dim(U)$, $\dim(V)$, $\dim(U + V)$?)

Aufgabe 3. Die *Tschebyscheff-Polynome* T_n und die *Hermite-Polynome* H_n sind bestimmt durch die Rekursionsgleichungen

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \quad \text{und} \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \\ H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x \quad \text{und} \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

für alle $n \geq 1$. Bezeichne $P_n[x]$ den \mathbb{C} -Vektorraum aller Polynome in x vom Grad kleiner oder gleich n mit komplexen Koeffizienten.

(a) Zeigen Sie, daß für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Polynome (T_0, \dots, T_N) und die Polynome (H_0, \dots, H_N) jeweils eine Basis von $P_N[x]$ bilden.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten des Polynoms H_3 bezüglich der Basis (T_0, \dots, T_3) von P_3 und die Koeffizienten des Polynoms T_3 bezüglich der Basis (H_0, \dots, H_3) .

Aufgabe 4. Führen Sie folgende Polynomdivisionen durch (gegebenenfalls mit Rest):

$$(a) \quad \frac{x^4 + 3x^3 - 4x^2 + x}{x + 4}, \quad (b) \quad \frac{2x^4 - 17x^3 + 26x^2 - 13x + 2}{2x^2 - 3x + 1}.$$