Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie

Inhalt

0 Überblick 1

I Äquivalenzprinzip **7**
1 Formulierungen 7
2 Beschleunigte Bezugssysteme im Minkowski-Raum 10
3 Physikalische Effekte in homogenen Gravitationsfeldern 15
4 Die Geodätengleichung 18

II Pseudo-Riemannsche Geometrie **22**
5 Mannigfaltigkeiten und Tangentialraum 22
6 Tensorfelder 28
7 Das metrische Tensorfeld 32
8 Zusammenhänge und Paralleltransport 33
9 Krümmung und Torsion 39
10 Levi-Civita-Zusammenhang 41
11 Beispiele 47

III Kovarianzprinzip und Energie-Impuls-Tensor **51**
12 Vorbemerkungen 51
13 Erhaltungssätze 53

IV Dynamik des Gravitationsfeldes **55**
14 Einsteinsche Feldgleichungen 55
15 Linearisierte Theorie 57
16 Newtonscher Grenzfall 58
17 Gravitationswellen 58

V Die Schwarzschild-Lösung **61**
18 Vakuumlösung 61
19 Bahnen im Schwarzschild-Feld 64
20 Lichtablenkung 68
21 Innere Schwarzschild-Lösung 70
22 Schwarze Löcher 74
23 Ergänzungen 78

VI Kosmologie **86**
24 Friedmann-Robertson-Walker-Metrik 86
25 Kosmologische Modelle 90
26 Beobachtende Kosmologie 93

27 Dunkle Materie 96
28 Frühes Universum 97
29 Das aufgeblasene Universum 97
30 Beschleunigte Expansion des Universums 98

Literatur

siehe Internet

0 Überblick

0.1 Newtonsches Gravitationsgesetz

Unser Ziel ist eine mit allgemeinen Prinzipien kompatible Gravitationstheorie. Die Gravitation umfaßt vor allem den freien Fall, der offenbar durch eine Zentralkraft beschreiben wird. Entscheidend war nun Newtons Erkenntnis, daß die Planetenbahnen, die durch die Keplerschen Gesetze beschrieben werden, durch dasselbe Bewegungsgesetz wie der freie Fall vermittelt werden. Die Planetenbahnen liegen in einer Ebene und sind in dieser Ellipsen mit der Sonne in einem der Brennpunkte. Ebene Ellipsen entstehen im Hookeschen Kraftgesetz

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \ , \qquad \ddot{y} = -\omega^2 y$$

mit einer zum Mittelpunkt $(0,0)$ gerichteten Zentralkraft, die proportional zum Abstand ist. Newton erkannte, daß der Übergang von Hooke zu Kepler eine Dualitätstransformation ist (mit heutigen Techniken: $x+\mathrm{i}y = z \mapsto z^2$), unter der eine zum Abstand $|z|$ proportionale Zentralkraft in eine zu $\frac{1}{|z|^2}$ proportionale Zentralkraft überführt wird.

Somit gewinnt man das Newtonsche Gravitationsgesetz $m\ddot{r} = -\frac{C}{r^2}$, wobei m die Masse des Testkörpers (Planet, fallender Körper) ist. Wegen der schon von Galilei herausgestellten Unabhängigkeit der Gravitationsbeschleunigung von der Masse muß C proportional zur Testmasse m sein, aus Symmetriebetrachtungen auch proportional zur (viel größeren) Masse M des gravitierenden Körpers. Es folgt (bei M in $\vec{0}$)

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{G_N m M \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \ . \tag{0.1}$$

0.2 Zur Stärke und Universalität der Gravitation

Formal sehr ähnlich ist das Coulombsche Gesetz für die Kraft zwischen zwei Ladungen Q in $\vec{0}$ und q in $\vec{r}$: $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$. Vergleicht man beide Kräfte für das Proton der Masse m_p und Ladung e, und drückt e^2 durch die dimensionslose Kopplungskonstante $\alpha \approx \frac{1}{137}$ aus, so erhält man als gravitative Kopplungskonstante des Protons

$$\alpha_G = \frac{G_N m_p^2}{\hbar c} = 5.9 \times 10^{-39} \ .$$

Entsprechend wird der gravitative Bohr-Radius

$$a_G = \frac{\alpha}{\alpha_G}\frac{m_p}{m_e} a_B \approx 10^{31}\,\mathrm{cm} \ ,$$

was den 'Radius' des Universums um einen Faktor 1000 übertrifft. Deshalb darf z.B. in der Hochenergiephysik die Gravitation komplett vernachlässigt werden. Dennoch gewinnt die Gravitation in kosmologischen Maßstäben, da in Sternen

und Galaxien große Massen zusammenkommen, die Gravitation große Reichweite hat und vor allem (im Gegensatz zu elektrischen Ladungen) nicht kompensiert werden kann. Antiteilchen haben dieselbe Masse wie Teilchen.

0.3 Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie

Das Coulombsche Gesetz ergibt sich als statische Lösung der Maxwellschen Feldgleichungen. Eine wichtige weitere Lösungsklasse der Maxwellschen Gleichungen sind elektromagnetische Wellen, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit c festgelegt ist. Damit ist ein scheinbar gravierendes Problem verbunden.

Nach Galilei sind gleichförmig gegeneinander bewegte Bezugssysteme völlig gleichwertig zur Beschreibung der Physik. Die übliche Schlußfolgerung ist, daß nur Relativgeschwindigkeiten eine Bedeutung haben, und deshalb die Maxwellschen Gleichungen mit der daraus folgenden absoluten Lichtgeschwindigkeit das Prinzip der Gleichwertigkeit der Bezugssysteme verletzen. Einsteins überraschende Lösung in der *Speziellen Relativitätstheorie* (1905) lautet: Die Maxwellschen Gleichungen *sind* kompatibel mit dem galileischen Relativitätsprinzip, es ist lediglich eine stillschweigend gemachte (tatsächlich aber absurde!) Annahme aufzugeben: Daß die zeitliche Ordnung entfernter (d.h. kausal getrennter) Ereignisse einen Sinn hat.

0.4 Allgemeines Relativitätsprinzip

Einstein war sich der Defizite der speziellen Relativitätstheorie bewußt. Die Physik sollte nicht nur in allen Inertialsystemen (welche im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie gar nicht sinnvoll definierbar sind!), sondern in beliebig bewegten Bezugssystemen identisch sein. Dieses *allgemeine Relativitätsprinzip* gab der Theorie ihren Namen. Im Laufe der Zeit wurde aber klar, daß das nicht der Kern der Theorie ist. Das Prinzip sagt einfach nur, daß man die Physik zu geometrisieren hat und durch *intrinsische Objekte auf Mannigfaltigkeiten* beschreiben muß. Mannigfaltigkeiten sind durch einen Atlas lokaler Karten definiert, zusammen mit einer Umrechnungsvorschrift im Überlappungsgebiet. Jede Karte ist Abbild der tatsächlichen Physik in einem gewählten Bezugssystem. Experimente liefern immer nur diese Kartenbeschreibung, und man hat einen Abstraktionsprozeß durchzuführen, um auf die intrinsische Realität auf einer Mannigfaltigkeit zu schließen. In der Praxis kann das schwierig sein. Aus theoretischer Sicht ist es aber eine enorme Vereinfachung: *Man formuliere die Naturgesetze auf Mannigfaltigkeiten.* Dann:

- Das allgemeine Relativitätsprinzip ist eine leere Aussage.
- Man hat die Freiheit, eine besonders sinnvolle Karte zu wählen, in der die Rechnung einfach ist. Man gewinnt Vorhersagen für Experimente.

- Die Geometrisierung ist eine starke Einschränkung an mögliche Naturgesetze; man muß also weniger durchprobieren.

0.5 Äquivalenzprinzip

Durch tiefsinnige Überlegungen kam Einstein 1907 zu dem Schluß, daß diese Geometrisierung zusammen mit dem *Äquivalenzprinzip*, d.h. der Universalität des freien Falls, etwas über Gravitation aussagt. Dieses Äquivalenzprinzip ist der eigentliche Kern der gesamten Theorie, alles andere ist mathematisches Handwerk. Wir gehen im ersten Kapitel im Detail darauf ein, da einiges über den Anwendungsbereich zu sagen ist. Hier beschränken wir uns auf die Schlußfolgerung:

Eine Gravitationskraft gibt es nicht!

Es gibt den freien Fall, d.h. die kräftefreie geodätische Bewegung in pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Die Mondbahn ist ebenso wie Newtons Apfel nichts anderes als freie Fall zur Erde hin, nur mit verschiedenen Anfangsdaten. Dieser freie Fall ist die natürliche Bewegung, und dazu ist keine Kraft erforderlich! Eine Kraft wird nur benötigt, wenn man den freien Fall bremsen oder gänzlich verhindern möchte. Die üblicherweise als Gravitationskraft bezeichnete Kraft ist die gleiche Illusion wie die Zentrifugalkraft. Beide Kräfte müssen aufgewandt werden, um den betrachteten Körper von seiner natürlichen Bewegung abzubringen, d.h. um eine Beschleunigung relativ zur geodätischen Bewegung zu erzwingen.

Das Äquivalenzprinzip führt bereits zu beobachtbaren Effekten, wenn man Eigenschaften beschleunigter Bezugssysteme doch als Gravitationsfeld interpretiert:

- Lichtablenkung im Gravitationsfeld. Der Ablenkungswinkel wird später berechnet, wenn die genaue Form des 'Gravitationsfeldes' festgelegt ist. Aber die Tatsache, daß Licht sich *nicht* längs Geraden ausbreitet, folgt bereits aus dem Äquivalenzprinzip.

- Verlangsamung von Uhren im Gravitationsfeld: Eigenfrequenzen verlangsamen sich in der Nähe gravitativer Zentren. Der Effekt konnte bei sehr schmalen Resonanzen von Absorption/Emission gemessen werden. Stehen Quelle und Empfänger auf unterschiedlicher Höhe, dann kommt es erst dann wieder zur Resonanz, wenn durch speziell-relativistische Effekte eine kompensierende Frequenzänderung hinzugefügt wird. Die Frequenzverlangsamung muß vor allem in der Satellitennavigation (GPS/GLONASS) berücksichtigt werden, wo wohldefinierten Laufzeitunterschiede der Signale zur Lokalisierung benutzt werden. Die Uhren in den Satelliten gehen nicht langsamer als auf der Erde (wie nach spezieller Relativitätstheorie erwartet), sondern um einen relativen Faktor 4.4×10^{-10} schneller! Deshalb wird die Uhr in den Satelliten um diesen Faktor verstimmt, und es werden Signale von 4 Satelliten zur Ortsbestimmung gebraucht.

Es sei hier bemerkt, daß die Geometrisierung durch Mannigfaltigkeiten für das elektromagnetische Feld und für die Verallgemeinerung zu Yang-Mills-Feldern auf sehr ähnliche Objekte wie in der Einsteinschen Gravitationstheorie führt. Dennoch ist das Äquivalenzprinzip, also die Nichtexistenz einer Gravitationskraft im Gegensatz zur Realität der anderen Wechselwirkungen, der eigentliche Grund, weshalb eine Quantisierung der Gravitation mit immensen Schwierigkeiten verbunden ist. Man darf behaupten, daß die richtigen Strukturen der Quantengravitation noch nicht gefunden sind.

0.6 Einsteinsche Feldgleichungen

Verbleibt die Frage, was aus Newtons Gravitationsgesetz wird. Dieses ist wegen der Fernwirkung sogar mit dem speziellen Relativitätsprinzip inkompatibel; für Einstein der Grund, tiefer über das Wesen der Gravitation nachzudenken. Wie zuvor betont, ist Newtons Gravitationsgesetz (bis auf Zahlenwerte) äquivalent zu den Keplerschen Gesetzen. Man hat also jene pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu ermitteln, in der der freie Fall (zumindest in exzellenter Näherung) durch Kegelschnitte beschrieben wird. Das ist die Frage nach den Einsteinschen Feldgleichungen: Welche Eigenschaften der anderen Materiefelder bestimmen welche pseudo-Riemannsche Geometrie (und zwar in einer intrinsischen Formulierung auf Mannigfaltigkeiten)? Diese Identifikation war historisch ein schwieriger Schritt. Tatsächlich konnte Hilbert das Problem 1915 kurz vor Einstein lösen, indem er die im Rahmen sinnvoller Kriterien eindeutige Lagrange-Funktion angegeben hat, deren Euler-Lagrange-Gleichungen die Einsteinschen Feldgleichungen liefern.

Technisch sind diese Feldgleichungen ein gekoppeltes nichtlineares System partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung. Bei schwacher Gravitation, d.h. nur infinitesimaler Abweichung von der Minkowski-Mannigfaltigkeit, kann man die Gleichungen linearisieren. In diesem Grenzfall wird das Newtonsche Gravitationsgesetz zurückgewonnen. Zum einen ist das eine wichtige Kontrolle der Gleichungen, zum anderen wird eine freie Konstante in den Gleichungen festgelegt. Eine weitere Lösungsklasse der linearisierten Theorie sind Gravitationswellen. Deren Existenz konnte indirekt aus der Dynamik von Doppolsternpulsaren geschlußfolgert werden. Die langjährige direkte Suche scheint kürzlich Erfolg gehabt zu haben.

0.7 Exakte Lösungen

Eine exakte Lösung zu vorgegebener Materieverteilung erscheint zunächst aussichtslos. Tatsächlich vereinfachen sich die Gleichungen enorm, falls besondere Symmetrien vorliegen, und solche hochsymmetrsichen Lösungen konnten relativ rasch gefunden werden. Die erste ist die Schwarzschild-Lösung im Vakuum (1916), die die Symmetrie eines einzigen statischen Sterns hat. Betrachtet man typische

Bahnen in der Schwarzschild-Lösung, so findet man geringfügige Abweichungen von der Newtonschen Gravitation:

- Perihel-Drehung: Der Lenz-Runge-Vektor ist nicht mehr erhalten, so daß sich die Planetenbahnen nicht exakt zu Ellipsen schließen, sondern über viele Umläufe Rosetten bilden. Zwar geschieht das infolge der Bahnstörungen durch andere Planeten sowieso, es bleibt aber ein gewisser Überschuß, im Einklang mit den Beobachtungen.
- Lichtablenkung an der Sonne: Auch Licht bewegt sich auf Geodäten, d.h. den kürzesten Bahnen zwischen zwei Punkten. In der Schwarzschild-Lösung, und ganz allgemein in jeder gekrümmten Mannigfaltigkeit, sind das keine Geraden mehr. Näherungsweise sind es Hyperbeln, deren Asymptoten einen Winkel bilden, der vom Abstand des Scheitels von der Sonne abhängt. Eine Ablenkung erwartet man auch in der Newtonschen Gravitationstheorie, wenn man den Photonen eine infinitesimale Masse gibt. Der Ablenkungswinkel ist in der Einsteinschen Theorie jedoch doppelt so groß, und genau das wurde bei totalen Sonnenfinsternissen bestätigt.

Die Schwarzschild-Lösung hat eine Singularität bei kleinen Radien. Normalerweise liegt diese weit im Inneren der Sterne, wo sowieso kein Vakuum mehr vorliegt. (Es gibt eine Fortsetzung der Schwarzschild-Lösung in radialsymmetrische Materieverteilungen, die keine Singularität hat). In Entstadien der Sternentwicklung können beim Gravitationskollaps prinzipiell so hohe Dichten auftreten, daß der Schwarzschild-Horizont ins Vakuum wandert. Durch angepaßte Wahl der Koordinaten läßt sich die Lösung über den Horizont hinaus erweitern. Sie zeigt, daß der Gravitationskollaps nicht gestoppt werden kann, sobald der Horizont passiert ist. Es entsteht ein schwarzes Loch mit punktförmiger Singularität. Deren Existenz im Kosmos war lange Zeit fraglich, scheint inzwischen aber gesichert.

Es existieren Varianten der Schwarzschild-Lösung, die rotierende Sterne und/oder elektrisch geladene Sterne beschreiben.

0.8 Kosmologische Modelle

Schließlich lassen sich Lösungen zu gewissen Klassen von homogen und isotrop verteilter Materie finden. Diese sind brauchbare Näherungen für den Kosmos als ganzes, so daß die Lösungen eine Evolution des Universums beschreiben. Aus der Rotverschiebung der Spektren entfernter Galaxien folgt, daß das Universum gegenwärtig expandiert. Damit verbunden ist die Schlußfolgerung, daß es in der Vergangenheit sehr klein und möglicherweise singulär war (Urknall). Die zukünftige Entwicklung hängt von der Materiedichte sowie Existenz und Vorzeichen der kosmologischen Konstante ab. Neuere Beobachtungen führen zu der überraschenden Aussage, daß sich die Expansion beschleunigt. Als Ursache nimmt man sogenannte dunkle Energie an, es genügt jedoch auch eine geeignete kosmologische

Konstante. Weiter gibt es größere Diskrepanzen zwischen der Dichte der gravitativ wirkenden Materie und jener Materie, die in Sternen und Staub gebunden ist. Daraus schließt man auf die Existenz einer dunklen Materie. Die Hochenergiephysik spekuliert viel über mögliche Kandidaten.

Teil I
Äquivalenzprinzip

Wir könnten es uns leichtmachen und den mathematischen Rahmen und die Feldgleichungen der Einsteinschen Gravitationstheorie einfach postulieren. Das würde jedoch der grandiosen wissenschaftlichen Leistung von Albert Einstein nicht gerechtwerden. Es gab vor 100 Jahren keinerlei experimentelle Notwendigkeit, vom Newtonschen Gravitationsgesetz abzurücken. Eine tiefe Intuition, ausgedrückt im Äquivalenzprinzip, führte Einstein zur Erkenntnis, daß sich Gravitation radikal von den anderen Kräften der Natur unterscheidet. Das Äquivalenzprinzip gilt strenggenommen nur in idealisierter Form, so daß es nicht wirklich befriedigend zu formulieren ist. Es ist ein heuristisches Prinzip, welches historisch auf den richtigen mathematisches Rahmen der Gravitationstheorie geführt hat. Genauere Experimente haben im Laufe von 100 Jahren die Einsteinsche Gravitationstheorie exzellent bestätigt und alle Alternativen verworfen.

1 Formulierungen

Man kann die Ausgangslage wohl nicht besser formulieren als Einstein selbst in seiner Schrift "Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie":

Das Gravitationsfeld weist im Gegensatz zum elektrischen und magnetischen Felde eine höchst merkwürdige Eigenschaft auf, welche für das Folgende von fundamentaler Bedeutung ist. Körper, die sich unter ausschließlicher Wirkung des Schwerefeldes bewegen, erfahren eine Beschleunigung, *welche weder vom Material noch vom physikalischen Zustande des Körpers im geringsten abhängt*. Ein Stück Blei und ein Stück Holz fallen beispielsweise in Schwerefelde (im luftleeren Raume) genau gleich, wenn man sie ohne bzw. mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit fallen läßt. Man kann dies äußerst genau gültige Gesetz auch noch anders formulieren auf Grund folgender Erwägung.

Nach Newtons Bewegungsgesetz ist

$$(\text{Kraft}) = (\text{träge Masse}) \cdot (\text{Beschleunigung}),$$

wobei die „träge Masse" eine charakteristische Konstante des beschleunigten Körpers ist. Ist nun die beschleunigende Kraft die Schwere, so ist andererseits

$$(\text{Kraft}) = (\text{schwere Masse}) \cdot (\text{Intensität des Schwerefeldes}),$$

wobei die „schwere Masse" ebenfalls eine für den Körper charakteristische Konstante ist. Aus beiden Relationen folgt

$$(\text{Beschleunigung}) = \frac{(\text{schwere Masse})}{(\text{träge Masse})} \cdot (\text{Intensität des Schwerefeldes}).$$

Soll nun, wie die Erfahrung ergibt, bei gegebenem Schwerefelde die Beschleunigung unabhängig von der Natur und dem Zustande des Körpers stets dieselbe sein, so muß das Verhältnis der schweren zur trägen Masse ebenfalls für alle Körper gleich sein. Man kann also dies Verhältnis durch passende Wahl der Einheiten zu 1 machen; dann gilt der Satz: Die *schwere* und die *träge* Masse eines Körpers sind einander gleich.

Die bisherige Mechanik hat diesen wichtigen Satz zwar *registriert*, aber nicht *interpretiert*. Eine befriedigende Interpretation kann nur so zustande kommen, daß man einsieht: *Dieselbe* Qualität des Körpers äußert sich je nach Umständen als „Trägheit" oder als „Schwere".

Man diskutiert nun zwei (voneinander abhängige) Gedankenexperimente:

i) Ein Labor sei an einen Punkt im Universum gebracht, in dem es keine Gravitationskraft gibt. Der Experimentator bestätigt das Trägheitsgesetz, d.h. ein kräftefreier Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich gleichförmig geradlinig. Jetzt wird das Labor von außen mit konstanter Kraft gezogen, somit gleichmäßig beschleunigt. Nach dem Äquivalenzprinzip wird der Experimentator zur Schlußfolgerung kommen, daß das Labor in einem homogenen Gravitationsfeld ruht.

ii) Das Labor wird in einem Gravitationsfeld fallengelassen, was heute tatsächlich realisiert ist z.B. in der Raumstation (ISS, Mir, ...) bei abgeschalteten Triebwerken und Vernachlässigung der Reibung in der oberen Atmosphäre. Der Experimentator bestätigt wieder das Trägheitsgesetz. Falls es keine Fenster gibt, kann der Experimentator nicht unterscheiden, ob er sich an einem Punkt im Universum ohne Gravitationsfeld befindet, oder ob er in einem nahezu homogenen Gravitationsfeld frei fällt.

Hierzu einige Bemerkungen.

- Reale 'Gravitationsfelder' sind nicht homogen. Der Beobachter wird minimale Unterschiede bei Experimenten am Boden oder an der Decke feststellen, außerdem Gezeiteneffekte an verschiedenen Wänden. Wenn wir das Äquivalenzprinzip etwas präziser formulieren, müssen wir von lokalen Experimenten an einem einzigen Punkt (mit bestenfalls infinitesimaler Umgebung) sprechen. Strenggenommen läßt sich auch lokal ein nichthomogenes 'Gravitationsfeld' als solches erkennen!

- Das Äquivalenzprinzip wird für *Testkörper* und allgemein 'Testphysik' formuliert. Damit ist gemeint, daß die Rückwirkung des Testkörpers oder des Labors auf das äußere Gravitationsfeld vernachlässigt wird, bzw. daß das Labor kein eigenes Gravitationsfeld erzeugt, falls es solches ohne Labor nicht vorhanden ist. In der Realität gibt es immer eine Rückwirkung, so daß hier eine mathematische Idealisierung betrachtet wird. Gegebenenfalls müßte man eine Folge immer kleinerer werdender Labore untersuchen und den Limes ermitteln.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir festhalten:

1.1 Äquivalenzprinzip. *Lokale Experimente von einer gewissen Art mit Testkörpern können nicht unterscheiden, ob das Experiment in einem Labor durchgeführt wird, das in einem Gravitationsfeld frei fällt, oder ob es im Labor kein Gravitationsfeld gibt.*

Die physikalischen Gesetze können deshalb lokal in ein Bezugssystem transformiert werden, in dem die spezielle Relativitätstheorie gilt.

Der Grund, sich auf Experimente 'gewisser Art' einzuschränken, liegt am sehr unterschiedlichen Grad der experimentellen Überprüfung. Das soll nun etwas präzisiert werden[1]:

- *schwaches Äquivalenzprinzip (WEP)*: beschränkt auf die Mechanik von Testkörpern ohne Selbstgravitation im äußeren Gravitationsfeld.
- *Einsteinsches Äquivalenzprinzip (EEP)*: Die fundamentalen Gesetze der nichtgravitationellen Physik, sofern sie Testcharakter haben, sind an jedem Punkt der Raumzeit lokal blind gegenüber Gravitationsfeldern.
- *Starkes Äquivalenzprinzip (SEP)*: Wie Einstein, nur daß Gravitationsphysik selbst zugelassen ist.

Die Abgrenzungen sind nicht immer ganz klar in der Literatur. Das WEP ist experimentell mit großer Genauigkeit überprüft. Es läßt jedoch viele alternative Gravitationstheorien zu. Das EEP betont eine andere Richtung, nämlich z.B. die Maxwellschen Gleichungen und allgemein die klassischen Feldtheorien, die der Elementarteilchenphysik zugrunde liegen. Außerdem wird implizit gefordert, daß die Naturkonstanten überall im Universum und zu allen Zeiten die gleichen sind. Einerseits geht es darum, zusammengesetzte Körper auszuschließen, mit denen man selbst infinitesimal Gezeitenkräfte messen kann. Die eigentliche Motivation für EEP ist, daß man die fundamentale Physik im Minkowski-Raum sehr gut kennt. Nach EEP kann man nichtgravitationelle fundamentale Physik lokal immer auf einen Minkowski-Raum transformieren. Damit muß die Gravitationstheorie eine metrische sein, zumindest in ihrer Wirkung auf fundamentale Physik. Was metrisch heißt, wird später diskutiert.

Die genaue Form der Feldgleichungen für die Gravitation ist damit noch nicht festgelegt. Es könnte auch noch zusätzliche Skalarfelder geben, welche ein zentraler Teil der Gravitation sind, aber eben nicht an die sonstige fundamentale Physik koppeln. Andererseits schließt das EEP einiges aus, was problemlos mit der Einsteinschen Gravitationstheorie kompatibel wäre, wie Kopplungen von Teilchen mit Spin an den Riemanntensor oder eine konforme Kopplung von Skalarfeldern an den Krümmungsskalar (beide führen wir im Laufe der Vorlesung ein). Das SEP scheint nur mit der Einsteinschen Gravitationstheorie kompatibel zu sein. Einige Autoren gehen sogar soweit, daß in 4 Dimensionen sogar die Feldgleichungen festgelegt sind.

[1] Wir folgen in Teilen der Arbeit: E. Di Casola, S. Liberati & S. Sonego, "Nonequivalence of equivalence principles," Am. J. Phys. **83** (2015) 39 [arXiv:1310.7426 [gr-qc]].

Alle Beobachtungen sind kompatibel mit der Annahme, daß die Einsteinschen Gravitationstheorie exakt gilt. Aus theoretischer Sicht wäre das problemeatisch, da in extremen Situationen die rein metrische Gravitation nicht mit den Gesetzen der Quantenphsik kompatibel sein kann. Die Suche nach einer konsistenten Theorie der Quantengravitation ist eines der großen Forschungsprogramme in der theoretischen Physik.

2 Beschleunigte Bezugssysteme im Minkowski-Raum

Daß Beschleunigungen die Geometrie ändern, sieht man durch folgende Überlegung. Betrachte eine Scheibe vom Radius r, die mit Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Ein mitrotierender Beobachter, für den die Scheibe ruht, überzeugt sich durch Längenmessungen von der üblichen Beziehung $u = 2\pi r$ für den Umfang der Scheibe. Ein äußerer Beobachter wird denselben Radius messen, da die Scheibe keine radiale Bewegung ausführt. Dagegen ist die Rotation eine tangentiale Bewegung, die am Umfang der Geschwindigkeit $v = r\omega$ entspricht. Entsprechend sind infinitesimale Tangenten nach der speziellen Relativitätstheorie um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ verkürzt, so daß der äußere Beobachter nach Ausführen der Integration den Umfang der Scheibe zu $u' = 2\pi r\sqrt{1 - \omega^2 r^2/c^2}$ bestimmt. Einen ähnlichen Effekt findet man bei Kreisen auf der Kugeloberfläche: Legen wir den Kreismittelpunkt in den Nordpol N und laufen die Strecke r in beliebige Richtung, so erreichen wir den Breitengrad $\alpha = \frac{r}{R}$, falls die Winkelmessung bei N beginnt und R der Radius der Kugel ist. Der Umfang des Breitenkreises α ist $u = 2\pi R \sin\alpha = 2\pi r \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 2\pi r$.

Solche nichteuklidischen Geometrien wurden erstmals 1813 von Gauß verstanden. Gauß konnte zeigen, daß man die Frage, ob und wie ein Raum gekrümmt ist, allein durch Messungen im Raum entschieden kann. Im obigen Beispiel heißt das folgendes: Zwar kann man die Kugel (isometrisch) in den $\mathbb{R}^3$ einbetten und durch dreidimensionalen Blick von außen die Krümmung bestimmen. Aber auch zweidimensionale Wesen können allein durch lokale geometrische Messungen in der Ebene das Verhältnis $\frac{u}{2\pi r} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ messen, daraus α ermitteln und zusammen mit der Information über r den Krümmungsradius R berechnen. Die in größter Allgemeinheit anzuwendenden Methoden wurden dann von Riemann 1854 ausgearbeitet. Beim freien Fall im Gravitationfeld handelt es sich um geodätische Bewegung in einem gekrümmten Raum. Die Krümmung kann allein durch Messungen im Raum selbst ermittelt werden; es besteht keinerlei Notwendigkeit, ihn als Untermannigfaltigkeit in einen höherdimensionalen $\mathbb{R}^N$ einzubetten.

Die zu betrachtende Geometrie in der Physik unterscheidet sich von der Riemannschen Geometrie durch die zusätzliche *kausale Struktur*. Wir führen diese zunächst für den Minkowski-Raum ein.

Definition 2.1 i) Als *Minkowski-Raum* $\mathbb{R}^{1,D-1}$, $D \geq 2$, bezeichnet man den Euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^D, \langle\ ,\ \rangle)$ zusammen mit einer linearen symmetri-

schen Abbildung $\eta = \eta^t : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$, deren Eigenwerte $\{+1, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{D-1}\}$ sind. Einer der beiden Eigenvektoren $e_0 = \eta(e_0) \in \mathbb{R}^D$ mit $\langle e_0, e_0\rangle = 1$ werde als *Zeitrichtung* ausgezeichnet.

ii) Ein Endomorphismus $\Lambda \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^D)$ heißt *Lorentz-Transformation*, falls $\langle \Lambda x, \eta(\Lambda y)\rangle = \langle x, \eta(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^D$.

iii) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine (stückweise) differenzierbare Kurve $I \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \mathbb{R}^D$ heißt *kausal*, falls für den Tangentialvektor gilt $\langle \dot\gamma(\tau), \eta(\dot\gamma(\tau))\rangle \geq 0$ und $\langle \dot\gamma(\tau), e_0\rangle > 0$ für alle $\tau \in I$. Wir nennen eine kausale Kurve *zeitartig*, falls sogar $\langle \dot\gamma, \eta(\dot\gamma)\rangle > 0$ für alle $\tau \in I$, und *rein lichtartig* für $\langle \dot\gamma, \eta(\dot\gamma)\rangle = 0$ für alle $\tau \in I$.

iv) Die Teilmenge

$$\mathcal{V}_x^+ = \{y \in \mathbb{R}^D \ : \ \exists \text{ differenzierbare kausale Kurve } [\alpha, \beta] \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \mathbb{R}^D \text{ mit } \gamma(\alpha) = x \text{ und } \gamma(\beta) = y\}$$

heißt *Zukunftskegel* von $x \in \mathbb{R}^D$. Die Familie $\{\mathcal{V}_x^+ \ : \ x \in \mathbb{R}^D\}$ heißt *kausale Struktur* des Minkowski-Raums $\mathbb{R}^{1,D-1} = (\mathbb{R}^D, \eta)$.

Hierzu einige Bemerkungen.

- Die Menge aller Lorentz-Transformationen bildet eine Gruppe, die $O(1, D-1)$: Wegen der Nichtausgeartetheit der Bilinearform $(x, y) \mapsto \langle x, \eta(y)\rangle$ läßt sich die Invarianz schreiben als $\Lambda^t \circ \eta \circ \Lambda = \eta$, woraus nach Determinantenbildung $(\det \Lambda)^2 = 1$ folgt. Damit ist Λ invertierbar.

- Ergänzt man e_0 zu einer ONB $(e_0, e_1, \ldots, e_{D-1})$, dann folgt $\eta(e_i) = -e_i$ für $i = 1, \ldots, D-1$. Mit der darstellenden Matrix $\Lambda(e_0) = \sum_{\mu=0}^{D-1} \Lambda_{\mu 0} e_\mu$ ergibt sich aus $\langle \Lambda(e_0), \eta(\Lambda(e_0))\rangle = \langle e_0, \eta(e_0)\rangle = 1$ die Relation $\Lambda_{00}^2 - \sum_{i=1}^{D-1} \Lambda_{i0}^2 = 1$. Daraus folgt einerseits $\langle e_0, \Lambda(e_0)\rangle^2 = \Lambda_{00}^2 \geq 1$ und für die Komposition von zwei Lorentz-Transformationen

$$(\Lambda \circ \Lambda')_{00} = \Lambda_{00}\Lambda'_{00} - \sum_{i=1}^{D-1} \Lambda_{i0}\Lambda'_{i0} \geq \Lambda_{00}\Lambda'_{00} - \sqrt{\Lambda_{00}^2 - 1}\sqrt{(\Lambda'_{00})^2 - 1}$$

nach Cauchy-Schwarz. Ist $\Lambda_{00} = \cosh(\alpha) > 1$ und $\Lambda'_{00} = \cosh(\beta) > 1$, so $(\Lambda \circ \Lambda')_{00} \geq \cosh(\alpha - \beta) \geq 1$. Somit darf man sich konsistent auf die Untergruppe $SO_+(1, D-1)$ der eigentlichen (speziellen, orthochronen) Lorentz-Transformationen mit $\det \Lambda = 1$ und $\langle e_0, \Lambda(e_0)\rangle \geq 1$ einschränken.

- Mit γ ist auch $\Lambda(\gamma)$ kausal für eine eigentliche Lorentz-Transformation $\Lambda \in SO_+(1, D-1)$.

Definition 2.2 Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^{1,D-1}$ eine stückweise differenzierbare kausale Kurve mit $\gamma(\alpha) = x$ und $\gamma(\beta) = y$. Dann heißt $\tau(x, y) := \int_\alpha^\beta d\tau \, \sqrt{\langle \dot\gamma(\tau), \eta(\dot\gamma(\tau))\rangle}$ die *Eigenzeitdifferenz* längs γ.

Das Integral $\tau(x, y)$ ist invariant unter Reparametrisierungen $I \ni \tau \mapsto \vartheta(\tau) \in J$ mit $\dot\vartheta(\tau) > 0$. Ist die Kurve sogar zeitartig, so kann man die Kurve auf Eigenzeit reparametrisieren, d.h. (nach Rücksubstitution zu den alten Variablen) gilt $\langle \dot\gamma(\tau), \eta(\dot\gamma(\tau))\rangle = 1$ und $\tau(x, y) = \beta - \alpha$.

Solche zeitartigen Kurven beschreiben die 'Weltlinien' von Beobachtern. Für einen räumlich ruhenden Beobachter (im Punkt x) läuft dennoch eine Zeitevolution ab, d.h. er beschreibt eine Kurve $\gamma(\tau) = x + \tau e_0$ in seinem eigenen Koordinatensystem. Ein dazu mit konstanter Geschwindigkeit bewegter Beobachter sieht diese Kurve als Lorentz-Transformation

$$\gamma'(\tau) := \Lambda(\gamma(\tau)) = \Lambda(x) + \tau\Lambda(e_0) \, .$$

Wir suchen nun die Kurve $\mathbb{R}_+ \ni \tau \mapsto \gamma(\tau) \in \mathbb{R}^{1,D-1}$, die einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung entspricht. Als Anfangsdaten dürfen wir $\gamma(0) = 0$ und $\dot\gamma(0) = e_0$ wählen, d.h. einen zur Eigenzeit $\tau = 0$ im Ursprung ruhenden Beobachter. Die Beschleunigung ist offenbar $\ddot\gamma(\tau) \in \mathbb{R}^D$. Zum Eigenzeitpunkt $\tau = 0$ soll die Beschleunigung räumlich konstant sein, d.h. $\dddot\gamma(0)$ hat höchstens eine zeitliche Komponente: $\dddot\gamma(0) = Fe_0 = F\dot\gamma(0)$ für eine Konstante $F \in \mathbb{R}$. Diese Gleichung muß jedoch für alle Eigenzeiten richtig bleiben, da wir durch eine geeignete Kombination aus Lorentz-Transformation und Raum-Zeit-Translation den neuen Ursprung in den Kurvenpunkt legen dürfen. Dann heißt Konstanz der Beschleunigung, daß F konstant ist, also gilt für alle τ:

$$\dddot\gamma(\tau) = F\dot\gamma(\tau) \quad \Rightarrow \quad \ddot\gamma(\tau) = F(\gamma(\tau) + x)$$

für einen konstanten Vektor $x \in \mathbb{R}^D$. Wir setzen $F = g^2$ und integrieren die letzte Gleichung zu

$$\gamma(\tau) = y\cosh(g\tau) + y'\sinh(g\tau) - x$$

mit weiteren konstanten Vektoren $y, y' \in \mathbb{R}^D$. Die Anfangsdaten bei $\tau = 0$ liefern $x = y$ und $gy' = e_0$. Aus $\langle \dot\gamma, \eta(\dot\gamma)\rangle = 1$ folgt $\langle \ddot\gamma(\tau), \eta(\dot\gamma(\tau))\rangle = 0$, was für $\tau = 0$ auf $\langle x, e_0\rangle = 0$ hinausläuft. Damit ist $\eta(x) = -x$, woraus nach Einsetzen in $\langle \dot\gamma, \eta(\dot\gamma)\rangle = 1$ schließlich folgt: $\langle x, x\rangle = \frac{1}{g^2}$. Legen wir die Bewegung in die e_0-e_1-Ebene, so erhalten wir das Endergebnis

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{g}\sinh(g\tau)e_0 + \frac{1}{g}\big(\cosh(g\tau) - 1\big)e_1 \, . \tag{2.1}$$

Für kleine Zeiten τ, also noch geringen Geschwindigkeiten, finden wir $\gamma(\tau) \approx \frac{g}{2}\tau^2 e_1 + \tau e_0 + \mathcal{O}(\tau^3)$, so daß g ein Maß für die Beschleunigung ist.

Diese Gleichung (2.1) erlaubt folgende wichtige Interpretation: Wir fassen Lorentz-Transformationen $\Lambda \in SO_+(1, D-1)$ Verschiebungen $a \in \mathbb{R}^D$ zur Poincaré-Transformation (Λ, a) zusammen. Diese wirken auf $x \in \mathbb{R}^{1,D-1}$ gemäß

$$(\Lambda, a)(x) := \Lambda x + a \ .$$

Mit diesen Bezeichnungen entsteht aus (2.1)

$$\gamma(\tau) = (\Lambda_{g\tau}, -\tfrac{1}{g}e_1)(\tfrac{1}{g}e_1) \ , \tag{2.2}$$

wobei Λ_v die Lorentz-Transformation in der e_0-e_1-Ebene zum Parameter v ist:

$$\begin{aligned} \Lambda_v(e_0) &= \cosh(v)e_0 + \sinh(v)e_1 \ , \\ \Lambda_v(e_1) &= \sinh(v)e_0 + \cosh(v)e_1 \ , \qquad\qquad \Lambda_v(e_j) = e_j \text{ für } j \geq 2 \ . \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.2) ist plausibel: $v = g\tau$ ist für kleine τ der Geschwindigkeitszuwachs zur Zeit τ; der Übergang zu einem mit Relativgeschwindigkeit v bewegten Bezugssystem erfolgt gerade durch Lorentz-Transformation Λ_v. Die zusätzliche Verschiebung um $-\frac{1}{g}e_1$ ergibt sich aus den Anfangsbedingungen.

Wenn wir nun nicht nur einen Massepunkt, sondern ein ausgedehntes Labor mit räumlichen Koordinaten[2] $\vec{\xi} = \sum_{i=1}^{D-1} \xi^i e_i$ gleichmäßig beschleunigen, so muß die Weltline der anderen Laborpunkte sich durch dieselbe Poincaré-Transformation $(\Lambda_{g\tau}, -\frac{1}{g}e_1)$ ergeben. Aus den Anfangsbedingungen folgt, daß dabei der Punkt $\frac{1}{g}e_1 + \vec{\xi}$ zu transformieren ist:

$$\begin{aligned} \gamma_{\vec{\xi}}(\tau) &= (\Lambda_{g\tau}, -\tfrac{1}{g}e_1)(\tfrac{1}{g}e_1 + \vec{\xi}) \\ &= (\tfrac{1}{g} + \xi^1)\sinh(g\tau)e_0 + \Big((\tfrac{1}{g} + \xi^1)\cosh(g\tau) - \tfrac{1}{g}\Big)e_1 + \sum_{i=2}^{D-1} \xi^i e_i \ . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Mit dieser Formel sind bemerkenswerte Effekte verbunden:

- Die Eigenzeitdifferenz

  $$\int_\alpha^\beta d\tau \sqrt{\langle \dot\gamma_{\vec\xi}, \eta(\dot\gamma_{\vec\xi})\rangle} = (1 + g\xi^1)(\beta - \alpha)$$

  wird höhenabhängig.

- Die Kurve $\gamma_{\vec\xi}(\tau)$ beschreibt für $\frac{1}{g} + \xi^1 > 0$ eine Hyperbel, die sich asymptotisch der Geraden $-\frac{1}{g} + \tau'(e_0 + e_1)$ nähert. Diese liegt auf dem Rand von $\mathcal{V}_{-\frac{1}{g}e_1}$. Ein im Punkt $-x^1e_1$ mit $x^1 \geq \frac{1}{g}$ ausgandtes Lichtsignal kann den beschleunigten Beobachter niemals erreichen. So etwas nennt man einen *Ereignishorizont*.

[2] Die Wahl hochgestellter Indizes wird sich später als sinnvoll erweisen.

Eine weitere Schlußfolgerung erfordert mathematische Strukturen, die erst später ausführlich eingeführt werden. Die aus (2.3) abzulesenen Koordinaten des Punkts $\gamma_{\vec{\xi}}$ in der gewählten Basis $(e_0, e_1, \ldots, e_{D-1})$ definieren folgenden Satz von D Funktionen auf dem Minkowski-Raum:

$$\begin{aligned} x^0 &:= (\tfrac{1}{g} + \xi^1)\sinh(g\tau) \ , \\ x^1 &:= (\tfrac{1}{g} + \xi^1)\cosh(g\tau) - \tfrac{1}{g} \ , \qquad x^i := \xi^i \text{ für } 2 \le i \le D-1 \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Derselbe Punkt $\gamma_{\vec{\xi}}$ hat im mitbeschleunigten Koordinatensystem die Koordinaten

$$\xi^0 := \tau \ , \qquad \xi^i := \xi^i \text{ für } 1 \le i \le D-1 \ . \tag{2.5}$$

Die Differentiale dieser Funktionen liefert sogenante 1-Formen, welche längs Kurven integriert werden können. Setzen wir (2.5) in (2.4) ein, so ergibt Differenzieren:

$$\begin{aligned} dx^0 &= \sinh(g\xi^0)d\xi^1 + (1+g\xi^1)\cosh(g\xi^0)d\xi^0 \ , \\ dx^1 &= \cosh(g\xi^0)d\xi^1 + (1+g\xi^1)\sinh(g\xi^0)d\xi^0 \ , \qquad dx^i = d\xi^i \text{ für } i \ge 2 \ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \ldots (dx^{D-1})^2 &= (1+g\xi_1)^2(d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - \ldots (d\xi^{D-1})^2 \ , \\ \text{oder} \quad \sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(\xi) d\xi^\mu d\xi^\nu \end{aligned} \tag{2.7}$$

mit den einzigen nichtverschwindenden Komponenten

$$\eta_{00} = 1 \ , \quad g_{00}(\xi) = (1+g\xi^1)^2 \ , \quad \eta_{ii} = g_{ii}(\xi) = -1 \quad \text{für } i = 1, \ldots, D-1 \ . \tag{2.8}$$

Die Koordinaten ξ^μ heißen auch *Rindler-Koordinaten*, der die damit erfaßte Geometrie heißt *Rindler-Raum*.

Wir werden später sehen, daß ein solches symmetrisches Produkt der Koordinatendifferentiale eine fundamentale geometrische Größe ist. Die linke Seite reflektiert die zuvor durch $\eta \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^D)$ eingeführte kausale Struktur des Minkowski-Raums. Die rechte Seite hat zwar gleiche Vorzeichen und damit eine ähnliche kausale Struktur; aber es gibt eine ortsabhängige Deformation im mitbeschleunigten Bezugssystem.

Beispiel 2.3 Eine verwandte Situation trifft man im $\mathbb{R}^3$ bei Verwendung von Kugelkoordinaten an:

$$x^1 = r\sin\vartheta\cos\varphi \ , \quad x^2 = r\sin\vartheta\sin\varphi \ , \quad x^3 = r\cos\vartheta$$

und daraus

$$\begin{aligned} dx^1 &= \sin\vartheta\cos\varphi\, dr + r\cos\vartheta\cos\varphi\, d\vartheta - r\sin\vartheta\sin\varphi\, d\varphi\ , \\ dx^2 &= \sin\vartheta\sin\varphi\, dr + r\cos\vartheta\sin\varphi\, d\vartheta + r\sin\vartheta\cos\varphi\, d\varphi\ , \\ dx^3 &= \cos\vartheta\, dr - r\sin\vartheta\, d\vartheta\ . \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung zeigt

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3) := (dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2 + r^2\sin^2\vartheta(d\varphi)^2\ . \tag{2.9}$$

Nennen wir jetzt $r = \xi^1,\ \vartheta = \xi^2,\ \varphi = \xi^3$, so schreibt sich die letzte Gleichung als

$$\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j$$

mit den einzigen nichtverschwindenden Komponenten

$$g_{11}(\xi) = 1\ , \qquad g_{22}(\xi) = (\xi^1)^2\ , \qquad g_{33}(\xi) = (\xi^1)^2\sin^2\xi^2\ .tag \tag{2.10}$$

◁

Nach dem Allgemeinen Relativitätsprinzip sind beliebige Bezugssysteme zur Beschreibung der Physik zugelassen. Wir lernen, daß die damit verbundenen Effekte durch die Größen $g_{\mu\nu}(\xi)$ erfaßt werden.

3 Physikalische Effekte in homogenen Gravitationsfeldern

Wir interpretieren nun die zuvor beschriebene gleichmäßig beschleunigte Bewegung als ein im Gravitationsfeld ruhendes System.

3.1 Gravitative Frequenzänderung

Die Eigenzeitdifferenz eines sich auf der Weltlinie $\gamma(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{D-1} x^\mu(\lambda) e_\mu$ bewegenden Beobachters im Minkowski-Raum war

$$\begin{aligned} \Delta s &= \int_\alpha^\beta d\lambda \sqrt{\Big\langle \frac{d\gamma}{d\lambda}, \eta\Big(\frac{d\gamma}{d\lambda}\Big)\Big\rangle} = \int_\alpha^\beta d\lambda \sqrt{\sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} \eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} \\ &= \int_\alpha^\beta d\lambda \sqrt{\sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(\xi)\frac{d\xi^\mu}{d\lambda}\frac{d\xi^\nu}{d\lambda}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Der Kurvenparameter λ spielt wegen der Reparametrisierungsinvarianz keine Rolle; die Intervallgrenzen reflektieren nur die Kurvenparameter der Endpunkte der Kurve. Längs der Kurve werde eine Uhr transportiert, d.h. ein periodischer Vorgang. Wir nehmen die Uhr als räumlich ruhend im mitbeschleunigten System

an, $\xi^i = \text{const}$, äquivalent als im Gravitationsfeld ruhend. Somit ist $d\xi^i = 0$ für $i = 1, \ldots, D-1$. Als Kurvenparameter können wir $\lambda = \tau = \xi^0$ wählen. Der periodische Vorgang habe im mitbeschleunigten System die Periode $\Delta\tau = \beta - \alpha = 1$, die dann im ruhenden System als $\Delta s = \sqrt{g_{00}(\xi)}\Delta\tau$ erscheint. Die Gleichung ist nun umgekehrt zu lesen: Wird die Uhr im feldfreien Minkowski-Raum mit Periode Δs hergestellt, so hat sie am Punkt $\vec{\xi}$ im homogenen Gravitationsfeld (der Richtung $-e_1$ und Stärke g) die Periode

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{\sqrt{g_{00}(\xi)}} = \frac{\Delta s}{1 + \frac{g\xi^1}{c^2}} \,, \tag{3.2}$$

wobei wir die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ explizit mitgenommen haben.

Es ist zu betonen, daß diese Periodenänderung lokal an einem Punkt nicht beobachtet werden kann. Die Sekunde ist definiert über eine gewisse Periodenzahl von Übergängen im Cäsiumatom, und in dieser Einheit messen wir die Periode der Uhr. Bringen wir jetzt das Cäsium-Atom und die Uhr an den Punkt $\vec{\xi}$ im Gravitationsfeld $-ge_1$, so hat die Uhr wieder nach Äquivalenzprinzip dieselbe Periode in Sekunden.

Gangunterschiede ergeben sich nur bei Differenzen in der Höhe ξ^1. Wir bringen wir einen Sender elektromagnetischer Wellen in Höhe ξ^1_B an, der dort die Periode $\Delta\tau_B := \frac{\Delta s}{1+\frac{g\xi^1_B}{c^2}}$ hat, falls er im Minkowski-Raum mit Periode Δs versehen wurde. Die Zeitdifferenz $\Delta\tau_B$ entspricht der Zeit zwischen zwei Scheiteln der elektromagnetischen Welle. Da nachfolgende Scheitel die gleiche Zeit für den Weg von ξ^1_B nach ξ^1_A brauchen, kommen sie in ξ^1_A mit genau dieser Zeitdifferenz $\Delta\tau_B := \frac{\Delta s}{1+\frac{g\xi^1_B}{c^2}}$ an. Derselbe Sender Δs hat dort jedoch die Periode $\Delta\tau_A := \frac{\Delta s}{1+\frac{g\xi^1_A}{c^2}}$. Umgerechnet auf Frequenzen entsteht eine Frequenzverschiebung

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \frac{1 + \frac{g\xi^1_B}{c^2}}{1 + \frac{g\xi^1_A}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} := \frac{\nu_B - \nu_A}{\nu_A} \approx \frac{g}{c^2}(\xi^1_B - \xi^1_A) \,. \tag{3.3}$$

Die Vorhersage wurde 1960 von Pound und Rebka in einem 22,56 m hohen Turm überprüft, indem sie die Verstimmung einer infolge des Mößbauereffekts sehr schmalen Resonanz gemessen haben. Die erwartete Frequenzänderung $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2.5 \cdot 10^{-15}$ konnte bestätigt werden.

Wegen

$$g(\xi^1_B - \xi^1_A) = -\int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{r} = \Phi_B - \Phi_A \tag{3.4}$$

können wir die Frequenzänderung interpretieren als hervorgerufen durch die Differenz der gravitativen Potentiale. Diese Korrespondenz erlaubt Abschätzungen für Fälle, in denen das Gravitationsfeld nicht mehr als homogen angesehen werden darf, wie z.B. für die GPS-Satelliten. Sind $R_E = 6360\,\text{km}$ der mittlere Radius und

M_E die Masse der Erde und $H = 20200\,\mathrm{km}$ die Bahnhöhe über Erdoberfläche, so erwarten wir

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{G_N M_E}{c^2}\Big(\frac{1}{R_E+H} - \frac{1}{R_E}\Big) = \frac{G_N M_E}{R_E^2 c^2}\frac{HR_E}{R_E+H} = \frac{g}{c^2}\frac{HR_E}{R_E+H} = 5.3\cdot 10^{-10}\ . \tag{3.5}$$

Um diesen Prozentsatz geht die Uhr in den Satelliten schneller, wenn wir nur die gravitativen Effekte berücksichtigen. Andererseits haben sie bei einer Umlaufzeit von $T = 12$ Stunden relativ zur Erde eine Bahngeschwindigkeit $2\pi(R_E+H)/T$ und damit eine speziell-relativistische Frequenzverlangsamung

$$\Big(\frac{\Delta\nu}{\nu}\Big)_{SRT} = \sqrt{1 - \frac{4\pi^2(R_E+H)^2}{c^2T^2}} - 1 = -8.3\cdot 10^{-11}\ .$$

Der gravitative Effekt überwiegt.

Man kann sich von der Richtigkeit der gravitativen Frequenzänderung auch wie folgt überzeugen: Ein Teilchen der Masse m werde aus der Höhe ξ^1 fallengelassen. Seine Gesamtenergie bei der Höhe 0 ist $E = mc^2 + mg\xi^1$. Diese wird in ein Photon der Frequenz $\nu_B = \frac{mc^2+mg\xi^1}{h}$ umgewandelt, das zurück auf die Höhe ξ^1 gestrahlt wird. Dabei ist h das Plancksche Wirkungsquantum. Nach Energieerhaltungssatz darf das Photon in der Höhe ξ^1 nur mit Frequenz $\nu_A = \frac{mc^2}{h}$ ankommen, also $\frac{\nu_B-\nu_A}{\nu_A} = \frac{g\xi^1}{c^2}$. Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit der gravitativen Frequenzverschiebung, daß die Energie eines Photons proportional zur Frequenz sein muß.

3.2 Gravitativer Ereignishorizont

Signale, die von unterhalb einer kritischen Tiefe $\xi_H = -\frac{c^2}{g}$ gesandt werden, können den Beobachter im Punkt 0 nicht erreichen. Für die Erde ist die kritische Tiefe $|\xi_E| = 9.2\cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$ und hat keinerlei Relevanz. Ganz anders bei Neutronensternen. Bei einer typischen Masse von 1.5 Sonnenmassen ($M = 3\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$) und typischen Radien von $R = 10\,\mathrm{km} = 10^4\,\mathrm{m}$ resultiert eine Schwerebeschleunigung von $g = \frac{G_N M}{R^2} = 2\cdot 10^{12}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ an der Sternoberfläche, somit eine kritische Tiefe von $|\xi_N| = 45\,\mathrm{km}$. Diese kommt dem tatsächlichen Radius gefährlich nahe. Bei deutlich größerer Masse, damit verbunden nicht wesentlich anderem Radius (die Dichte wächst) entsteht irgendwann $R = \xi_H$, und der Stern verschwindet unter seinem Ereignishorizont: Ein *schwarzes Loch* wird gebildet. Natürlich ist hier das Gravitationsfeld exakter zu behandeln (es ist ganz sicher nicht homogen) und auch die Materialgleichungen werden wichtig, die die Abhängigkeit der Dichte von der Masse beschreiben. Das Ergebnis bestätigt jedoch die Überschlagsrechnung: Die Grenze liegt bei etwa 2.5 Sonnenmassen.

4 Die Geodätengleichung

4.1 Herleitung

Wir sind an dieser Stelle nur an der Bahnkurve von Licht im homogenen Gravitationsfeld interessiert. Es bereitet jedoch kaum Mehraufwand, den allgemeinen Fall durchzurechnen. Dadurch ersparen wir uns später doppelte Arbeit.

Wir haben gesehen, daß sich Zeitintervalle im Gravitationsfeld gemäß $\Delta\tau = \frac{\Delta s}{1+\frac{g\xi^1}{c^2}}$ ändern. Diese Änderung beeinflußt die Laufzeiten von Wegen. Wenn wir gemäß dem Prinzip von Fermat postulieren, daß das Licht einen zeitlich extremalen Weg zwischen zwei Punkten nimmt, dann wird dieser Weg im Gravitationsfeld i.a. keine Gerade mehr sein. Die Eigenzeitdifferenz zwischen End- und Anfangspunkt einer Kurve $\lambda \mapsto \sum_{\mu=0}^{D-1} \xi^\mu(\lambda) e_\mu$ berechnet sich nach (3.1) zu $\Delta s = \int_\alpha^\beta d\lambda \sqrt{\sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(\xi) \frac{d\xi^\mu}{d\lambda}\frac{d\xi^\nu}{d\lambda}}$. Diese soll für den tatsächlich gewählten Weg zu festgehaltenen *räumlichen* Anfangs- und Endpunkten stationär sein. Das Variationsproblem entspricht deshalb exakt jenem der klassischen Mechanik, wenn wir als Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\xi(\lambda), \dot\xi(\lambda)) = \sqrt{\mathcal{E}(\xi,\dot\xi)}$ mit $\mathcal{E}(\xi,\dot\xi) := \sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(\xi)\dot\xi^\mu\dot\xi^\nu$ und $\dot\xi^\mu := \frac{d\xi^\mu}{d\lambda}$ wählen. Die Lösung gewinnt man deshalb aus den D Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}(\xi,\dot\xi)}{\partial\dot\xi^\mu} - \frac{\partial\mathcal{L}(\xi,\dot\xi)}{\partial\xi^\mu} \\ &= \frac{d}{d\lambda}\Big(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}\sum_{\nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(\xi)\dot\xi^\nu\Big) - \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}}}\sum_{\nu,\sigma=0}^{D-1}\frac{\partial g_{\nu\sigma}(\xi)}{\partial\xi^\mu}\dot\xi^\nu\dot\xi^\sigma\ . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die weitere Rechnung wird durch folgende Überlegung entscheidend vereinfacht: Der Kurvenparameter λ war wegen Reparametrisierungsinvarianz beliebig. Wir haben deshalb die Freiheit, ihn für die Lösungskurve so zu wählen, daß $\mathcal{E}(\xi(\lambda),\dot\xi(\lambda))$ unabhängig von λ ist. Wichtig ist zu betonen, daß für jede benachbarte Kurve $\dot{\mathcal{E}} \neq 0$ sein wird! Mit dieser Überlegung vereinfacht sich die Rechnung nach Multiplikation mit $\sqrt{\mathcal{E}}$ zu

$$0 = \sum_{\nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(\xi)\ddot\xi^\nu + \sum_{\nu,\sigma=0}^{D-1}\frac{\partial g_{\mu\nu}(\xi)}{\partial\xi^\sigma}\dot\xi^\nu\dot\xi^\sigma - \frac{1}{2}\sum_{\nu,\sigma=0}^{D-1}\frac{\partial g_{\nu\sigma}(\xi)}{\partial\xi^\mu}\dot\xi^\nu\dot\xi^\sigma\ . \tag{4.2}$$

Verwendet wurde, daß λ-Abhängigkeit in der Verkettung $\xi(\lambda), \dot\xi(\lambda)$ besteht. Der zweite Summand ist symmetrisch in $\dot\xi^\nu\dot\xi^\sigma$, so daß der Vorfaktor durch den in σ,ν symmetrisierten Ausdruck ersetzt werden darf. Da $g_{\mu\nu}$ die Matrixelemente einer invertierbaren symmetrischen Matrix sind, gibt es eine Matrix g^{-1} mit Matrix-

elementen $(g^{-1})^{\rho\mu}$ bestimmt aus

$$\sum_{\mu=0}^{D-1}(g^{-1})^{\rho\mu}g_{\mu\nu} = \delta^\rho_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\sigma=0}^{D-1} g_{\sigma\rho}(g^{-1})^{\rho\mu} = \delta^\mu_\sigma \; . \tag{4.3}$$

Um die Beschleunigung $\ddot{\xi}$ zu isolieren, multiplizieren wir (4.2) mit $(g^{-1})^{\rho\mu}$ und summieren über μ:

$$0 = \ddot{\xi}^\rho + \sum_{\nu,\sigma=0}^{D-1} \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\dot{\xi}^\nu\dot{\xi}^\sigma \; , \tag{4.4}$$

$$\Gamma^\rho_{\nu\sigma} := \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{D-1}(g^{-1})^{\rho\mu}\Big(\frac{\partial g_{\mu\nu}(\xi)}{\partial\xi^\sigma} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}(\xi)}{\partial\xi^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}(\xi)}{\partial\xi^\mu}\Big) \; . \tag{4.5}$$

Diese obere Gleichung (4.4) heißt *Geodätengleichung*, die darin auftretenden Objekte $\Gamma^\rho_{\nu\sigma}$ heißen *Christoffelsymbole*. Sind diese = 0, so verschwindet die Beschleuniugung, und die Lösung ist eine mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufene Gerade $\xi^\rho(\lambda) = \lambda v^\rho + \xi^\rho_0$ mit Konstanten v^ρ, ξ^ρ_0.

Für $\Gamma^\rho_{\nu\sigma} \neq 0$ werden die Lösungen im gewählten Koordinatensystem keine Geraden mehr sein. Das kann durchaus ein alleiniger Effekt einer ungünstigen Koordinatenwahl sein. Wählen wir im $\mathbb{R}^3$ Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ), so erscheint eine in den Koordinaten (x^1, x^2, x^3) beschriebene Gerade, die nicht durch 0 verläuft, als beschleunigt/gekrümmt in Kugelkoordinaten. Die Lösung der Geodätengleichung liefert die korrekte Umrechnung einer Geraden in Kugelkoordinaten. Wir werden später sehen, daß die Geodätengleichung eine intrinsische geometrische Eigenschaft (metrischer Paralleltransport) reflektiert. Je nach Wahl des Bezugssystems findet man entsprechende Christoffelsymbole, die dann nach Wahl der Anfangsbedingungen auf die Bahnkurve in den gewählten Koordinaten führen.

Bei der Lösung der Geodätengleichung wäre noch die Nebenbedingung $\frac{d\mathcal{E}}{d\lambda} = 0$ zu berücksichtigen, mit $\mathcal{E}(\xi,\dot{\xi}) = \sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(\xi)\dot{\xi}^\mu\dot{\xi}^\nu$. Eine einfache Rechnung zeigt jedoch, daß diese Bedingung bei Gültigkeit der Geodätengleichung automatisch erfüllt ist. Die Energiebedingung ist nichts anderes als ein erstes Integral der Bewegung, festgelegt durch die Anfangsdaten. Erst hier tritt ein Unterschied zwischen den Bahnen von Materie und von Licht auf: Licht wird beschrieben durch sogenannte Nullgeodäten $\sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(\xi)\dot{\xi}^\mu\dot{\xi}^\nu = 0$ (auch wenn dafür die Herleitung der Geodätengleichung problematisch wird). Für Materie dürfen wir die Bahnen nach der Eigenzeit parametriesieren und $\sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(\xi)\dot{\xi}^\mu\dot{\xi}^\nu = 1$ setzen (oder $= c^2$ bei Mitnahme der Lichtgeschwindigkeit).

4.2 Lichtablenkung im homogenen Gravitationsfeld

Im homogenen Gravitationsfeld $-ge_1$ mit $g_{\mu\nu}(\xi)$ gegeben durch (2.8) erhalten wir offenbar als nichtverschwindende Christoffel-Symbole (bei expliziter Mitnahme

der Lichtgeschwindigkeit c):

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}(g^{-1})^{11}\Big(-\frac{\partial g_{00}}{\partial \xi^1}\Big) = +\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial \xi^1} = \frac{g}{c^2}\Big(1+\frac{g\xi^1}{c^2}\Big)\,,$$
$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}(g^{-1})^{00}\Big(\frac{\partial g_{00}}{\partial \xi^1}\Big) = +\frac{1}{2g_{00}}\frac{\partial g_{00}}{\partial \xi^1} = \frac{g}{(c^2+g\xi^1)}\,. \tag{4.6}$$

Es entsteht das System

$$0 = \ddot{\xi}^0 + \frac{2g}{c^2+g\xi^1}\dot{\xi}^0\dot{\xi}^1\,,\quad 0 = \ddot{\xi}^1 + g\Big(1+\frac{g\xi^1}{c^2}\Big)\frac{\dot{\xi}^0\dot{\xi}^0}{c^2}\,,\quad 0 = \ddot{\xi}^i \quad \text{für } i\geq 2\,. \tag{4.7}$$

Damit verläuft die räumliche Bewegung in einer Ebene, die wir als e_1-e_2-Ebene wählen können. Die 1.+3. Gleichung sind sofort zu integrieren:

$$\Big(1+\frac{g\xi^1}{c^2}\Big)^2\dot{\xi}^0 = u = \text{const}\,,\qquad \dot{\xi}^2 = v = \text{const}\,. \tag{4.8}$$

Eingesetzt in die 2. Gleichung ergibt sich nach Multiplikation mit $\dot{\xi}^1$:

$$0 = \dot{\xi}^1\Big(\ddot{\xi}^1 + \frac{\frac{g}{c^2}u^2}{(1+\frac{g\xi^1}{c^2})^3}\Big) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\Big((\dot{\xi}^1)^2 - \frac{u^2}{(1+\frac{g\xi^1}{c^2})^2}\Big)$$
$$\Rightarrow\quad (\dot{\xi}^1)^2 - \frac{u^2}{(1+\frac{g\xi^1}{c^2})^2} = K = \text{const}\,. \tag{4.9}$$

Es folgt $(1+\frac{g\xi^1}{c^2})^2(\dot{\xi}^1)^2-(\dot{\xi}^1)^2-(\dot{\xi}^2)^2 = -K-v^2$ und, da es sich um Licht handelt, $K=-v^2$. Trennung der Variablen ergibt

$$\pm\frac{(1+\frac{g\xi^1}{c^2})\,d\xi^1}{\sqrt{u^2-v^2(1+\frac{g\xi^1}{c^2})^2}} = d\lambda$$
$$\Rightarrow\quad \mp\frac{c^2}{gv^2}\sqrt{u^2-v^2\Big(1+\frac{g\xi^1_B}{c^2}\Big)^2} \pm \frac{c^2}{gv^2}\sqrt{u^2-v^2\Big(1+\frac{g\xi^1_A}{c^2}\Big)^2} = \lambda_B-\lambda_A\,. \tag{4.10}$$

Sei nun abkürzend $\lambda'_A := \lambda_A \pm \frac{c^2}{gv^2}\sqrt{u^2-v^2(1+\frac{g\xi^1_A}{c^2})^2}$. Dann folgt

$$\Big(1+\frac{g\xi^1_B}{c^2}\Big)^2 = \frac{u^2}{v^2} - \frac{(\lambda_B-\lambda'_A)^2g^2}{c^2}\frac{v^2}{c^2}\,. \tag{4.11}$$

Die Lösung sieht zunächst merkwürdig aus, da λ_B beschränkt ist. Sie liefert jedoch das plausible Ergebnis, daß die Lichtkurve nach endlicher Parameterzeit im Ereignishorizont $\xi^1_H = -\frac{c^2}{g}$ endet und bis dahin auch nur endlich weit in Richtung e_2 kommen kann. Umgekehrt zeigt rückwärtige Verlängerung der Bahnkurve,

daß das Licht aus dem Ereignishorizont emittiert wurde. Lokal in der Nähe von $|\xi^1| \ll \frac{c^2}{g}$ liefert Reihenentwicklung von (4.10):

$$\pm \frac{\xi^1_B - \xi^1_A}{\sqrt{u^2 - v^2}} = \lambda_B - \lambda_A \; . \tag{4.12}$$

Somit wird im Fall $|\xi^1| \ll \frac{c^2}{g}$ sowohl die e_1- als auch die e_2-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, d.h. die Lichtbahn ist (entsprechend der Erfahrung!) eine Gerade in der e_1-e_2-Ebene.

Global sieht es auch für Materieteilchen nicht anders aus: Die Bahn endet im Ereignishorizont. Im Unterschied zu Licht kann die Bewegung aber mit vernachlässigbarer Anfangsgeschwindigkeit $\|\dot{\vec{\xi}}(\lambda_A)\| \ll c$ erfolgen. Dann liefert die Nebenbedingung $(\dot{\xi}^0)^2 = c^2$, und die Geodätengleichungen (4.7) reduzieren sich auf den Newtonschen Grenzfall

$$\ddot{\xi}^1 = -g \; , \qquad \ddot{\xi}^2 = \cdots = \ddot{\xi}^{D-1} = 0 \; . \tag{4.13}$$

Teil II
Pseudo-Riemannsche Geometrie

Die Überlegungen zum Äquivalenzprinzip zeigen, daß Gravitation durch gewisse Funktionen $g_{\mu\nu}$ beschrieben wird. Aus den $g_{\mu\nu}$ gewinnen wir die Christoffelsymbole $\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}$ und formulieren damit die Geodätengleichung für die Bahnen von Testteilchen. Verbleibt die Frage: Wie bestimmt man $g_{\mu\nu}$ für reale Gravitationsfelder von Sternen, Galaxien und den Kosmos insgesamt? Die Antwort lautet:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \ , \qquad (*)$$

wobei $R_{\mu\nu}$ und R gewisse Funktionen von $g_{\mu\nu}$ und deren partiellen Ableitungen sind und $T_{\mu\nu}$ sowohl von der Materieverteilung als auch von $g_{\mu\nu}$ selbst abhängt; G_N war die Newtonsche Gravitationskonstante. In diesem mathematischen Teil geht es darum zu verstehen, daß die gegebene Antwort (unter sehr natürlichen Annahmen!) die einzig mögliche ist. Ein wesentlicher Aspekt dabei ist das Allgemeine Relativitätsprinzip, welches impliziert, daß die Physik durch geometrische Objekte beschrieben werden muß. Alle Strukturen in (*) sind Abbilder solcher geometrischen Objekte bezüglich eines gewählten Bezugssystems.

5 Mannigfaltigkeiten und Tangentialraum

5.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 5.1 Eine *D-dimensionale (differenzierbare) Mannigfaltigkeit* ist ein gutartiger topologischer Raum M, ausgestattet mit einem Atlas $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha\in I}$ lokaler Karten, durch die M lokal einem $\mathbb{R}^D$ homöomorph wird. Für die Karten wird gefordert:

i) Die U_α sind offen, und $\psi_\alpha : U_\alpha \mapsto \psi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^D$ ist ein Homöomorphismus (d.h. ψ_α ist bijektiv auf das Bild und $\psi_\alpha, \psi_\alpha^{-1}$ sind stetig).

ii) Jeder Punkt $p \in M$ liegt in mindestens einem und höchstens endlich vielen U_α.

iii) Für jedes Paar $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ist die Abbildung $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ zwischen Teilmengen des $\mathbb{R}^D$ beliebig oft differenzierbar.

Hierzu einige Bemerkungen:

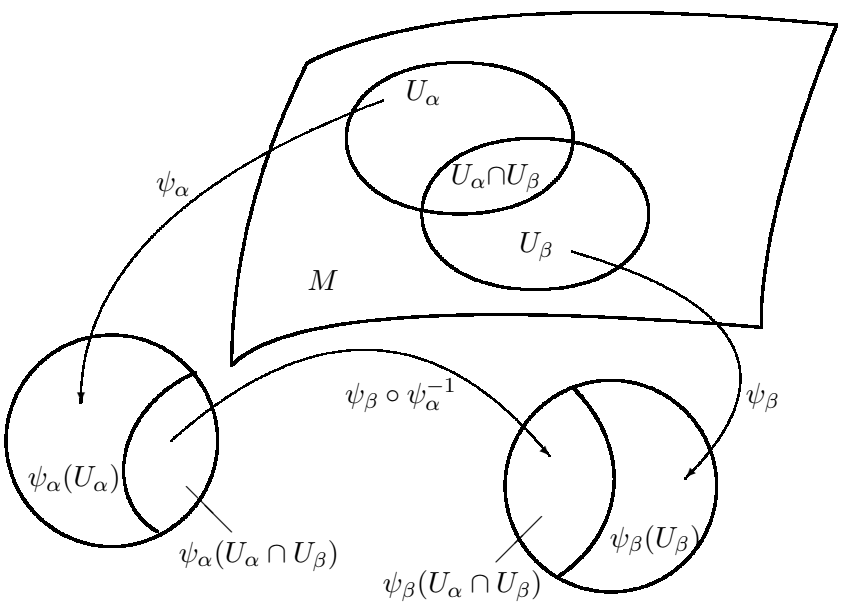
- In topologischen Räumen sind gewisse Teilmengen als 'offen' ausgezeichnet. Diese offenen Mengen können sehr exotisch sein, was wir mit 'gutartig' ausschließen. Wir verzichten hier bewußt auf Details und geben im Vorgriff auf später einzuführende Strukturen die Topologie konkret an. Wir werden später nur Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit *kausaler Struktur* brauchen, die ähnlich wie für den Minkowski-Raum definiert ist. Für jeden Punkt $p \in M$ läßt sich dann die Teilmenge $\mathcal{O}_p^+$ der von p verschiedenen Punkte definieren,

die von p aus durch eine rein zeitartige Kurve erreicht werden können, außerdem die Teilmenge $\mathcal{O}_p^-$ der von p verschiedenen Punkte, von denen aus p durch eine rein zeitartige Kurve erreicht werden kann. Alle $\mathcal{O}_p^+$ und alle $\mathcal{O}_p^-$ nennen wir offen, und damit ist auch $\mathcal{O}_p^+ \cap \mathcal{O}_{p'}^-$ offen für beliebige $p, p' \in M$. Die nichtleeren $\mathcal{O}_p^+ \cap \mathcal{O}_{p'}^-$ sind die Bausteine unserer Topologie; sie sind das Analogon der offenen Kugeln in metrischen Räumen. Eine beliebige Teilmenge U unserer (Lorentz-)Mannigfaltigkeit M heißt offen, wenn es zu jedem $q \in U$ Punkte $p, p' \in M$ gibt mit $q \in \mathcal{O}_p^+ \cap \mathcal{O}_{p'}^- \subseteq U$. Die so definierte Topologie ist 'gutartig'.

- Die Karten (U_α, ψ_α) entsprechen den Bezugssystemen in der Physik. Durch sie können wir Punkte und Wege auf der Mannigfaltigkeit durch Koordinaten beschreiben. Im allgemeinen wird das nur in einer Umgebung des Ausgangspunktes möglich sein. Schon die Erde läßt sich nicht fehlerfrei durch eine einzige Erdkarte beschreiben!

- Man möchte Mannigfaltigkeiten, die sich nur durch Hinzunahme weiterer kompatibler Karten oder Weglassen überflüssiger Karten unterscheiden, als identisch ansehen. Das kann einerseits durch Wahl eines maximalen Atlas geschehen, was in der Praxis aber unzweckmäßig ist. Alternativ müßte man von einer Äquivalenzklasse kompatibler Atlanten sprechen. Wir werden das aber vermeiden und annehmen, daß ein möglichst sinnvoller Atlas fest gewählt ist.

- Hier ist eine Skizze des Kartenwechsels:



- Über die Karten können wir intrinsische geometrische Objekte auf M durch Koordinaten im $\mathbb{R}^{ND}$ beschreiben. Der Kartenwechsel definiert dann eine eindeutige Umrechnungsvorschrift zwischen den $\mathbb{R}^{ND}$-Koordinaten des

Objekts bezüglich eines Bezugssystems und den $\mathbb{R}^{ND}$-Koordinaten desselben Objekts bezüglich eines anderen Bezugssystems. Das ist eine extrem ökonomische Sichtweise: Man muß nur den einen Diffeomorphismus $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ kennen und kann so sämtliche Größen ineinander umrechnen! Auf diese Weise wird das Allgemeine Relativitätsprinzip implementiert: Formuliere die Physik durch geometrische Objekte auf Mannigfaltigkeiten. Welches Bezugssystem (=lokale Karte (U_α, ψ_α)) man dann wählt, ist völlig egal! Jede Wahl ist gleichberechtigt, und eine Beschreibung läßt sich leicht in eine andere umrechnen.

- Mathematisch erlauben die Karten das Differenzieren und Integrieren von geometrischen Objekten auf Mannigfaltigkeiten. Die Idee ist immer, das Bild im $\mathbb{R}^{ND}$ unter der Kartenabbildung zu differenzieren und integrieren. Hier ist dann immer zu zeigen, daß das Ergebnis eine geometrische Bedeutung unabhängig von der Kartenwahl behält. Das ist eine nichttriviale Forderung: Es wird sich beispielsweise zeigen, daß die partielle Ableitung eines Vektorfeldes keinen Sinn hat! Man wird so auf die sogenannte 'kovariante Ableitung' geführt.

5.2 Tangentialraum

Grundlegende geometrische Objekte auf Mannigfaltigkeiten sind Vektoren und Vektorfelder. Die Idee ist, von Scharen von Kurven $\tau \mapsto \gamma(\tau) \in M$ auf der Mannigfaltigkeit auszugehen und diese als Feldlinien eines Vektorfeldes anzusehen, das in jedem Punkt tangential an die Kurve ist. Für die Erde und allgemein für D-dimensionale Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^N$ gewinnt man so eine geometrische Vorstellung von der Tangentialebene bzw. vom Tangentialraum als D-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^N$. Diese Konstruktion steht uns aber nicht zur Verfügung! Die Lösung ist, wie oben skizziert, durch die Kartenabbildung gegeben: Die Kurve $\gamma(\tau)$ hat ein Bild $\tau \mapsto \psi_\alpha(\gamma(\tau)) \in \mathbb{R}^D$, und die Tangentialvektoren dieses Bildes definieren ein Vektorfeld auf M.

Wir kommen später auf diese Konstruktion zurück. Es zeigt sich nämlich, daß es eine sinnvollere Konstruktion gibt; die Äquivalenz zur vorigen wird bewiesen. Ausgangpunkt sind *Funktionen* auf M, d.h. Abbildungen $f : U \to \mathbb{R}$ für $U \subset M$ offen. Stetigkeit ist sofort einzuführen über die Topologien auf M und $\mathbb{R}$. Differenzierbarkeit ist wieder über die Kartenabbildungen definiert: Die Zusammensetzung $f \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ soll als Abbildung einer Teilmenge des $\mathbb{R}^D$ nach $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar sein.

Wir bezeichen mit $\mathcal{C}^\infty(U)$ den Vektorraum der differenzierbaren Funktionen auf $U \subset M$. Wie üblich sind die Vektorraumoperationen punktweise erklärt, also $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(p) := \lambda_1 f_1(p) + \lambda_2 f_2(p)$.

Definition 5.2 Ein *Tangentialvektor* v_p im Punkt $p \in M$ ist eine lineare Abbildung

$v_p : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathbb{R}$, die die Leibniz-Regel erfüllt:

$$v_p(f_1 f_2) = v_p(f_1) f_2(p) + f_1(p) v_p(f_2) \; . \tag{5.1}$$

Der Vektorraum T_pM aller Tangentialvektoren in p heißt *Tangentialraum* (von M in p).

Die Vektorraum-Operationen sind einfach $(\lambda v_p + \mu w_p)(f) = \lambda v_p(f) + \mu w_p(f)$. Da $\mathcal{C}^\infty(U)$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum ist, würde man vermuten, daß T_pM ebenfalls unendlich-dimensional ist (und dann nichts mit der Vorstellung eines Tangentialraums zu tun hat). Die Leibniz-Regel ändert das aber gravierend:

Satz 5.3 *Ist M eine D-dimensionale Mannigfaltigkeit, so gilt* $\dim(T_pM) = D$.

Beweis. Durch Konstruktion einer Basis. Sei (U, ψ) eine beliebige Karte um $p \in U$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Dann ist $f \circ \psi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\psi(U))$ eine partiell differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^D$, und wir setzen

$$X_\mu(f) := (\partial_\mu (f \circ \psi^{-1}))(\psi(p)) \; , \qquad \mu = 0, \dots, D-1 \; . \tag{5.2}$$

Offenbar gilt $X_\mu : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$, und diese Abbildung ist linear. Wählen wir f so, daß $f \circ \psi^{-1}$ die Koordinatenfunktionen selbst sind, so folgt die lineare Unabhängigkeit der X_μ. Schließlich ist die Leibniz-Regel erfüllt:

$$\begin{aligned}
X_\mu(f_1 f_2) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big(((f_1 \cdot f_2) \circ \psi^{-1})(\psi(p) + t e_\mu) - ((f_1 \cdot f_2) \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big(f_1(\psi^{-1}(\psi(p) + t e_\mu)) \cdot f_2(\psi^{-1}(\psi(p) + t e_\mu)) - f_1(p) \cdot f_2(p) \Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big((f_1 \circ \psi^{-1})(\psi(p) + t e_\mu)) - (f_1 \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \Big) \cdot f_2(\psi^{-1}(\psi(p) + t e_\mu)) \\
&+ \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f_1(p) \cdot \Big((f_2 \circ \psi^{-1})(\psi(p) + t e_\mu) - (f_2 \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \Big) \\
&= X_\mu(f_1) \cdot f_2(p) + f_1(p) \cdot X_\mu(f_2) \; .
\end{aligned}$$

Somit ist $X_\mu \in T_pM$ bewiesen.

Verbleibt zu zeigen, daß $\{X_0, \dots X_{D-1}\}$ ein Erzeugendensystem von T_pM ist. Zwei Punkte $a, x \in \mathbb{R}^D$ haben bezüglich der kanonischen Basis $(e_\mu)_{\mu=0,\dots,D-1}$ die Darstellung $x = \sum_{\mu=0}^{D-1} x^\mu e_\mu$ und $a = \sum_{\mu=0}^{D-1} a^\mu e_\mu$. Für Funktionen $F : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$ gilt nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Kettenregel

$$F(x) - F(a) = \int_0^1 dt \; \frac{d}{dt} F(a + t(x-a)) = \sum_{\mu=0}^{D-1} (x^\mu - a^\mu) \int_0^1 dt \; (\partial_\mu F)(a + t(x-a)) \; .$$

Setze nun $H_\mu(x) := \int_0^1 dt \; (\partial_\mu F)(a + t(x-a))$ und werte die Formel aus für $F = f \circ \psi^{-1}$, $a = \psi(p)$ und $x = \psi(q)$. Eine beliebige differenzierbare Funktion f

auf U läßt sich somit entwickeln als

$$f(q) = f(p) + \sum_{\mu=0}^{D-1}((x^\mu \circ \psi)(q) - a^\mu) \cdot (H_\mu \circ \psi)(q) \; . \tag{5.3}$$

Dabei sind $f(p)$ und a^μ Konstanten, und $x^\mu \circ \psi$ ist eine Funktion, die jedem Punkt $q \in U$ die μ-te Koordinate (eine reelle Zahl) von $\psi(q) \in \mathbb{R}^D$ zuordnet. Wir wenden ein beliebiges $v \in T_pM$ an. Wegen $v_p(1) = v_p(1^2) = 2v_p(1) = 0$ und Linearität annihiliert v_p jede konstante Funktion, wie z.B. $f(p)$ und a^μ. Zusammen mit der Leibniz-Regel folgt

$$\begin{aligned} v_p(f) &= \sum_{\mu=0}^{D-1} v_p(x^\mu \circ \psi) \cdot (H_\mu \circ \psi)(p) + \sum_{\mu=0}^{D-1}((x^\mu \circ \psi)(p) - a^\mu) \cdot v_p(H_\mu \circ \psi) \\ &= \sum_{\mu=0}^{D-1} v_p(x^\mu \circ \psi) \cdot H_\mu(a) \end{aligned}$$

wegen $(x^\mu \circ \psi)(p) = x^\mu(a) = a^\mu$. Nun war aber $H_\mu(a) = (\partial_\mu F)(a) = (\partial_\mu(f \circ \psi))(\psi(p)) = X_\mu(f)$, d.h. es ist gezeigt:

$$v_p(f) = \sum_{\mu=0}^{D-1} v_p^\mu X_\mu(f) \quad \text{mit} \quad v_p^\mu := v_p(x^\mu \circ \psi) \; .$$

Somit ist $\{X_0, \ldots, X_{D-1}\}$ eine Basis von T_pM. □

Eine andere Karte (U', ψ'), d.h. Wahl eines anderen Bezugssystems, wird auf eine andere Basis $\{X'_\mu\}_{\mu=0,\ldots,D-1}$ von T_pM führen, mit $X'_\nu(f) := \frac{\partial}{\partial x'^\nu}(f \circ (\psi')^{-1}))(\psi'(p))$. Seien $\mathrm{D} = (\frac{\partial}{\partial x^\mu})_{\mu=0,\ldots,D-1}$ bzw $\mathrm{D}' = (\frac{\partial}{\partial x'^\nu})_{\mu=0,\ldots,D-1}$ die totalen Differentiale in $x = \psi(p)$ bzw. $x' = \psi'(p)$. Dann gilt nach Kettenregel

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}'\big(f \circ (\psi')^{-1}\big)(x') = \mathrm{D}'\big(f \circ \psi^{-1} \circ \{\psi \circ (\psi')^{-1}\}\big)(x') \\ &= \mathrm{D}(f \circ \psi^{-1})(x) \cdot \mathrm{D}'(\psi \circ (\psi')^{-1})(x') \; . \end{aligned}$$

Nun ist $(\psi \circ (\psi')^{-1})(x') = x(x') = (x^\mu(x'))_{\mu=0,\ldots D-1}$, so daß folgendes Transformationsgesetz bewiesen ist:

$$X'_\nu(f) = \sum_{\mu=0}^{D-1} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} X_\mu(f) \; . \tag{5.4}$$

Da ein Tangentialvektor $v_p \in T_pM$ unabhängig von der Kartenwahl definiert ist, muß für die Komponenten bezüglich verschiedener Karten gelten:

$$v_p = \sum_{\mu=0}^{D-1} v_p^\mu X_\mu = \sum_{\nu=0}^{D-1} {v'}_p^\nu X'_\nu \quad \Rightarrow \quad {v'}_p^\nu = \sum_{\mu=0}^{D-1} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} v_p^\mu \; . \tag{5.5}$$

Dabei sind $\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}$ die Matrixelemente der zu $(\mathrm{D}'(\psi \circ (\psi')^{-1}))(x')$ inversen Jacobi-Matrix $(\mathrm{D}(\psi' \circ (\psi)^{-1}))(x)$. Gleichung (5.5) führt auf eine gelegentlich anzutreffende (aber wenig sinnvolle) Charakterisierung von Vektoren: Ein D-Tupel (v_p^μ) reeller Zahlen bildet einen Vektor im Punkt x, falls es sich unter Koordinatenwechsel $x'(x)$ gemäß $v'^\nu_p = \sum_{\mu=0}^{D-1} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} v_p^\mu$ transformiert.

Wichtige Beispiele für Vektoren aus T_pM sind Tangentialvektoren an Kurven durch p: Sei $\tau \mapsto \gamma(\tau)$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(\tau_0) = p$, dann ist $\tau \mapsto \psi(\gamma(\tau)) =: x(\tau) = \sum_{\mu=0}^{D-1} x^\mu(\tau) e_\mu \in \mathbb{R}^D$ deren Kartendarstellung. Nach Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned}\dot\gamma_p(f) &:= \Big(\frac{d}{d\tau}(f\circ\gamma)\Big)(\tau_0) = \mathrm{D}(f\circ\psi^{-1})(\psi(\gamma(\tau_0)))\cdot\Big(\frac{d}{d\tau}(\psi\circ\gamma)\Big)(\tau_0)\\ &= \sum_{\mu=0}^{D-1} X_\mu(f)\dot x^\mu(\tau)\ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Somit sind $\dot x^\mu(\tau)$ einerseits die Komponenten von $\dot\gamma_p(\tau) \in T_pM$ bezüglich der Basis $\{X_\mu\}$ und andererseits die Komponenten von $\dot x(\tau) \in \mathbb{R}^D$ bezüglich der Standardbasis $\{e_\mu\}$. Man sagt, daß die Kartenabbildung $\psi : U \to \mathbb{R}^D$ einen Isomorphismus $\psi_{p_*} : T_pM \to \mathbb{R}^D$ induziert; für diesen gilt $\psi_{p_*}(X_\mu) = e_\mu$.

5.3 Vektorfelder

Ein Vektorfeld auf M ist eine Familie[3] $\{p, v_p\}$, die jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $v_p \in T_pM$ zuordnet. Diese Zuordnung soll zumindest stetig, besser differenzierbar, sein. Das ist in lokalen Karten aber schwierig auszudrücken: Schon für Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^N$ ist ersichtlich, daß alle T_pM *verschiedene* Vektorräume sind! Es gibt keine natürliche Möglichkeit, ein $v_p \in T_pM$ mit einem $w_q \in T_qM$ in einem zu p benachbarten Punkt q zu vergleichen[4]. Die Lösung des Problems besteht in der Beobachtung, daß für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ sowohl $v_p(f)$ als auch $v_q(f)$ reelle Zahlen sind, d.h. $U \ni p \mapsto v_p(f) \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion:

Definition 5.4 Ein differenzierbares Vektorfeld auf M ist eine lineare Abbildung $v : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, die punktweise mit einem Tangentialvektor übereinstimmt: $(vf)(p) = v_p(f)$ für ein $v_p \in T_pM$.

Der Vektorraum aller Vektorfelder auf M werde mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet.

Hierzu einige Bemerkungen:

[3] Diese Beschreibung läßt sich präzisieren im Rahmen von *Faserbündeln*. Faserbündel werden auch für die geometrische Beschreibung von Eichtheorien gebraucht. Da Faserbündel für reine Gravitation, eventuell plus Elektromagnetismus, keine Vorteile bieten, verzichten wir darauf.

[4] Wir werden später genau diesen Vergleich benötigen, müssen dazu aber eine Zusatzstruktur einführen, den Paralleltransport.

- Es ist nun üblich, die durch (5.2) definierte Basisvektoren von T_pM mit $(\partial_\mu)_p$ selbst zu bezeichnen und durch

$$(\partial_\mu f)(p) := (\partial_\mu (f \circ \psi^{-1}))(\psi(p)) \tag{5.7}$$

  eine Familie von D *lokalen* Vektorfeldern $\partial_0, \ldots, \partial_{D-1} \in \mathfrak{X}(U)$ zu definieren. Hier ist jedoch wichtig zu betonen, daß diese Felder ∂_μ immer bezüglich einer fest gewählten Karte (U, ψ) zu verstehen sind, auch wenn das in der Bezeichnung nicht ersichtlich ist!

- Für $v \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ wird durch $(fv)(f') := f \cdot v(f')$ ein Vektorfeld $fv \in \mathfrak{X}(M)$ erklärt.

- Vektorfelder erfüllen die Leibniz-Regel

$$v(f_1 \cdot f_2) = f_2 \cdot v(f_1) + f_1 \cdot v(f_2) \; . \tag{5.8}$$

- Sind $v, w \in \mathfrak{X}(M)$, so ist auch der durch

$$[v, w](f) := v(w(f)) - w(v(f)) \tag{5.9}$$

  erklärte *Kommutator* wieder ein Vektorfeld: $[v, w] : \mathcal{C}^\infty(M) \mapsto \mathcal{C}^\infty(M)$ ist klar, und es gilt die Leibniz-Regel:

$$\begin{aligned}
[v, w](f_1 \cdot f_2) &= v(w(f_1 \cdot f_2)) - w(v(f_1 \cdot f_2)) \\
&= v\big(f_2 \cdot w(f_1) + f_1 \cdot w(f_2)\big) - w\big(f_2 \cdot v(f_1) + f_1 \cdot v(f_2)\big) \\
&= v(f_2) \cdot w(f_1) + f_2 \cdot v(w(f_1)) + v(f_1) \cdot w(f_2) + f_1 \cdot v(w(f_2)) \\
&\quad - w(f_2) \cdot v(f_1) - f_2 \cdot w(v(f_1)) - w(f_1) \cdot v(f_2) - f_1 \cdot w(v(f_2)) \\
&= f_2 \cdot [v, w](f_1) + f_1 \cdot [v, w](f_2) \; .
\end{aligned}$$

  Damit stimmt $[v, w]$ punktweise mit einem Tangentialvektor überein.

  Auf diese Weise wird $\mathfrak{X}(M)$ zu einer *Lie-Algebra*, insbesondere gilt die Jacobi-Identität

$$[u, [w, v]] + [w, [v, u]] + [v, [u, w]] = 0 \; . \tag{5.10}$$

6 Tensorfelder

6.1 Tensoren und Summenkonvention

Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V bezeichne V^* seinen *Dualraum*, d.h. den Vektorraum der linearen Abbildungen $\omega : V \to \mathbb{R}$. Jede Basis $(e_0, \ldots, e_{D-1})$ von V definiert eine (genauer: die duale) Basis $(e^{*0}, \ldots, e^{*D-1})$ von V^* durch $e^{*\mu}(e_\nu) := \delta^\mu_\nu$. Zwar liefert jede Basiswahl einen Isomorphismus zwischen V^* und V, jedoch kommt diesem keine intrinsische Bedeutung zu. Dagegen läßt sich (im endlich-dimensionalen) das Bidual $V^{**} := (V^*)^*$ wegen $v(\omega) := \omega(v)$ auf kanonische Weise mit V identifizieren.

Definition 6.1 Sei V ein endlich-dimensionaler Verktorraum und V^* sein Dualraum. Ein Tensor vom Typ (k,l) über V ist eine multi-lineare Abbildung

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k \text{ mal}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l \text{ mal}} \to \mathbb{R} \; . \tag{6.1}$$

Die Menge aller Tensoren vom Typ (k,l) werde mit $\mathcal{T}^{(k,l)}$ bezeichnet.

Durch

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(\omega_1, \ldots, \omega_k, v_1, \ldots, v_l) \\ &= \lambda_1 \cdot T_1(\omega_1, \ldots, \omega_k, v_1, \ldots, v_l) + \lambda_2 \cdot T_2(\omega_1, \ldots, \omega_k, v_1, \ldots, v_l)\end{aligned}$$

wird $\mathcal{T}^{(k,l)}$ zu einem Vektorraum, und durch

$$\{e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{*\mu_l}\}_{\mu_i,\nu_j=0}^{D-1} \; , \tag{6.2}$$

$$(e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{*\mu_l})(\omega_1, \ldots, \omega_k, v_1, \ldots, v_l) := \prod_{i=1}^{k} \omega_i(e_{\mu_i}) \prod_{j=1}^{l} e^{*\nu_j}(v_j)$$

wird eine Basis erklärt. Um ein wenig Schreibarbeit zu ersparen, werde von nun an vereinbart:

6.2 Einsteinsche Summenkonvention: Über ein Paar identischer oberer und unterer Indizes werde automatisch von 0 bis $D-1$ summert, ohne daß das Summenzeichen explizit geschrieben wird: $v^\mu e_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{D-1} v^\mu e_\mu$ usw.

Ein Tensor $T \in \mathcal{T}^{(k,l)}$ besitzt somit eine Darstellung

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_k}_{\nu_1 \ldots \nu_l} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{*\mu_l} \; .$$

Folgende Operationen mit Tensoren werden wichtig:

- *Tensorprodukt.* Sind $T \in \mathcal{T}^{(k,l)}$ und $\tilde{T} \in \mathcal{T}^{(k',l')}$, so wird durch

  $$\begin{aligned}&(T \otimes \tilde{T})(\omega_1, \ldots, \omega_{k+k'}, v_1, \ldots, v_{l+l'}) \\ &:= T(\omega_1, \ldots, \omega_k, v_1, \ldots, v_l)\tilde{T}(\omega_{k+1}, \ldots, \omega_{k+k'}, v_{l+1}, \ldots, v_{l+l'})\end{aligned}$$

  ein Tensor $T \otimes \tilde{T} \in \mathcal{T}^{(k+k',l+l')}$ erklärt. Dieses Tensorprodukt ist assoziativ, aber nicht kommutativ. In einer Basis reduziert es sich auf das Produkt der Komponenten:

  $$(T \otimes \tilde{T})^{\mu_1 \ldots \mu_{k+k'}}_{\nu_1 \ldots \nu_{l+l'}} = T^{\mu_1 \ldots \mu_k}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \, \tilde{T}^{\mu_{k+1} \ldots \mu_{k+k'}}_{\nu_{l+1} \ldots \nu_{l+l'}} \; .$$

- *Kontraktion.* Ist $T \in \mathcal{T}^{(k,l)}$ mit $k, l \geq 1$, so wird für beliebiges $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq l$ durch

$$\begin{aligned}&(C^{(i,j)}T)(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}, v_1, \ldots, v_{l-1})\\ &:= T(\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, e^{*\sigma}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_{k-1}, v_1, \ldots, v_{j-1}, e_\sigma, v_{j+1}, \ldots, v_{l-1})\end{aligned}$$

ein Tensor $C^{(i,j)}T \in \mathcal{T}^{(k-1,l-1)}$ erklärt. Summation über σ ist automatisch. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Definition unabhängig von dem Paar e, e^* dualer Basen ist. In Komponenten gilt

$$(C^{(i,j)}T)^{\mu_1 \ldots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{l-1}} = T^{\mu_1 \ldots \mu_{i-1} \sigma \mu_{i+1} \ldots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{j-1} \sigma \nu_{j+1} \ldots \nu_{l-1}} \ .$$

Man kann aus der Indexstruktur der Komponenten den Typ des Tensors ablesen; dabei darf man aber nur die freien (nicht summierten) Indizes zählen. Solche Kontraktionen können mehrfach angewandt werden. Häufig benötigt wird das Tensorprodukt gefolgt von einer oder mehreren Kontraktionen.

6.2 Kovektorfelder

Die vorherigen Konstruktionen können sofort auf $V = T_pM$ angewandt werden:

Definition 6.3 Der Dualraum T_p^*M des Tangentialraums T_pM heißt *Kotangentialraum* im Punkt $p \in M$.

Ein *Kovektorfeld* auf M ist eine $C^\infty(M)$-lineare Abbildung $\omega : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, die punktweise mit einem Kotangentialvektor $\omega_p \in T_p^*M$ übereinstimmt:

$$\begin{aligned}(\omega(v))(p) = \omega_p(v_p) \quad &\text{mit } \omega_p \in T_p^*M \ , \ v_p \in T_pM \ ,\\ \omega(f_1v_1 + f_2v_2) = f_1\omega(v_1) + f_2\omega(v_2) \in C^\infty(M) \ &\text{für } v_1, v_2 \in \mathfrak{X}(M) \ , \ f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M) \ .\end{aligned}$$

Der Vektorraum der Kovektorfelder auf M werde mit $\mathfrak{X}^*(M)$ bezeichnet.

Auch hier ist mit $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ wieder $f\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. Man sagt, beide Vektorräume $\mathfrak{X}(M)$ und $\mathfrak{X}^*(M)$ sind $\mathcal{C}^\infty(M)$-*Moduln*.

Eine wichtige Beispielklasse für Kovektorfelder sind die äußeren Differentiale von Funtionen: Für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ werde ein Kovektorfeld $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ definiert durch

$$(df)(v) := v(f) \ . \tag{6.3}$$

Besonders wichtig werden die Differentiale der im Beweis von Satz 5.3 eingeführten Koordinatenfunktionen $x^\mu \circ \psi$, die im Punkt q die μ-te Koordinate von $y = \psi(q) = y^\mu e_\mu$ liefern: $(x^\mu \circ \psi)(q) = y^\mu$. Aus (5.7) folgt punktweise

$$\big((d(x^\mu \circ \psi))(\partial_\nu)\big)(p) = \big(\partial_\mu(x^\mu \circ \psi)\big)(p) \overset{(5.7)}{=} \big(\partial_\nu((x^\mu \circ \psi) \circ \psi^{-1})\big)(\psi(p)) = \delta^\mu_\nu \ . \tag{6.4}$$

Somit bilden die Koordinatendifferentiale $\{(d(x^\mu \circ \psi))_p\}_{\mu=0,\dots,D-1}$ genau die zu $\{(\partial_\nu)_p\}_{\nu=0,\dots,D-1}$ duale Basis von T_p^*M. Ähnlich wie bei ∂_μ ist es nun üblich, die Kartenabbildungen ψ einfach wegzulassen und nur $dx^\mu \equiv d(x^\mu \circ \psi)$ zu schreiben. Wir haben also

$$dx^\mu \in \mathfrak{X}(U) \text{ mit } (dx^\mu(\partial_\nu))(p) = (dx^\mu)_p((\partial_\nu)_p) = \delta^\mu_\nu \text{ für alle } p \in U \ . \tag{6.5}$$

6.3 Tensoren und Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Ein Tensor von Typ (k,l) im Punkt p ist eine multilineare Abbildung $T_p : (T_p^*M)^k \times (T_pM)^l \to \mathbb{R}$. Sind seine Komponenten bezüglich der durch (U,ψ) definierten Kartenbasis $\{(\partial_\mu)_p\}$ und $\{(dx^\mu)_p\}$ gegeben durch $(T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l})_p$, so berechnen sie sich bezüglich einer anderen durch (U',ψ') definierten Basis $\{(\partial'_\mu)_p\}$ und $\{(dx'^\mu)_p\}$ gemäß

$$(T^{\mu'_1\dots\mu'_k}_{\nu'_1\dots\nu'_l})_p = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\nu_l}} (T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l})_p \ . \tag{6.6}$$

Dabei kommen die Matrixelemente der Jacobi-Matrizen $(\mathrm{D}'(\psi\circ(\psi')^{-1}))(\psi'(p)) = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\nu}\right)_{\nu,\nu'=0,\dots,D-1}$ und $(\mathrm{D}(\psi'\circ\psi^{-1}))(\psi(p)) = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu}\right)_{\mu,\mu'=0,\dots,D-1}$ ins Spiel. Man vergleiche (6.6) mit (5.5).

Ausgehend von den Vektorräumen $\mathfrak{X}(M)$ und $\mathfrak{X}^*(M)$ der Vektor- und Kovektorfelder auf M können wir definieren:

Definition 6.4 Ein *Tensorfeld vom Typ* (k,l) *auf* M (bzw. ein k*-fach kontravariantes und* l*-fach kovariantes Tensorfeld auf* M) ist eine $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilineare Abbildung

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{k \text{ mal}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{l \text{ mal}} \to \mathcal{C}^\infty(M) \ . \tag{6.7}$$

Der Vektorrraum der Tensorfelder vom Typ (k,l) auf M werde mit $\mathcal{T}^{(k,l)}(M)$ bezeichnet.

Einige Bemerkungen:

- Punktweise reduzieren sich Tensorfelder auf Tensoren. Damit liefert eine Karte (U,ψ) eine Darstellung

  $$\mathcal{T}^{(k,l)}(M) \ni T = T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_l} \ , \quad T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l} \in \mathcal{C}^\infty(U) \ .$$

- Tensorprodukt und Kontraktion übertragen sich auf Tensorfelder. Dabei kann die Kontraktion lokal über die Kartenbasen formuliert werden. Ist $T \in \mathcal{T}^{(k,l)}(M)$, so gilt

  $$\begin{aligned}&(C^{(i,j)}T)(\omega_1,\dots,\omega_{k-1},v_1,\dots,v_{l-1})\\ &:= T(\omega_1,\dots,\omega_{i-1},dx^\sigma,\omega_{i+1},\dots,\omega_{k-1},v_1,\dots,v_{j-1},\partial_\sigma,v_{j+1},\dots,v_{l-1}) \ ,\end{aligned}$$

  für $\omega_? \in \mathfrak{X}^*(M)$ und $v_? \in \mathfrak{X}(M)$.

- Die $\mathcal{C}^\infty(M)$-Multilinearität

$$T(\dots, f_1\omega_1 + f_2\omega_2, \dots) = f_1 T(\dots, \omega_1, \dots) + f_2 T(\dots, \omega_2, \dots) ,$$
$$T(\dots, f_1 v_1 + f_2 v_2, \dots) = f_1 T(\dots, v_1, \dots) + f_2 T(\dots, v_2, \dots) ,$$

für $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{X}^*(M)$ und $v_1, v_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ist unser wichtigstes Kriterium, um Tensorfelder als solche zu erkennen.

7 Das metrische Tensorfeld

Definition 7.1 Eine *pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit* ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M zusammen mit einem symmetrischen, punktweise nichtentarteten, zweifach-kovarianten Tensorfeld $g \in \mathcal{T}^{(0,2)}(M)$, d.h.

i) $g(v, w) = g(w, v)$ für alle $v, w \in \mathfrak{X}(M)$,

ii) $g_p(v_p, w_p) = 0$ für alle $v_p \in T_pM$ genau dann, wenn $w_p = 0$.

Dieses Tensorfeld g heißt *metrisches Tensorfeld*. Ist g positiv definit[5], so nennen wir (M, g) eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*.

Nach dem *Sylvesterschen Trägheitssatz* gibt es eine Basis $((v_0)_p, \dots, (v_{D-1})_p)$ von T_pM mit $g_p((v_\mu)_p, (v_\nu)_p) = \pm\delta_{\mu\nu}$, wobei die Zahlen r der $+$-Vorzeichen und s der $-$-Vorzeichen unabhängig von der Basis sind. Die entsprechende Invariante (r, s) heißt *Signatur* von g_p. Nach einer Variante von Gram-Schmidt[6] kann man lokale Vektorfelder auf U derart konstruieren, daß die Auswertung in jedem Punkt orthonormal (bis auf Vorzeichen) bezüglich g ist. Damit ist die Signatur von g lokal konstant, somit konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von M.

Wir treffen einige Annahmen über die Topologie von M:

- M erlaube ein metrisches Tensorfeld der Signatur $(1, D-1)$.
- M ist orientierbar und *orientiert*, d.h. für jedes Paar (U, ψ) und (U', ψ') von Karten mit $U \cap U' \neq \varnothing$ gilt $\det(\mathrm{D}(\psi' \circ \psi^{-1})(x')) > 0$ für alle $x' \in \psi'(U \cap U')$.
- M ist zeitorientierbar und *zeitorientiert*, d.h. es gibt ein stetiges Vektorfeld $t \in \mathfrak{X}(M)$ mit $(g(t, t))(p) = +1$ für alle $p \in M$, und ein solches Feld sei fest gewählt.

Definition 7.2 Eine zusammenhängende, orientierte und zeitorientierte Mannigfaltigkeit M mit metrischem Tensorfeld $g \in \mathcal{T}^{(0,2)}(M)$ der Signatur $(1, D-1)$ heißt *Lorentz-Mannigfaltigkeit*.

[5] d.h. für alle $p \in M$ gilt $g_p(v_p, v_p) \geq 0$ für alle $v_p \in T_pM$ mit $g_p(v_p, v_p) = 0$ genau für $v_p = 0$

[6] Wähle Vektorfelder v_μ, die in p orthonormal sind mit vorgegebenen $(v_\mu)_p$. Wegen Stetigkeit ist $g(v_0, v_0) \neq 0$ in einer Umgebung von p. Setze dort $\tilde{v}_1 := v_1 - \frac{g(v_0, v_1)}{g(v_0, v_0)} v_0$. Dann ist $g(\tilde{v}_1, \tilde{v}_1)$ zumindest in p verschieden von 0, wegen Stetigkeit in einer Umgebung von p, während $g(v_0, \tilde{v}_1) \equiv 0$ ist. Weiter wie Gram-Schmidt.

Einige Bemerkungen:

- Völlig identisch wie für den Minkowski-Raum ist auf jeder Lorentz-Mannigfaltigkeit eine *kausale Struktur* erklärt, ausgehend von zukunftsgerichteten kausalen Kurven $\tau \mapsto \gamma(\tau) \in M$ mit $g(\dot\gamma, \dot\gamma) \geq 0$ und $g(t, \dot\gamma) > 0$. Die kausale Struktur induziert eine Topologie auf M, die von nun an gewählt sei.
- Das Einsteinsche Äquivalenzprinzip führt letztlich auf die Schlußfolgerung, *daß Gravitation allein durch das metrische Tensorfeld einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) beschrieben wird*. Die Begründung können wir erst später geben.
- Lokal ist $g \in \mathcal{T}^{(0,2)}(M)$ durch seine Auswertung auf der Kartenbasis $\{\partial_\mu\}$ bestimmt:

$$g(\partial_\mu, \partial_\mu) =: g_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \qquad \text{mit } g_{\mu\nu} \in \mathcal{C}^\infty(U) \; . \tag{7.1}$$

- In jedem Punkt $p \in M$ vermittelt g_p einen Isomorphismus zwischen T_pM und T_p^*M:

$$T_pM \ni v_p \mapsto g_p(v_p, \; . \;) \in T_p^*M \; . \tag{7.2}$$

  Genau das Nullelement von T_p^*M schickt jedes $w \in T_pM$ auf $0 \in \mathbb{R}$; wegen der Nichtausgeartetheit ist das der Fall nur für $v = 0$. Somit ist die Abbildung injektiv und aus Dimensionsgründen surjektiv. In der nichtgravitativen Physik darf man diesen Isomorphismus nutzen, um Kotangentialvektoren komplett zu vermeiden. Da wir hier an Gleichungen für das metrische Tensorfeld selbst interessiert sind, müssen wir in der Allgemeinen Relativitätstheorie sorgfältig zwischen $\mathfrak{X}(M)$ und $\mathfrak{X}^*(M)$ unterscheiden!

8 Zusammenhänge und Paralleltransport

8.1 Affiner Zusammenhang

Definition 8.1 Ein *affiner Zusammenhang* auf M ist eine Zuordnung eines Vektorfeldes $\nabla_v w \in \mathfrak{X}(M)$ zu jedem Paar $v, w \in \mathfrak{X}(M)$ derart, daß

$$\begin{aligned} \nabla_{(u+v)} w &= \nabla_u w + \nabla_v w \; , & \nabla_{(fv)} w &= f \nabla_v w \; , \\ \nabla_v (u + w) &= \nabla_v u + \nabla_v w \; , & \nabla_v (fw) &= f \nabla_v w + v(f) \cdot w \end{aligned} \tag{8.1}$$

für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $u, v, w \in \mathfrak{X}(M)$.

- Wählen wir als Vektorfelder die Kartenbasen ∂_μ, so folgt

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu =: \Gamma^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho \; , \quad \Gamma^\rho_{\mu\nu} \in C^\infty(U) \; . \tag{8.2}$$

Die hier auftretenden Funktionen $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ heißen *Zusammenhangskoeffizienten*. Sie bilden jedoch *nicht* die Komponenten eines Tensors vom Typ $(1,2)$, da der Zusammenhang wegen der letzten Gleichung in (8.1) nicht $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear ist. Ist allgemeiner $v = v^\mu\partial_\mu$ und $w = w^\mu\partial_\mu$ für Funktionen $v^\mu, w^\nu \in \mathcal{C}^\infty(U)$, so folgt aus (8.1)

$$\nabla_v w = \big(v^\mu\partial_\mu(w^\rho) + \Gamma^\rho_{\mu\nu}v^\mu w^\nu\big)\partial_\rho \ . \tag{8.3}$$

- Auch wenn wir hier dasselbe Symbol $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ wie für die Christoffelsymbole (4.4) verwenden, ist vorerst streng zwischen beiden zu unterscheiden! Zusammenhänge ∇ sind durch Definition 8.1 auch für Mannigfaltigkeiten ohne metrisches Tensorfeld erklärt, und selbst wenn ein solches existiert, muß es nichts mit ∇ und $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ zu tun haben!

8.2 Paralleltransport

Zusammenhänge definieren einen Paralleltransport von Vektorfeldern längs Kurven:

Definition 8.2 Sei $\tau \mapsto \gamma(\tau)$ eine Kurve auf M. Ein Vektorfeld $v \in \mathfrak{X}(M)$ heißt *autoparallel längs* γ, falls $\nabla_{\dot\gamma}v = 0$ auf γ (punktweise $(\nabla_{\dot\gamma}v)_{\gamma(\tau)} = 0 \in T_{\gamma(\tau)}M$).

Ist $w = w^\mu\partial_\mu$ und $\dot\gamma = \dot x^\nu\partial_\nu$ mit $w^\mu, \dot x^\nu \in \mathcal{C}^\infty(U)$, so folgt aus (8.3) die folgende Differentialgleichung zur Bestimmung eines autoparallelen Vektorfeldes:

$$0 = \dot x^\mu\big(\partial_\mu(w^\rho) + \Gamma^\rho_{\mu\nu}w^\nu\big)\partial_\rho = \big(\dot w^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\dot x^\mu w^\nu\big)\partial_\rho \ , \tag{8.4}$$

wobei $\dot w^\rho \in \mathcal{C}^\infty(U)$ auf $\gamma(\tau)$ erklärt ist durch $\dot w^\rho(\gamma(\tau_0)) := (\frac{d}{d\tau}(w^\rho\circ\gamma))(\tau_0) = \partial_\mu(w^\rho)\dot x^\mu$. Die Gleichung (8.4) ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zur Bestimmung der Funktionen $\tau \mapsto w^\rho\circ\gamma(\tau)$ über einem Intervall. Nach Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Picard-Lindelöf) gibt es zu vorgegebenem Anfangswert $(w^\rho\circ\gamma)(\tau_0)$ eine eindeutige Lösung $]-\epsilon,\epsilon[\ni \tau \mapsto (w^\rho\circ\gamma)(\tau)$. Auf diese Weise definieren Zusammenhang und Kurve einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$\mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_0} : T_{\gamma(\tau_0)}M \ni (w^\rho\circ\gamma)(\tau_0)(\partial_\rho)_{\gamma(\tau_0)} \mapsto (w^\rho\circ\gamma)(\tau)(\partial_\rho)_{\gamma(\tau)} \in T_{\gamma(\tau)}M \tag{8.5}$$

zwischen Tangentialräumen entlang der Kurve. Dieser Isomorphismus $\mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_0}$ heißt *Paralleltransport*. Wieder nach Eindeutigkeitssatz gilt die Gruppeneigenschaft

$$\mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_1}\circ\mathcal{P}^\gamma_{\tau_1,\tau_0} = \mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_0} \ .$$

Wir können nun den Paralleltransport auf Kovektoren und dann beliebige Tensoren ausdehnen durch die Forderung, daß sämtliche Dualitäten bei Paralleltransport erhalten bleiben. Ist $v_p \in T_pM$ und $\omega_p \in T^*_pM$ mit $p = \gamma(\tau_0)$, so besagt diese Forderung

$$(\mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_0}\omega_p)\big(\mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_0}v_p\big) := \omega_p(v_p) \ . \tag{8.6}$$

Dadurch können wir im nächsten Schritt für $v_{ip} \in T_pM$ und $\omega_{jp} \in T_p^*M$ den Paralleltransport $(\mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_0} T_p)$ in den Punkt $\gamma(\tau)$ eines im Punkt $p = \gamma(\tau_0)$ gegebenen Tensors T_p vom Typ (k, l) formulieren:

$$\begin{aligned}&(\mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_0} T_p)\big((\mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_0}\omega_{1p}), \ldots, (\mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_0}\omega_{kp}), (\mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_0} v_{1p}), \ldots, (\mathcal{P}^\gamma_{\tau,\tau_0} v_{lp})\big)\\ &:= T_p(\omega_{1p}, \ldots, \omega_{kp}, v_{1p}, \ldots, v_{lp})\ .\end{aligned} \tag{8.7}$$

8.3 Kovariante Ableitung nach Vektorfeldern

Umgekehrt definiert ein solcher Paralleltransport eine *kovariante Ableitung nach einem Vektorfeld*. Zunächst folgende Beobachtung aus Picard-Lindelöf:

Lemma 8.3 *Sei $v \in \mathfrak{X}(U)$ ein Vektorfeld auf einer Umgebung U von p. Dann gibt es genau eine Lösung $]-\epsilon, \epsilon[\ni \tau \mapsto \gamma_v(\tau) \in U$ des Anfangswertproblems*[7]

$$(\dot\gamma_v)_{\gamma_v(\tau)} = v_{\gamma_v(\tau)}\ , \qquad \gamma_v(0) = p\ . \tag{8.8}$$

Die maximale Erweiterung dieser Lösung heißt *Integralkurve* von v durch p. Wir bezeichnen den zugehörigen Paralleltransport kurz mit $\mathcal{P}^v_\tau := \mathcal{P}^{\gamma_v}_{\tau,0}$. Nun ist folgender Grenzwert korrekt im selben Raum erklärt:

Definition 8.4 Sei $v \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld und $\mathcal{P}^v_\tau \equiv \mathcal{P}^{\gamma_v}_{\tau,0}$ der zugehörige Paralleltransport längs der Integralkurve γ_v von v durch $p = \gamma_v(0)$, definiert ausgehend von $\mathcal{P}^v_\tau : T_pM \to T_{\gamma_v(\tau)}M$ mittels (8.6) und (8.7). Dann heißt

$$(\nabla_v T)_p := \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\Big((\mathcal{P}^v_\tau)^{-1} T_{\gamma_v(\tau)} - T_{\gamma_v(0)}\Big) \tag{8.9}$$

die *kovariante Ableitung, im Punkt p, des Tensorfeldes $T \in \mathcal{T}^{(k,l)}(M)$ nach dem Vektorfeld v*. Für Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, also Tensoren vom Typ $(0, 0)$, setzt man

$$(\nabla_v f)(p) := \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\Big(f(\gamma_v(\tau)) - f(\gamma_v(0))\Big) \equiv ((df)(\dot\gamma_v))(p) = (v(f))(p)\ . \tag{8.10}$$

Die zugehörige Abbildung $p \mapsto (\nabla_v T)_p$ definiert damit ein Tensorfeld vom selben Typ. Es ist wichtig zu betonen, daß eine partielle Ableitung "$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\big((T_{\gamma_v(\tau)} - T_{\gamma^v(0)}\big)$" nicht sinnvoll definiert werden kann, da die $T_{\gamma_v(\tau)}$ und $T_{\gamma_v(0)}$ in verschiedenen Vektorräumen liegen. Erst der parallele Rücktransport von $T_{\gamma_v(\tau)}$ in denselben Raum wie $T_{\gamma_v(0)}$ ermöglicht einen sinnvollen Ableitungsbegriff.

Lemma 8.5 *Die Definition der kovarianten Ableitung is konsistent für Vektorfelder, d.h. $\nabla_v w = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}((\mathcal{P}^v_\tau)^{-1} w_{\gamma_v(\tau)} - w_{\gamma_v(0)})$.*

[7] Angewandt auf Funktionen heißt das $(\frac{d}{d\tau}(f \circ \gamma))(\tau) = (vf)(\gamma(\tau))$. Wähle nun $f = x^\mu \circ \psi$, so folgt $(\frac{d}{d\tau}(x^\mu \circ \psi \circ \gamma_v))(\tau) = (v^\mu \circ \gamma_v)(\tau)$. Schreiben wir kurz $x^\mu_v(\tau) := (x^\mu \circ \psi \circ \gamma_v)(\tau)$, so entsteht $(\frac{dx^\mu_v}{d\tau})(\tau) = (v^\mu \circ \psi^{-1})(x^0_v(\tau), \ldots, x^{D-1}_v(\tau))$. Aus der Lösung bestimmt sich $\gamma_v(\tau) = \psi^{-1}(x^0_v(\tau), \ldots, x^{D-1}_v(\tau))$.

Beweis. Sei zunächst $u_p = u^\mu(\partial_\mu)_p \in T_pM$ und $u_{\gamma(\tau)} = u^\rho(\tau)(\partial_\rho)_{\gamma(\tau)} := \big(\mathcal{P}^v_\tau\big)^\rho_\mu u^\mu_p(\partial_\rho)_{\gamma(\tau)}$ sein Paralleltransport längs γ_v, mit $(\dot\gamma_v)_{\gamma_v(\tau)} = v^\mu(\gamma(\tau))(\partial_\nu)_{\gamma_v(\tau)}$. Nach (8.4) gilt

$$\frac{d}{d\tau}u^\rho(\tau) + \Gamma^\rho_{\mu\nu}(\gamma(\tau))\,v^\mu(\gamma(\tau))\,u^\nu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\big(\mathcal{P}^v_\tau\big)^\rho_\nu\Big|_{\tau=0} = -\Gamma^\rho_{\mu\nu}(p)v^\mu(p)$$

und dann für den Rücktransport

$$\frac{d}{d\tau}\big((\mathcal{P}^v_\tau)^{-1}\big)^\rho_\nu\Big|_{\tau=0} = +\Gamma^\rho_{\mu\nu}(p)v^\mu(p)\ .$$

Sei nun $w \in \mathfrak{X}(U)$ dargestellt durch $w_{\gamma(\tau)} = w^\mu(\gamma(\tau))(\partial_\mu)_{\gamma(\tau)}$ für Funktionen $w^\mu(\gamma(\tau))$, so folgt

$$((\mathcal{P}^v_\tau)^{-1}w)_p = ((\mathcal{P}^v_\tau)^{-1})^\nu_\mu w^\mu(\gamma(\tau))(\partial_\nu)_p$$

und deshalb

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\Big(((\mathcal{P}^v_\tau)^{-1}w)_p - w_p\Big) &= \frac{d}{d\tau}((\mathcal{P}^v_\tau)^{-1})^\nu_\mu\Big|_{\tau=0}\cdot w^\mu(p)(\partial_\nu)_p + \frac{d}{d\tau}(w^\rho\circ\gamma)\Big|_{\tau=0}\cdot(\partial_\rho)_p \\ &= \big(v^\mu\partial_\mu(w^\rho) + \Gamma^\rho_{\mu\nu}v^\mu w^\nu\big)(\partial_\rho)_p\ ,\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit (8.3). □

Bemerkung 8.6 *Das schwache Äquivalenzprinzip, also die Universalität des freien Falls, kann nun so interpretiert werden, daß ein Geschwindigkeitsvektor zum Kurvenparameter τ_0 in einen Geschwindigkeitsvektor zum Kurvenparameter τ überführt wird. Diese Überführung ist unabhängig von der Natur und dem Zustand des Testkörpers, somit eine rein geometrische Eigenschaft. Wir gelangen (nach einigen Idealisierungen) zur Schlußfolgerung:*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Allgemeines Relativitätsprinzip}\\ \textit{+ schwaches Äquivalenzprinzip}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\textit{Gravitation ist Zusammenhang } \nabla\\ \textit{auf Mannigfaltigkeit } M\end{array}$$

Die Aussage wird auch in der Einsteinschen Gravitationstheorie richtig bleiben; es wird lediglich ein ganz bestimmter Zusammenhang gewählt. Legt man nur die Universalität des freien Falls zugrunde, so sind viele alternative Gravitationstheorien möglich. Es ist letztlich eine experimentelle Frage, den richtigen Zusammenhang zu ermitteln.

Satz 8.7 *Die kovariante Ableitung ist eine Derivation auf der Algebra der Tensorfelder, d.h.*

$$\nabla_v(T\otimes\tilde T) = (\nabla_v T)\otimes\tilde T + T\otimes\nabla_v\tilde T\ , \tag{8.11}$$

die mit Kontraktionen kommutiert:

$$\nabla_v(C^{(i,j)}T) = C^{(i,j)}(\nabla_v T)\ . \tag{8.12}$$

Beweis. Die Derivationseigenschaft folgt sofort aus der üblichen Beweismethode jeder Leibniz-Regel[8]. Im Beweis von (8.12) kommt es nur auf das zu kontrahierende Paar an, so daß wir $T = u \otimes \omega$ annehmen können. Dann ist nach (8.6)

$$\begin{aligned} C^{(1,1)}\big((\mathcal{P}_\tau^v)^{-1}(u_{\gamma_v(\tau)} \otimes \omega_{\gamma_v(\tau)})\big) &= C^{(1,1)}\big((\mathcal{P}_\tau^v)^{-1}(u_{\gamma_v(\tau)}) \otimes (\mathcal{P}_\tau^v)^{-1}(\omega_{\gamma_v(\tau)})\big) \\ &= (\mathcal{P}_\tau^v)^{-1}(\omega_{\gamma_v(\tau)})\big((\mathcal{P}_\tau^v)^{-1}(u_{\gamma_v(\tau)})\big) = \omega_{\gamma_v(\tau)}(u_{\gamma_v(\tau)}) \; . \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (C^{(1,1)}(\nabla_v(u \otimes \omega)))(p) &= \lim_{\tau\to 0} C^{(1,1)}\Big(\frac{1}{\tau}\Big((\mathcal{P}_\tau^v)^{-1}(u_{\gamma_v(\tau)} \otimes \omega_{\gamma_v(\tau)}) - (u_p \otimes \omega_p)\Big)\Big) \\ &= \lim_{\tau\to 0} \frac{(\omega(u))(\gamma_v(\tau)) - (\omega(u))(p)}{\tau} = (\dot\gamma(\omega(u)))(p) \\ &= (v(\omega(u)))(p) = (\nabla_v(C^{(1,1)}(u \otimes \omega)))(p) \; . \end{aligned}$$

□

Die Aussagen des Satzes erlauben es uns nun, die kovariante Ableitung von Kovektorfeldern $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$zu berechnen:

$$\begin{aligned} v(\omega(u)) &= \nabla_v(\omega(u)) = \nabla_v(C^{(1,1)}(u \otimes \omega)) = C^{(1,1)}(\nabla_v u \otimes \omega + u \otimes \nabla_v\omega) \\ &= \omega(\nabla_v u) + (\nabla_v\omega)(u) \\ \Rightarrow \quad (\nabla_v\omega)(u) &= v(\omega(u)) - \omega(\nabla_v u) \; . \end{aligned} \tag{8.13}$$

Setzen wir $v = \partial_\mu$, $u = \partial_\nu$ und $\omega = dx^\rho$ in (8.13), so folgt

$$(\nabla_{\partial_\mu} dx^\rho)(\partial_\nu) = \partial_\mu(\delta_\nu^\rho) - dx^\rho(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\sigma) = -\Gamma_{\mu\nu}^\rho \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\partial_\mu} dx^\rho = -\Gamma_{\mu\nu}^\rho dx^\nu \; . \tag{8.14}$$

Die Leibniz-Regel (8.11) zusammen mit den elementaren kovarianten Ableitungen (8.2) von Vektorfeldern, (8.14) von Kovektorfeldern und (8.10) von Funktionen liefert sofort die Kartendarstellung der kovarianten Ableitung beliebiger lokaler Tensorfelder $T = T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}$. Stellvertretend sei die kovariante Ableitung des metrischen Tensorfeldes erwähnt:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\mu}(g_{\nu\sigma} dx^\nu \otimes dx^\sigma) &= \partial_\mu(g_{\nu\sigma}) dx^\nu \otimes dx^\sigma - g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^\nu dx^\rho \otimes dx^\sigma - g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^\sigma dx^\nu \otimes dx^\rho \; . \\ &= \big(\partial_\mu(g_{\nu\sigma}) - g_{\rho\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^\rho - g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^\rho\big) dx^\nu \otimes dx^\sigma \; . \end{aligned} \tag{8.15}$$

Aus (8.13) folgt außerdem $\nabla_{fv}\omega = f\nabla_v(\omega)$, so daß ∇_v auf der gesamten Tensoralgebra $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear im Argument v ist. Auf diese Weise wird eine Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}^{(k,l)}(M) \ni T \mapsto (\nabla T) \in \mathcal{T}^{(k,l+1)}(M) \; , \\ &(\nabla T)(\omega_1, \dots, \omega_k, v_1, \dots, v_l, v_{l+1}) := (\nabla_{v_{l+1}} T)(\omega_1, \dots, \omega_k, v_1, \dots, v_l) \end{aligned} \tag{8.16}$$

[8]Es sei hier jedoch bemerkt, daß dadurch die kovariante Ableitung von Funktionen (also Typ-$(0,0)$-Tensoren) festgelegt ist: Wegen der $\mathcal{C}^\infty(M)$-Multilinearität ist $f \otimes w = 1 \otimes fw$, und aus $\nabla_v(1) = \nabla_v(1^2) = 2\nabla_v(1) = 0$ folgt $(\nabla_v f)w + f\nabla_v w = \nabla_v(fw)$, d.h. (8.10) folgt aus (8.1).

erklärt, die ebenfalls *kovariante Ableitung* heißt. Für die Komponenten bezüglich der Kartenbasis ist eine abkürzende Schreibweise üblich, in der das letzte mit ∇ zu kontrahierende Vektorfeld mittels Semikolon abgetrennt wird; außerdem wird ∇ nicht geschrieben:

$$\begin{aligned} & T(dx^{\mu_1},\dots,dx^{\mu_1},\partial_{\nu_1},\dots,\partial_{\nu_l} =: T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l} \\ \Rightarrow \quad & (\nabla T)(dx^{\mu_1},\dots,dx^{\mu_1},\partial_{\nu_1},\dots,\partial_{\nu_l},\partial_\rho) =: T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l;\rho}\ . \end{aligned} \tag{8.17}$$

8.4 Geodäten und Normalkoordinaten

Definition 8.8 Eine Kurve $\tau \mapsto \gamma(\tau)$ heißt *Geodäte*, falls $\dot\gamma$ autoparallel entlang γ ist.

Ausgedrückt durch $\dot\gamma = \dot x^\mu \partial_\mu$ erfüllen Geodäten die Gleichung

$$\ddot x^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu = 0\ . \tag{8.18}$$

Wieder nach Picard-Lindelöf gibt es zu gegebenem $v_p \in T_pM$ eine eindeutige Geodäte $]-\epsilon,\epsilon[\ni \tau \mapsto \gamma_{v_p}(\tau)$ mit $\gamma_{v_p}(0) = p$ und $(\dot\gamma_{v_p})_p = v_p$. Eine Skalierung $\tau \mapsto \lambda\tau$ überführt Geodäten in Geodäten, jedoch mit Anfangsgeschwindigkeit $v_p \mapsto \lambda v_p$. Dadurch läßt sich die Geodäte bis $\tau = 1$ fortsetzen, falls v_p in einer genügend kleinen Umgebung von $0 \in T_pM$ liegt. Somit ist eine Abbildung

$$\exp_p : V_0 \ni v_p \mapsto \gamma_{v_p}(1) \in U_p \tag{8.19}$$

zwischen einer Umgebung $V_0 \subset T_pM$ von 0 und einer Umgebung $U_p \subset M$ von p erklärt. Unter Verwendung des Satzes über implizite Funktionen läßt sich zeigen, daß die so definierte *Exponentialabbildung* $\exp_p$ ein Diffeomorphismus zwischen V_0 und U ist. Jede Wahl einer Basis in T_pM liefert dann über die zugehörige Identifizierung $T_pM \simeq \mathbb{R}^D$ eine Karte $(U_p, \exp_p^{-1})$. Die zugehörigen Koordinaten heißen *Normalkoordinaten*. Die Kartendarstellung der Geodäte durch p ist somit $\exp_p^{-1}(\gamma_{v_p}(\tau)) = p + v_p\tau$, d.h. eine Gerade, so daß in Normalkoordinaten gilt

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu}(p + v_p\tau)v_p^\mu v_p^\nu = 0\ .$$

Setzt man $\tau = 0$, so verschwindet der symmetrische Teil der Zusammenhangskoeffizienten im Punkt p (nach Diagonalisierung müssen alle Eigenwerte Null sein). Außerhalb p läßt sich das nicht folgern, denn z.B. könnte $\Gamma^\rho_{\mu\nu}(p+v_p\tau) = f^\rho v^\perp_\mu v^\perp_\nu$ sein, mit $(v^{(\rho)\perp}_\mu)$ orthogonal zu (v_μ).

Ist (M, g) pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit, so kann man durch Hauptachsentransformation Koordinaten wählen, in denen g_p orthonormal (mit Vorzeichen entsprechend der Signatur) ist. Diese Transformationen ändern nichts an $\Gamma^\rho_{\mu\nu}(p) + \Gamma^\rho_{\nu\mu}(p) = 0$. Solche in p zusätzlich orthonormalen Koordinaten heißen *Riemannsche Normalkoordinaten*.

9 Krümmung und Torsion

9.1 Krümmungs- und Torsionstensoren

Definition 9.1 Sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf M. Durch

$$\mathrm{T}(v,w) := \nabla_v w - \nabla_w v - [v,w] \tag{9.1}$$

wird eine Abbildung $\mathrm{T} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definiert, die *Torsion*. Durch

$$\mathrm{R}(u,v)w := \nabla_u(\nabla_v w) - \nabla_v(\nabla_u w) - \nabla_{[u,v]} w \tag{9.2}$$

wird eine Abbildung $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definiert, die *Krümmung*.

Man rechnet für $f_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ nach:

$$\mathrm{T}(f_1 v, f_2 w) = f_1 f_2 \mathrm{T}(v,w)\,, \qquad \mathrm{R}(f_1 u, f_2 v)(f_3 w) = f_1 f_2 f_3 \mathrm{R}(u,v)w\,. \tag{9.3}$$

Somit wird durch

$$\mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (\omega, v, w) \mapsto \omega\big(\mathrm{T}(v,w)\big) \in \mathcal{C}^\infty(M) \tag{9.4}$$

ein Tensorfeld vom Typ $(1,2)$, der *Torsionsstensor* definiert, und durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\ni (\omega, u, v, w) \\ &\mapsto K(\omega, u, v, w) := \omega\big(\mathrm{R}(v,w)u\big) \in \mathcal{C}^\infty(M) \end{aligned} \tag{9.5}$$

wird ein Tensorfeld vom Typ $(1,3)$, der *Krümmungstensor*[9] definiert. In lokalen Koordinaten ∂_μ, dx^ν gilt wegen $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ (Satz von Schwarz)

$$T^\rho_{\mu\nu} := dx^\rho(\mathrm{T}(\partial_\mu, \partial_\nu)) = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}\,, \tag{9.6}$$

$$\begin{aligned} R^\rho_{\sigma\mu\nu} &:= K(dx^\rho, \partial_\sigma, \partial_\mu, \partial_\nu) = dx^\rho(\mathrm{R}(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\sigma) \\ &= \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\kappa}\Gamma^\kappa_{\mu\sigma}\,. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Obwohl $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ keinen Tensor definiert, bildet bezüglich der Kartenbasen die Antisymmetrisierung in den unteren Indizes einen Tensor.

Die Krümmung ist ein Maß für die Richtungsänderung eines Vektors bei Paralleltransport längs geschlossener Kurven: Transportieren wir den Vektor $(\partial_\sigma)_p$ erst längs ∂_ν und dann längs ∂_μ in den Punkt p', so ist das Ergebnis $(\nabla_{\partial_\mu}\nabla_{\partial_\nu}\partial_\sigma)_{p'}$ verschieden vom umgekehrten Transport $(\nabla_{\partial_\nu}\nabla_{\partial_\mu}\partial_\sigma)_{p'}$ von $(\partial_\sigma)_p$ erst längs ∂_μ und dann längs ∂_ν.

Der *Ricci-Tensor* ist die $C^{(1,2)}$-Kontraktion des Krümmungstensors

$$\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (v,w) \mapsto Ric(v,w) := K(dx^\rho, v, \partial_\rho, w) \in \mathcal{C}^\infty(M)\,. \tag{9.8}$$

In lokalen Koordinaten gilt

$$R_{\sigma\nu} := Ric(\partial_\sigma, \partial_\nu) = R^\rho_{\sigma\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\sigma} + \Gamma^\rho_{\rho\kappa}\Gamma^\kappa_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\kappa}\Gamma^\kappa_{\rho\sigma}\,. \tag{9.9}$$

[9] Unsere Bezeichnung K ist kein Standardsymbol; aber R wird zu oft in verschiedener Weise gebraucht. Die ungewöhnliche Reihenfolge hat historische Gründe.

9.2 Bianchi-Identitäten

Satz 9.2 (Bianchi-Identitäten) *Torsion und Krümmung eines affinen Zusammenhangs erfüllen die Gleichungen*

$$0 = \big(\mathrm{R}(u,v)w - \mathrm{T}(\mathrm{T}(u,v),w) - (\nabla_u \mathrm{T})(v,w)\big) + \textit{zyklische Permutationen} \tag{9.10}$$

$$0 = \big((\nabla_u \mathrm{R})(v,w) + \mathrm{R}(\mathrm{T}(u,v),w)\big) + \textit{zyklische Permutationen} \tag{9.11}$$

Beweis: Zunächst liefert die Korrespondenz zwischen T, R und Tensorfeldern vom Typ $(1,2)$ bzw. $(1,3)$ sowie Vertauschung mit Kontraktion[10]:

$$\begin{aligned}(\nabla_u \mathrm{T})(v,w) &= \nabla_u(\mathrm{T}(v,w)) - \mathrm{T}(\nabla_u v, w) - \mathrm{T}(v, \nabla_u w)\\ &= \nabla_u(\nabla_v w - \nabla_w v - [v,w]) - \mathrm{T}(\nabla_u v, w) + \mathrm{T}(\nabla_u w, v)\ , \qquad (9.12)\\ (\nabla_u \mathrm{R})(v,w)z &= \nabla_u(\mathrm{R}(v,w)z) - \mathrm{R}(\nabla_u v, w)z - \mathrm{R}(v, \nabla_u w)z - \mathrm{R}(v,w)\nabla_u z\ . \qquad (9.13)\end{aligned}$$

Die zyklische Summierung (die wir hier als $\langle u,v,w\rangle$ darstellen) von (9.12) ergibt

$$\begin{aligned}&\sum_{\langle u,v,w\rangle} (\nabla_u \mathrm{T})(v,w)\\ &= \sum_{\langle u,v,w\rangle} \mathrm{R}(u,v)w - \sum_{\langle u,v,w\rangle} \mathrm{T}\big(\mathrm{T}(u,v) + [u,v], w\big)\\ &+ \nabla_{[u,v]}w + \nabla_{[v,w]}u + \nabla_{[w,u]}v - \nabla_u([v,w]) - \nabla_v([w,u]) - \nabla_w([u,v])\\ &= \sum_{\langle u,v,w\rangle} \big(\mathrm{R}(u,v)w - \mathrm{T}(\mathrm{T}(u,v),w)\big) + \underbrace{[[u,v],w] + [[v,w],u] + [[w,u],v]}_{=0}\ .\end{aligned}$$

Damit ist (9.10) bewiesen.

Setzen wir in den ersten und letzten Term von (9.13) die Definition (9.2) von R ein und summieren zyklisch, so heben sich alle dreifachen kovarianten Ableitungen gegenseitig weg. Im dritten Term von (9.13) gilt $-\mathrm{R}(v,\nabla_u w)z = +\mathrm{R}(\nabla_u w, v)z$. Die zyklische Summe produziert zusammen mit dem 2. Term $\mathrm{T}(u,v) + [u,v]$, so

[10] Wir zeigen das für das Paar R, K.

$$\begin{aligned}&(\nabla_u K)(\omega,v,w,z) \equiv \omega((\nabla_u \mathrm{R})(w,z)v)\\ &= \nabla_u(K(\omega,v,w,z)) - K(\nabla_u\omega,v,w,z)) - K(\omega,\nabla_u v,w,z)) - K(\omega,v,\nabla_u w,z)) - K(\omega,v,w,\nabla_u z))\\ &= u(\omega(\mathrm{R}(w,z)v)) - (\nabla_u\omega)(\mathrm{R}(w,z)v) - \omega(\mathrm{R}(w,z)\nabla_u v) - \omega(\mathrm{R}(\nabla_u w,z)v) - \omega(\mathrm{R}(w,\nabla_u z)v)\\ &= \omega(\nabla_u(\mathrm{R}(w,z)v)) - \omega(\mathrm{R}(w,z)\nabla_u v) - \omega(\mathrm{R}(\nabla_u w,z)v) - \omega(\mathrm{R}(w,\nabla_u z)v)\end{aligned}$$

Im Schritt von der vorletzten auf die letzte Zeile wurde (8.13) eingesetzt.

daß insgesamt entsteht:

$$\begin{aligned}\sum_{\langle u,v,w\rangle}(\nabla_u \mathrm{R})(v,w)z = \sum_{\langle u,v,w\rangle} &\mathrm{R}(\mathrm{T}(u,v),w)z - \nabla_u\nabla_{[v,w]}z - \nabla_v\nabla_{[w,u]}z - \nabla_w\nabla_{[u,v]}z \\ &+ \nabla_{[v,w]}\nabla_u z + \nabla_{[w,u]}\nabla_v z + \nabla_{[u,v]}\nabla_w z \\ &- \mathrm{R}([u,v],w)z - \mathrm{R}([v,w],u)z - \mathrm{R}([w,u],v)z\,.\end{aligned}$$

Nach Einsetzen von R in die letzte Zeile heben sich alle doppelten kovarianten Ableitungen weg:

$$\sum_{\langle u,v,w\rangle}(\nabla_u \mathrm{R})(v,w)z = \sum_{\langle u,v,w\rangle}\mathrm{R}(\mathrm{T}(u,v),w)z + \underbrace{\nabla_{[[u,v],w]}z + \nabla_{[[v,w],u]}z + \nabla_{[[w,u],v]}z}_{=0}\,,$$

da wegen der Linearität die kovariante Ableitung nach einem einzigen Vektorfeld entsteht, welches nach Jacobi-Identität verschwindet. □

Die Bianchi-Identitäten werden besonders einfach für verschwindende Torsion $\mathrm{T}(u,v)=0$. Dann liefert (9.10) zusätzliche Symmetrien des Krümmungstensors, die die Zahl der unabhängigen Kompenenten (in einer Basis) reduzieren. Nach (9.11) verschwinden gewisse Kombinationen der kovarianten Ableitungen des Krümmungstensors. Es wird sich zeigen, daß ein besonderer Zusammenhang weitere Symmetrien hat, die den einzuführenden Einstein-Tensor divergenzfrei machen. Damit sind Erhaltungssätze verbunden, und diese führen direkt auf die Einsteinschen Feldgleichungen.

10 Levi-Civita-Zusammenhang

10.1 Metrische und torsionsfreie Zusammenhänge

Die bisher betrachteten affinen Zusammenhänge erfordern kein metrisches Tensorfeld auf M. Ist jedoch ein solches gegeben und (M,g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit, so kann man zusätzlich fordern, daß die indefiniten Skalarprodukte invariant unter Paralleltransport bleiben:

Definition 10.1 Ein affiner Zusammenhang ∇ auf einer pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) heißt *metrisch*, falls für alle Vektorfelder v,w gilt

$$g_{\gamma(\tau)}(\mathcal{P}^{\gamma}_{\tau,\tau_0}v_{\gamma(\tau_0)}, \mathcal{P}^{\gamma}_{\tau,\tau_0}w_{\gamma(\tau_0)}) = g_{\gamma(\tau_0)}(v_{\gamma(\tau_0)}, w_{\gamma(\tau_0)})\,. \tag{10.1}$$

Die Formel (10.1) darf nicht verwechselt werden mit der Definition (8.7) des Paralleltransports von g; sie ist nicht automatisch erfüllt. Es werden nur die Tangentialvektoren transportiert und mit dem metrischen Tensor am Zielpunkt kontrahiert.

Bemerkung 10.2 *Nach Sylvesterschem Trägheitssatz gibt es ein lokales Koordinatensystem derart, daß in einem Punkt p der metrische Tensor identisch zu jenem des Minkowski-Raums ist. Da wir den freien Fall nach Bemerkung 8.6 als Paralleltransport beschreiben, heißt das, daß die metrischen Verhältnisse beim freien Fall genau dann die des Minkowski-Raums bleiben, falls der Zusammenhang metrisch ist. Wir kommen also zur Schlußfolgerung, daß das Einsteinsche Äquivalenzprinzip die Wahl eines metrischen Zusammenhangs erzwingt.*

Der freie Fall macht keine Einschränkung an die Torsion. Es ist vor allem die folgende mathematische Besonderheit, die uns die Torsion ausschließen läßt:

Satz 10.3 *Es gibt auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit genau einen metrischen torsionsfreien Zusammenhang, den Levi-Civita-Zusammenhang. Dieser erfüllt die Gleichung*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_w u, v) = {} & w(g(u,v)) + u(g(v,w)) - v(g(w,u)) \\ & + g([v,u],w) - g([w,v],u) - g([u,w],v)\ . \end{aligned} \tag{10.2}$$

Beweis. Angenommen, es gibt einen metrischen torsionsfreien Zusammenhang. Aus dem Vergleich zwischen (10.1) und (8.7) folgt, daß g autoparallel unter metrischen Zusammenhängen ist, d.h. $g_{\gamma(\tau)} = \mathcal{P}^{\gamma}_{\tau,\tau_0} g_{\gamma(\tau_0)}$ für beliebige Kurven. Nach (8.9) verschwindet dann die kovarianten Ableitung, $\nabla_w g \equiv 0$. Wegen der Kontraktionseigenschaft von ∇ folgt die *Ricci-Identität*

$$0 = (\nabla_w g)(u,v) = w(g(u,v)) - g(\nabla_w u, v) - g(u, \nabla_w v)\ . \tag{10.3}$$

Der letzte Term kann bei verschwindender Torsion und Berücksichtigung der Symmetrie von g umgeformt werden:

$$0 = w(g(u,v)) - g(\nabla_w u, v) - g(\nabla_v w, u) - g([w,v],u)\ . \tag{$*$}$$

Nach zyklischer Vertauschung:

$$0 = u(g(v,w)) - g(\nabla_u v, w) - g(\nabla_w u, v) - g([u,w],v)\ , \tag{$**$}$$
$$0 = v(g(w,u)) - g(\nabla_v w, u) - g(\nabla_u v, w) - g([v,u],w)\ , \tag{$***$}$$

Die Linearkombination $(*) + (**) - (***)$ ist exakt (10.2). Die rechte Seite von (10.2) enthält nur das metrische Tensorfeld. Da g nicht ausgeartet ist, ist eine Abbildung $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (v,w) \mapsto \nabla_w u \in \mathfrak{X}(M)$ durch (10.2) eindeutig bestimmt.

Nun ist jedoch noch die *Existenz* des Levi-Civita-Zusammenhangs zu zeigen (es könnte noch sein, daß (10.2) einen Widerspruch enthält). Dazu sieht man (10.2) als Definition an und zeigt die Eigenschaften (8.1) sowie $g(\mathrm{T}(w,u),v) = 0$ und $2g(\nabla_w u, v) + 2g(\nabla_w v, u) = 2w(g(u,v))$ durch direktes Nachrechnen. □

Setzen wir $u = \partial_\sigma$, $v = \partial_\mu$, $w = \partial_\nu$, so folgt mit der Kommutativität dieser Kartenbasen für den Levi-Civita-Zusammenhang

$$2\Gamma^\rho_{\nu\sigma} g_{\rho\mu} = \partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\sigma} \; . \tag{10.4}$$

Wir multiplizieren mit der zu $g = (g_{\rho\sigma})$ inversen Matrix. Es ist üblich, deren Matrixelemente mit $g^{\mu\rho}$ zu bezeichnen, d.h.

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\sigma} = \delta^\mu_\sigma = g_{\sigma\rho} g^{\rho\mu} \; . \tag{10.5}$$

Somit folgt die aus (4.5) bekannte Gleichung für die Christoffel-Symbole

$$\Gamma^\rho_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \big(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\sigma} \big) \; . \tag{10.6}$$

Die Christoffelsymbole sind somit die Zusammenhangskoeffizienten des Levi-Civita-Zusammenhangs. Der Vergleich von (8.18) mit der Herleitung von (4.4) zeigt, daß die *Geodäten* $\tau \mapsto \gamma(\tau)$ des Levi-Civita-Zusammenhangs ($\dot\gamma$ autoparallel längs γ) genau jene Kurven sind, die in extremaler Eigenzeit $\delta s := \int_\alpha^\beta d\tau \sqrt{g(\dot\tau, \dot\tau)}$ durchlaufen werden.

10.2 Kontraktion mit der (inversen) Metrik

Das inverse metrische Tensorfeld $g^{-1} \in \mathcal{T}^{(2,0)}(M)$ ist definiert durch

$$(C^{(2,1)}(g^{-1} \otimes g))(\omega, w) = (g^{-1}(\omega, dx^\mu) g(\partial_\mu, v) := \omega(v) \; .$$

Wegen der Symmetrien liefern die Kontraktionen $C^{(1,1)}, C^{(1,2)}, C^{(2,2)}$ dasselbe Ergebnis. Die Koordinaten bezüglich der Kartenbasis $g^{-1}(dx^\rho, dx^\mu) := g^{\rho\mu}$ erfüllen (10.5). Aus der Gleichung folgt insbesondere $\nabla_v g^{-1} = 0$ für den Levi-Civita-Zusammenhang.

Wir können den durch das metrische Tensorfeld (und sein Inverses) implementierten Isomorphismus zwischen $\mathfrak{X}(M)$ und $\mathfrak{X}^*(M)$ nutzen, um den Typ eines Tensors zu verschieben. Ist $T \in \mathcal{T}^{(k,l)}(M)$, so bezeichne[11]

$$T^* := C^{(2,1)}(g^{-1} \otimes T) \in \mathcal{T}^{(k+1,l-1)}$$

die Kontraktion des ersten Vektorfelds in T, und

$$T_* := C^{(1,2)}(g \otimes T) \in \mathcal{T}^{(k-1,l+1)}$$

die Kontraktion des ersten Kovektorfelds in T. Für die Komponenten bezüglich der Kartenbasen bedeutet das

$$(T^*)^{\mu_0 \ldots \mu_k}_{\nu_2 \ldots \nu_l} := g^{\mu_0 \nu_1} T^{\mu_1 \ldots, \mu_k}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \; , \qquad (T_*)^{\mu_2 \ldots \mu_k}_{\nu_0 \ldots \nu_l} := g_{\nu_0 \mu_1} T^{\mu_1 \ldots, \mu_k}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \; .$$

[11] Unsere Operationen * und $_*$ sind keine Standardbezeichnungen.

Gegebenenfalls würden wir mit $T^{\cdot *}$ bzw $T_{\cdot *}$ die Kontraktion des zweiten (Ko)vektorfeldes bezeichnen, usw.

Die Eigenschaften (Derivation der Tensoralgebra, Vertauschen mit Kontraktionen, $\nabla g = 0$ und $\nabla g^{-1} = 0$) des Levi-Civita-Zusammenhangs implizieren, daß eine Gleichung für die kovariante Ableitung richtig bleibt, wenn sie mit g oder g^{-1} kontrahiert wird.

10.3 Riemann-Tensor

Der Krümmungstensor zum Levi-Civita-Zusammenhang heißt *Riemann-Tensor*. Der mit g kontrahierte Riemann-Tensor

$$K_* \in \mathcal{T}^{(0,4)}(M)\ , \qquad K_*(z,w,u,v) := g(z,\partial_\rho)K(dx^\rho,w,u,v) = g(z,\mathrm{R}(u,v)w) \tag{10.7}$$

besitzt (neben der aus (9.2) folgenden Antisymmetrie in den ersten beiden Argumenten und (9.10) für $T \equiv 0$) weitere Symmetrien:

Satz 10.4 *Für beliebige Vektorfelder $u,v,w,z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt*

$$\begin{aligned} K_*(z,w,u,v) &= g(\mathrm{R}(u,v)w,z) = -g(\mathrm{R}(u,v)z,w) = -K_*(w,z,u,v)\ , \\ K_*(z,w,u,v) &= g(\mathrm{R}(u,v)w,z) = g(\mathrm{R}(w,z)u,v) = K_*(v,u,w,z) \end{aligned} \tag{10.8}$$

und zusammen auch $K(z,w,u,v) = K(u,v,z,w)$.

Beweis: Aus der Ricci-Identität (10.3) und der Symmetrie von g folgt

$$\begin{aligned} g(\nabla_u\nabla_v w,w) &= u(g(\nabla_v w,w)) - g(\nabla_v w,\nabla_u w) \\ &= \frac{1}{2}uvg(w,w) - g(\nabla_v w,\nabla_u w)\ . \end{aligned}$$

Nach Antisymmetriesierung entsteht

$$g(\mathrm{R}(u,v)w,w) + g(\nabla_{[u,v]}w,w) = \frac{1}{2}uvg(w,w) - \frac{1}{2}vug(w,w)\ .$$

Wieder nach Ricci-Identität gilt aber $g(\nabla_{[u,v]}w,w) = \frac{1}{2}[u,v](g(w,w))$, so daß $g(\mathrm{R}(u,v)w,w) = 0$ gezeigt ist für alle Vektorfelder w. Aus $w \mapsto w+z$ folgt dann die erste Gleichung (10.8).

Die Bianchi-Identität (9.10) für $\mathrm{T} = 0$ führt auf

$$g(\mathrm{R}(u,v)w,z) = -g(\mathrm{R}(v,u)w,z) = g(\mathrm{R}(u,w)v,z) + g(\mathrm{R}(w,v)u,z)\ . \qquad (*)$$

Die analoge Rechnung mit der ersten Gleichung (10.8) führt auf

$$g(\mathrm{R}(u,v)w,z) = -g(\mathrm{R}(u,v)z,w) = g(\mathrm{R}(v,z)u,w) + g(\mathrm{R}(z,u)v,w)\ . \qquad (**)$$

Die Summe beider Gleichungen ist

$$\begin{aligned}&2g(\mathrm{R}(u,v)w,z)\\&=g(\mathrm{R}(u,w)v,z)+g(\mathrm{R}(w,v)u,z)+g(\mathrm{R}(v,z)u,w)+g(\mathrm{R}(z,u)v,w)\;.\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist unter Berücksichtigung der bisherigen Symmetrien invariant unter $u \leftrightarrow w$ und $v \leftrightarrow z$. □

In lokalen Basen gilt nach (10.7) und (9.7)

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} := K_*(\partial_\rho,\partial_\sigma,\partial_\mu,\partial_\nu) = g(\partial_\rho,\mathrm{R}(\partial_\mu,\partial_\nu)\partial_\sigma) = g_{\rho\kappa}R^\kappa_{\mu\nu\sigma}\;. \tag{10.9}$$

Die Komponenten dieses komplett kovarianten Riemann-Tensors haben somit die Symmetrien

$$\begin{aligned}R_{\rho\sigma\mu\nu} &= -R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}\;,\\ 0 &= R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu}\;,\\ 0 &= R_{\rho\sigma\mu\nu;\kappa} + R_{\rho\sigma\nu\kappa;\mu} + R_{\rho\sigma\kappa\mu;\nu}\;.\end{aligned} \tag{10.10}$$

Wir zählen die unabhängigen Komponenten des Riemann-Tensors. Es gibt $\frac{D(D-1)}{2}$ antisymmetrisierte Indexpaare. Der Riemann-Tensor ist symmetrisch in beiden Paaren, so daß nach der ersten Gleichung $\frac{D(D-1)(D(D-1)+2)}{8}$ unabhängige Komponenten verbleiben. Die zweite Gleichung in (10.10) ist nur dann nicht identisch erfüllt, wenn alle Indizes verschieden sind. Dazu gibt es $\binom{D}{4}$ Möglichkeiten. Es verbleiben $\frac{D(D-1)(D(D-1)+2)}{8} - \binom{D}{4} = \frac{D^2(D^2-1)}{12}$ unabhängige Kompontenten, also eine für $D = 2$, 6 für $D = 3$ und 20 für $D = 4$. Die Gleichungen in der letzten Zeile von (10.10) sind Integrabilitätsbedingungen. Ein Tensor K mit den in den ersten beiden Gleichungen definierten Symmetrien geht nur dann aus einem Metrischen Tensorfeld hervor, wenn die $\frac{D(D-1)}{2} \cdot \binom{D}{3}$ Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. In $D = 3$ Dimensionen sind es 3 Bedingungen, in $D = 4$ schon 24.

Einsetzen von (10.6) in (9.7) zeigt, daß die Komponenten des Riemann-Tensors Polynome[12] in $g_{\mu\nu}, g^{\rho\sigma}$ und deren ersten und zweiten partiellen Ableitungen sind. Die zweiten partiellen Ableitungen treten höchstens linear auf.

10.4 Ricci-Tensor

Wir sehen uns nun den Ricci-Tensor $Ric(u,v) = K(dx^\rho, u, \partial_\rho, v)$ an.

Satz 10.5 *Der Ricci-Tensor zum Levi-Civia-Zusammenhang ist symmetrisch, $Ric(w,v) = Ric(v,w)$ für alle $v, w \in \mathfrak{X}(M)$.*

Beweis.

$$\begin{aligned}Ric(w,v) &= K(dx^\rho, w, \partial_\rho, v) = g^{-1}(dx^\rho, dx^\kappa)K_*(\partial_\kappa, w, \partial_\rho, v)\\ &= g^{-1}(dx^\rho, dx^\kappa)K_*(\partial_\rho, v, \partial_\kappa, w) = K(dx^\kappa, v, \partial_\kappa, \rho) = Ric(v,w)\;.\end{aligned}$$ □

[12] Dabei ist $g^{\rho\sigma}$ eine rationale Funktion von $g_{\mu\nu}$.

Definition 10.6 Der *Krümmungsskalar* $R \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist die vollständige Kontraktion des Ricci-Tensors mit dem inversen metrischen Tensorfeld g^{-1},

$$R := C^{(1,1)} Ric^* \equiv Ric^*(dx^\mu, \partial_\mu) \equiv g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu) Ric(\partial_\nu, \partial_\mu) \; . \tag{10.11}$$

Als *Einstein-Tensor* $G \in \mathcal{T}^{0,2}(M)$ wird die folgende Linearkombination bezeichnet:

$$G = Ric - \frac{1}{2} Rg \; . \tag{10.12}$$

Der Einstein-Tensor ist symmetrisch, und es gilt $G^*(\omega, v) = Ric^*(\omega, v) - \frac{1}{2} R\omega(v)$.

Das folgende Theorem ist das wichtigste Ergebnis dieses mathematischen Teils der Vorlesung. Es wird direkt auf die Einsteinschen Feldgleichungen führen!

Theorem 10.7 *Der Einstein-Tensor ist divergenzfrei (bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs), d.h.*

$$(\operatorname{div} G)(v) := (\nabla_{\partial_\mu} G^*)(dx^\mu, v) = 0 \quad \textit{für alle } v \in \mathfrak{X}(M) \; . \tag{10.13}$$

Beweis. Wir formen die Divergenz des Ricci-Tensors mit Hilfe der Bianchi-Identität (9.11) um, wobei wir die Kommutativität der kovarianten Ableitung mit Kontraktionen mit g^{-1} nutzen:

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{div} Ric)(v) := (\nabla_{\partial_\mu} Ric^*)(dx^\mu, v) \\
&= g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu)(\nabla_{\partial_\mu} K)(dx^\rho, \partial_\nu, \partial_\rho, v) \\
&= g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu) dx^\rho\big((\nabla_{\partial_\mu} \mathrm{R})(\partial_\rho, v)\partial_\nu\big) \\
&= g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu) dx^\rho\big(- (\nabla_{\partial_\rho} \mathrm{R})(v, \partial_\mu)\partial_\nu - (\nabla_v \mathrm{R})(\partial_\mu, \partial_\rho)\partial_\nu\big) \\
&= -g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu)(\nabla_{\partial_\rho} K)(dx^\rho, \partial_\nu, v, \partial_\mu) - g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu)(\nabla_v K)(dx^\rho, \partial_\nu, \partial_\mu, \partial_\rho) \\
&= -g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu) g^{-1}(dx^\rho, dx^\kappa)(\nabla_{\partial_\rho} K_*)(\partial_\kappa, \partial_\nu, v, \partial_\mu) \\
&+ g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu)(\nabla_v Ric)(\partial_\nu, \partial_\mu) \\
&= -g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu) g^{-1}(dx^\rho, dx^\kappa)(\nabla_{\partial_\rho} K_*)(\partial_\nu, \partial_\kappa, \partial_\mu, v) + (\nabla_v R) \\
&= -g^{-1}(dx^\rho, dx^\kappa)(\nabla_{\partial_\rho} Ric)(\partial_\kappa, v) + (\nabla_v R) = -(\nabla_{\partial_\rho} Ric^*)(dx^\rho, v) + (\nabla_v R) \; .
\end{aligned}$$

Schreiben wir nun $v = dx^\mu(v)\partial_\mu = g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu) g(\partial_\nu, v)\partial_\mu = g^*(dx^\mu, v)\partial_\mu$, so folgt

$$2(\operatorname{div} Ric)(v) = (\nabla_v R) = g^*(dx_\mu, v)\nabla_{\partial_\mu} R = (\nabla_{\partial_\mu}(Rg^*))(dx^\mu, v) = (\operatorname{div}(Rg))(v) \; .$$

□

Die Divergenzfreiheit des Einstein-Tensors ist eine äußerst seltene Eigenschaft. Ohne Beweis[13] zitieren wir:

[13] D. Lovelock, "The Einstein tensor and its generalizations," J. Math. Phys. **12** (1971) 498–501. D. Lovelock, "The four-dimensionality of space and the Einstein tensor," J. Math. Phys. **13** (1972) 874–876.

Theorem 10.8 (Lovelock, 1971) *Sei $D = 4$. Die einzigen zweifach kovarianten Tensorfelder $T \in \mathcal{T}^{0,2}(M)$ mit den Eigenschaften*

i) *$T_{\mu\nu}(p)$ ist ein index-kontrahiertes Polynom allein von $g_{\rho\sigma}(p), g^{\rho\sigma}(p)$ und deren ersten und zweiten partiellen Ableitungen,*

ii) *T ist divergenzfrei*

sind reelle Linearkombinationen des Einstein-Tensors G und des metrischen Tensors g.

11 Beispiele

11.1 $D = 2$

Wir betrachten die Einschränkung der Kugelkoordinaten aus Beispiel 2.3 auf konstanten Radius $r = \text{const}$. Dann gilt nach (2.10)

$$g = g_{\vartheta\vartheta} d\vartheta \otimes d\vartheta + g_{\varphi\varphi} d\varphi \otimes d\varphi \ , \qquad g_{\vartheta\vartheta} = r^2 \ , \ g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\vartheta \ . \tag{11.1}$$

Es folgt für die Christoffelsymbole

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \ , \quad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\vartheta} = \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta \ . \tag{11.2}$$

Die einzige unabhängige Komponente des Riemann-Tensors ist nach (9.7)

$$R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = g_{\vartheta\vartheta}\Big(\partial_\theta \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi}\Big) = r^2(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = r^2\sin^2\vartheta \ . \tag{11.3}$$

Damit gilt für den Ricci-Tensor

$$R_{\vartheta\vartheta} = g^{\varphi\varphi} R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = 1 \qquad\qquad R_{\varphi\varphi} = g^{\vartheta\vartheta} R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \sin^2\vartheta \tag{11.4}$$

oder kurz $R_{\mu\nu} = \frac{1}{r^2} g_{\mu\nu}$. Wegen $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 2$ folgt $R = \frac{2}{r^2}$ für den Krümmungsskalar, so daß der Einstein-Tensor identisch verschwindet: $G_{\mu\nu} = 0$. Letzteres muß für eine beliebige 2-dimensionale Mannigfaltigkeit gelten, da es für $D = 2$ keine Integrabilitätsbedingung geben kann. Außerdem gilt ganz allgemein $R(p) = 2\kappa_1(p)\kappa_2(p)$, wobei $\kappa_i(p)$ die beiden Hauptkrümmungen im Punkt p sind, und daraus bestimmt sich $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ und $R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu})R$.

11.2 $D = 3$

Wir greifen erneut das Beispiel 2.3 auf, erlauben aber einen variablen Radius. Dann sind nach (2.10) die einzigen nichtverschwindenden Komponenten des metrischen Tensorfeldes

$$g_{rr} = 1 \ , \ g_{\vartheta\vartheta} = r^2 \ , \ g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\vartheta \ . \tag{11.5}$$

Es folgt für die Christoffelsymbole

$$\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -r \ , \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\vartheta \ , \quad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \ , \tag{11.6}$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi\vartheta} = \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta \ , \quad \Gamma^\vartheta_{\vartheta r} = \Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \ , \quad \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r} \ . \tag{11.7}$$

Es gibt nach (9.7) 6 unabhängige Komponenten des Riemann-Tensors:

$$\begin{aligned}
R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} &= g_{\vartheta\vartheta}\big(\partial_\theta\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} + \Gamma^\vartheta_{\vartheta r}\Gamma^r_{\varphi\varphi} - \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi}\big) = 0 \\
R_{\vartheta r\vartheta r} &= g_{\vartheta\vartheta}\big(-\partial_r\Gamma^\vartheta_{\vartheta r} - \Gamma^\vartheta_{r\vartheta}\Gamma^\vartheta_{\vartheta r}\big) = 0 \\
R_{\varphi r\varphi r} &= g_{\varphi\varphi}\big(-\partial_r\Gamma^\varphi_{\varphi r} - \Gamma^\varphi_{r\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi r}\big) = 0 \\
R_{\varphi r\varphi\vartheta} &= g_{\varphi\varphi}\big(-\partial_\vartheta\Gamma^\varphi_{\varphi r} + \Gamma^\varphi_{\varphi\vartheta}\Gamma^\vartheta_{\vartheta r} - \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi r}\big) = 0 \\
R_{\vartheta r\vartheta\varphi} &= g_{\vartheta\vartheta}\big(-\partial_\varphi\Gamma^\vartheta_{\vartheta r}\big) = 0 \ , \qquad R_{r\vartheta r\varphi} = 0 \ .
\end{aligned} \tag{11.8}$$

Die Krümmung verschwindet. Das war zu erwarten, da wir die Euklidische Metrik nur durch krummlinige Koordinaten ausgedrückt hatten. Ein Tensorfeld verschwindet genau dann in einem Koordinatensystem, wenn es in jedem Koordinatensystem verschwindet.

Natürlich gibt es echte gekrümmte Mannigfaltigkeiten in $D = 3$. Man kann zeigen, daß der Riemann-Tensor allein durch den Ricci-Tensor und den metrischen Tensor festgelegt ist (Riemann-Tensor und Ricci-Tensor haben jeweils 6 unabhängige Komponenten):

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\mu}R_{\sigma\nu} + g_{\sigma\nu}R_{\rho\mu} - g_{\sigma\mu}R_{\rho\nu} - g_{\rho\nu}R_{\sigma\mu} - \frac{1}{2}R(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\mu}g_{\sigma\mu}) \ . \tag{11.9}$$

Wir werden sehen, daß die Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum sich auf $Ric \equiv 0$, d.h. $R_{\mu\nu} = 0$ reduzieren. Somit gibt es in $2+1$ Dimensionen keine Krümmung im Vakuum. Das bedeutet, daß Gravitation, aufgefaßt als Krümmung von Raum und Zeit, nicht propagieren kann. In $3+1$ Dimensionen ist das grundlegend anders!

11.3 $D = 4$: Rinder-Raumzeit

Wir berechnen den Riemann-Tensor für die durch den metrischen Tensor (2.8) definierte Rinder-Mannigfaltigkeit. Die Christoffelsymbole wurden in (4.6) berechnet. Damit folgt als einzige nicht trivialerweise verschwindende Komponente des Riemann-Tensor

$$R_{1010} = g_{11}\big(\partial_1\Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10}\big) = 0 \ . \tag{11.10}$$

Da es sich nur um eine Koordinatentransformation des flachen Minkowski-Raums handelte, muß die Krümmung verschwinden.

11.4 $D = 4$: Rotation

Die folgende Koordinatentransformation beschreibt ein um die x^3-Achse mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes Bezugssystem im flachen Minkowski-Raum:

$$\begin{aligned} ct = x^0 &= \xi^0 \,, & x^1 &= \xi^1 \cos(\tfrac{\omega}{c}\xi^0) - \xi^2 \sin(\tfrac{\omega}{c}\xi^0) \,, \\ x^2 &= \xi^1 \sin(\tfrac{\omega}{c}\xi^0) + \xi^2 \cos(\tfrac{\omega}{c}\xi^0) \,, & x^3 &= \xi^3 \,. \end{aligned} \tag{11.11}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} &(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= \big(1 - \tfrac{\omega^2}{c^2}((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2)\big)(d\xi^0)^2 + 2\tfrac{\omega}{c}\xi^2 d\xi^1 d\xi^0 - 2\tfrac{\omega}{c}\xi^1 d\xi^2 d\xi^0 \\ &- (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2 \end{aligned}$$

und daraus als nichtverschwindende Komponenten des metrischen Tensorfeldes

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - \tfrac{\omega^2}{c^2}((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2)\big) \,, & g_{11} &= g_{22} = g_{33} = -1 \,, \\ g_{10} &= g_{01} = \tfrac{\omega}{c}\xi^2 \,, & g_{20} &= g_{02} = -\tfrac{\omega}{c}\xi^1 \,. \end{aligned} \tag{11.12}$$

Man berechnet $\det g = -g_{00} - g_{01}^2 - g_{02}^2 = -1$ und dann

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{-\det g} = 1 \,, & g^{11} &= \frac{g_{00} + g_{02}^2}{\det g} = -1 + g_{01}^2 \,, \\ g^{22} &= \frac{g_{00} + g_{01}^2}{\det g} = -1 + g_{02}^2 \,, & g^{33} &= -1 \\ g^{01} &= g^{10} = g_{01} \,, \quad g^{02} = g^{20} = g_{02} \,, & g^{12} &= g^{21} = g_{01} g_{02} \,. \end{aligned} \tag{11.13}$$

Daraus gewinnt man die folgenden nicht identisch verschwindenden Christoffel-Symbole

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{00} &= -\tfrac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{00} - \tfrac{1}{2}g^{12}\partial_2 g_{00} = -\frac{\omega^2}{c^2}\xi^1 \,, & \Gamma^2_{00} &= -\frac{\omega^2}{c^2}\xi^2 \,, \\ \Gamma^1_{10} &= \tfrac{1}{2}g^{10}\partial_1 g_{00} - \tfrac{1}{2}g^{12}\partial_2 g_{01} + \tfrac{1}{2}g^{12}\partial_1 g_{02} = 0 \,, & \Gamma^2_{20} &= 0 \,, \\ \Gamma^1_{20} &= -\tfrac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{20} + \tfrac{1}{2}g^{11}\partial_2 g_{10} + \tfrac{1}{2}g^{10}\partial_2 g_{00} = -\frac{\omega}{c} \,, & \Gamma^2_{10} &= \frac{\omega}{c} \,, \\ \Gamma^0_{01} &= \tfrac{1}{2}g^{00}\partial_1 g_{00} - \tfrac{1}{2}g^{02}\partial_2 g_{01} + \tfrac{1}{2}g^{02}\partial_1 g_{02} = 0 \,, & \Gamma^0_{02} &= 0 \,. \end{aligned} \tag{11.14}$$

Der Krümmungstensor muß identisch Null sein. Interessant sind vor allem die resultierenden Geodätengleichungen. Zunächst ist $\ddot{\xi}^0 = 0$, so daß wir den Kurvenparameter als $\xi_0 = ct$ annehmen können. Wegen der Homogenität im Kurvenparameter ist in den folgenden Gleichungen der Punkt einfach die Zeitableitung:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{\xi}^1 + \Gamma^1_{00}(\dot{\xi}^0)^2 + 2\Gamma^1_{20}\dot{\xi}^0\dot{\xi}^2 = \ddot{\xi}^1 - \omega^2\xi^1 - 2\omega\dot{\xi}^2 \,, \\ 0 &= \ddot{\xi}^2 + \Gamma^2_{00}(\dot{\xi}^0)^2 + 2\Gamma^2_{10}\dot{\xi}^0\dot{\xi}^1 = \ddot{\xi}^2 - \omega^2\xi^2 + 2\omega\dot{\xi}^1 \,. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Fassen wir die räumlichen Koordinaten zu $\vec{r} := (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ zusammen und setzen $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, so ergeben sich die vektoriellen Gleichungen

$$\ddot{\vec{r}} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,. \tag{11.16}$$

Die beiden Terme auf der rechten Seite beschreiben die Zentrifugalbeschleunigung plus die Coriolis-Beschleunigung.

Teil III
Kovarianzprinzip und Energie-Impuls-Tensor

12 Vorbemerkungen

Rückblickend können wir nach Äquivalenzprinzip folgende Korrespondenz aufstellen:

Metrik $g_{\mu\nu}$	Gravitationspotential Φ
Christoffel-Symbole $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$	Kräfte (genauer: Beschleunigungen)
Riemann-Tensor $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$	Inhomogenität des Gravitionsfeldes, Gezeitenkräfte

Das Allgemeine Kovarianzprinzip fordert, alle Koordinatensysteme als gleichwertig zu betrachten:

- Gleichungen der Physik sind allgemein-kovariant, d.h. sie behalten ihre Form unter allgemeinen Koordinatentransformationen.
- Gleichungen der Physik nehmen ihre speziell-relativistische Form an, falls $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}(x)$.

Das läßt sich erreichen, wenn die Gleichungen der Physik *tensoriell* formuliert werden. Lautet eine Gleichung z.B. $A_{\mu\nu\rho} = B_{\mu\nu\rho}$, so behält sie die gleiche Form in beliebigen Koordinatensystemen:

$$A'_{\mu'\nu'\rho'} = B'_{\mu'\nu'\rho'} \text{ mit } A'_{\mu'\nu'\rho'}(x') = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho'}} A_{\mu\nu\rho}(x(x')) \; .$$

Ein lokales Inertialsystem ist definiert durch $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ und $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = 0$. Der Riemann-Tensor $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ kann jedoch nicht wegtransformiert werden. Genauer gilt:

Satz 12.1 *Sei p ein Punkt der Raumzeit. In einer Umgebung von p gibt es Koordinaten ξ^{μ} derart, daß $g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}$ und $(\partial_{\rho} g_{\mu\nu})(p) = 0$. Ein solches Koordinatensystem heißt lokal-flach in p, und die ξ^{μ} heißen Riemannsche Normalkoordinaten.*

Beweis. Die in Abschnitt 8.4 eingeführte Exponentialabbildung liefert das gewünschte. □

Die Geodätengleichung (8.18) reduziert sich deshalb lokal auf $\ddot{x}^{\mu}\big|_{x=p} = 0$, d.h. es liegt lokal ein Inertialsystem vor.

Folgende Methode kann als Daumenregel formuliert werden, um allgemeinkovariante Gleichungen der Physik zu gewinnen:

12.2 Korrespondenzprinzip. *Nehme speziell-relativistische Gleichungen, ersetze die Minkowski-Metrik η durch ein allgemeines metrisches Tensorfeld g und alle partiellen Ableitungen ∂_μ durch kovariante ∇_{∂_μ}.*

Diese Vorschrift ist nicht immer eindeutig, da im Gegensatz zu partiellen Ableitungen mehrfache kovariante Ableitungen nicht kommutieren. Der Unterschied wird durch den Riemann-Tensor beschrieben. Gegebenenfalls muß experimentell ermittelt werden, welche Gleichung die richtige ist.

12.1 Allgemein-kovariante Elektrodynamik

Die Maxwellschen Gleichungen lauten in speziell-relativistischer Schreibweise[14]:

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -\mu_0 j^\mu \ , \\ \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{12.1}$$

Somit würde man als allgemein-kovariante Gleichungen erwarten:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu F^{\mu\nu} &= -\mu_0 j^\mu \ , \\ \nabla_\rho F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{12.2}$$

Ergänzt man die Koordinatendifferentiale und berücksichtigt deren kovariante Ableitungen (8.14), so zeigt sich jedoch, daß sich die Christoffelsymbole wegheben und (12.1) eine korrekte tensorielle Gleichung ist. Ebenso zeigt sich $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Dagegen wird in den inhomogenen Maxwellschen Gleichungen (die obere Gleichung in (12.2)) die kovariante Ableitung wichtig.

Lemma 12.3 *Es gilt folgende Version der Kontinuitätsgleichung:*

$$\nabla_\mu j^\mu = 0 \ . \tag{12.3}$$

Beweis. Das ist sofort klar für die speziell-relativistische Gleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$. Aus dem Korrespondenzprinzip folgt die allgemeine Form. Tatsächlich ist $\nabla_\mu j^\mu$ proportional zu $R_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, was wegen der Symmetrieeigenschaften verschwindet. □

Drückt man F durch A aus, so folgen in der speziell-relativistischen Physik die Wellengleichungen $\partial_\nu\partial^\mu A^\nu - \partial_\nu\partial^\nu A^\mu = -\mu_0 j^\mu$, die sich nach Kovarianzprinzip in

$$\nabla_\nu\nabla^\mu A^\nu - \nabla_\nu\nabla^\nu A^\mu = -\mu_0 j^\mu \tag{12.4}$$

[14]Führt man das Vektorpotential $A = A_\mu dx^\mu \in \mathfrak{X}^*(M)$ ein, so ist mit $F = dA = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu)$ die zweite Gleichung die Identität $d^2A = 0$, während die erste die Form $*d*F = \mu_0 j$ annimmt.

übersetzen. Tauscht man im ersten Term die Indizes, so ergibt sich ein Ricci-Tensor:

$$\nabla^\mu \nabla_\nu A^\nu - \nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu - R^\mu_\nu A^\nu = -\mu_0 j^\mu \ . \tag{12.5}$$

Der Term mit dem Ricci-Tensor hängt von der gewählten Reihenfolge der partiellen Ableitungen in der speziell-relativistischen Formulierung ab. Hier zeigt sich, daß die Übersetzung von partiellen in kovariante Ableitungen nicht immer zu eindeutigen Ergebnissen führt.

13 Erhaltungssätze

Die Kontinuitätsgleichung (12.3) führt auf:

Lemma 13.1

$$0 = \nabla_\mu j^\mu = \frac{1}{\sqrt{-\det g}} \partial_\nu \big(\sqrt{-\det g}\, j^\nu \big) \ . \tag{13.1}$$

Beweis. Aus den Eigenschaften der kovarianten Ableitung folgt $\partial_\mu j^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\nu} j^\nu = 0$. Die Formel (10.6) für die Christoffelsymbole reduziert sich bei gleichem oberen und einem unteren Index bei Beachtung der Symmetrien von g auf

$$\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_\nu g_{\rho\mu} \ . \tag{13.2}$$

Nach Entwicklungssatz für die Determinante gilt

$$\partial_\nu (\det g) = (-1)^{\rho+\mu} \det A^{\rho\mu}\, \partial_\nu g_{\rho\mu} \ , \tag{13.3}$$

wobei $A^{\rho\mu} \in M(D-1, \mathbb{R})$ der Minor ist, der aus g durch Weglassen der ρ-ten Zeile und μ-ten Spalte entsteht. Dieser Minor tritt auch in der Formel für die inverse Matrix auf:

$$g^{\mu\rho} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{\det g} \det A^{\rho\mu} \ .$$

Somit folgt

$$\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{1}{2 \det g} \partial_\nu (\det g) = \frac{1}{\sqrt{-\det g}} \partial_\nu \sqrt{-\det g} = \partial_\nu \ln(-\det g) \tag{13.4}$$

und daraus die Kontinuitätsgleichung (13.1). □

Somit hat die *Dichte* $\sqrt{-\det g}\, j^\nu$ eine verschwindende 4-dimensionale Divergenz im üblichen Sinn. Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt der Erhaltungssatz

$$Q = \frac{1}{c} \int_\Sigma dS_0 \sqrt{-\det g}\, j^0 = \text{const} \tag{13.5}$$

für die Ladung, falls $\vec{j}$ außerhalb einer endlichen Raumzeit-Region verschwindet. Dabei ist Σ eine dreidimensionale Hyperfläche mit Volumenelement dS_0.

Ähnliche Erhaltungssätze können für i.a. nicht erwartet werden für divergenzfreie Tensoren höheren Typs (falls diese nicht komplett antisymmetrisch sind).

13.1 Energie-Impuls-Tensor

Dieser beschreibt die Ströme zu den Erhaltungsgrößen $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$. Nach Anwendung von Symmetrisierungstechniken erreicht man

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} w & c\vec{\pi} \\ \hline c\vec{\pi} & \mathbb{T} \end{array}\right) . \tag{13.6}$$

Dabei sind $T^{00} = w$ die Energiedichte, $\vec{\pi}$ rechts oben die Impulsdichte, $c^2\vec{\pi}$ links unten die Energiestromdichte und $\mathbb{T}$ der Spannungstensor.

In der speziellen Relativitätstheorie erhält man aus den Bewegungsgleichungen die vier Kontinuitätsgleichungen $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Die Gleichung für $\nu = 0$ lautet dann $\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(c^2\vec{\pi}) = 0$. Aus diesen Gleichungen ergeben sich mit Gaußschem Integralsatz die Erhaltungsgrößen

$$P^\nu = \frac{1}{c}\int d^3x\, T^{0\nu} = \text{const} . \tag{13.7}$$

Beispiel 13.2 (Staub) Staub kann als ein Materiestrom der Dichte $\varrho(x)$ und Geschwindigkeit $u^\mu(x)$ aufgefaßt werden. Im mitbewegten Ruhsystem $u'^\mu = (c, 0, 0, 0)$ sei $\varepsilon(x) = \varrho(x)c^2$ die Energiedichte und p der Druck. Dann gilt

$$T'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varrho c^2 & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix}$$

Nach Rücktransformation in das ursprüngliche Bezugssystem folgt die tensorielle Gleichung

$$T^{\mu\nu} = (\varrho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \tag{13.8}$$

Für Photonen zeigt sich $T^\mu_\mu = 0$ (Dilatationsinvarianz). Somit folgt $p = \frac{\epsilon}{3}$.

Angenommen, die allgemein-kovariante Verallgemeinerung ist $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, mit $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Dann gilt

$$0 = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\mu} T^{\rho\mu} = \frac{1}{\sqrt{-\det g}}\partial_\mu(\sqrt{\det g}T^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu_{\rho\mu} T^{\rho\mu} . \tag{13.9}$$

Somit kann auf dem üblichen Weg kein Erhaltungssatz gewonnen werden: Für die kovariante Verallgemeinerung von (13.7),

$$P^\mu = \frac{1}{c}\int_{x^0=const} d^3x\, \sqrt{-\det g}\, T^{0\mu} \tag{13.10}$$

gilt

$$\frac{d}{dt}P^0 = -\int_{x^0=const} d^3x\, \sqrt{-\det g}\, \Gamma^0_{\rho\nu} T^{\rho\nu} . \tag{13.11}$$

Man würde diese Gleichung so interpretieren, daß auch das Gravitatioinsfeld Energie enthält, die mit jener der Materie ausgetauscht wird.

Teil IV
Dynamik des Gravitationsfeldes

14 Einsteinsche Feldgleichungen

Die Geodätengleichungen beschreiben, in welcher Weise die Geometrie bestimmt, wie sich Materie bewegt [Einstein, 1907]. Umgekehrt suchen wir Gleichungen, nach denen die Materie festlegt, wie sich die Geometrie krümmt. Diese Gleichungen wurden gefunden in

- A. Einstein, "Die Feldgleichungen der Gravitation," S. Ber. Preuß. Akad. Wiss., 25.11.1915.
- D. Hilbert, 20.11.1915

Die Gleichungen sollten tensoriell sein und sich im nichtrelativistischen Limes auf das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$\Delta\Phi = 4\pi G_N \rho \tag{14.1}$$

reduzieren. In dieser Poisson-Gleichung ist ρ die Massedichte und Φ das Gravitationspotential. In der speziellen Relativitätstheorie ist die Massendichte nur eine Komponente des Energie-Impuls-Tensors: $T_{00} = \varrho c^2$. Wir wissen nach Diskussion zum Äquivalenzprinzip (Kombination von (2.8) mit (3.4)), daß sich homogene Gravitationsfelder beschreiben lassen[15] durch die Komponente $g_{00} = (1 + \frac{\Phi}{c^2})^2 \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$. Daraus ergibt sich ein erster Ansatz

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{00} \; . \tag{14.2}$$

Gesucht ist nun eine tensorielle Gleichung, deren 0-0-Komponente sich im nichtrelativistischen Grenzfall auf (14.2) reduziert. Im ersten Schritt ist $\Delta \mapsto \Box = -\partial_\mu \partial^\mu$ zu setzen, dann nach Korrespondenzprinzip die partiellen durch kovariante Ableitunge zu ersetzen. Aber wegen der Metrizität des Levi-Civita-Zusammenhangs gilt $\nabla^\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$, d.h. diese Idee scheitert.

Wir suchen deshalb eine Gleichung $G_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}$, wobei wir (nach Einstein) folgende Bedingungen an $G_{\mu\nu}$ stellen:

[15] Im nichtrelativistischen Grenzfall $\|\dot{\vec{x}}\| \ll \dot{x}^0 \approx c$ nehmen die Geodätengleichungen die Form $\ddot{x}^\sigma \approx -\Gamma^\sigma_{00} c^2$ an. Für statische $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ und schwache Felder $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ mit $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ folgt außerdem $\Gamma^\sigma_{00} \approx -\frac{1}{2}\eta^{\sigma j}\partial_j h_{00}$, somit $\Gamma^0_{00} \approx 0$ und $\Gamma^j_{00} \approx \frac{1}{2}\partial_j h_{00}$. Vergleich der resultierenden Gleichung

$$\ddot{x}^j \approx -\frac{c^2}{2}\partial_j h_{00}$$

mit der Newtonschen Bewegungsgleichung $\ddot{x}^i = -\partial_i \Phi$ zeigt $g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$, in Übereinstimmung mit (2.8).

i) $G_{\mu\nu}$ ist symmetrisch, $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$.

ii) $G_{\mu\nu}$ setzt sich zusammen aus $g_{\mu\nu}$ und den ersten und zweiten partiellen Ableitungen, wobei die zweiten nur linear auftreten.

iii) $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ soll als Identität gelten, da dann der Erhaltungssatz $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ folgt. Ein besserer Grund ist, daß die Metrik nicht vollständig durch $G_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}$ festgelegt werden kann, sondern noch Koordinatentransformationen zulassen muß. Somit sollen nicht alle 10 Gleichungen unabhängig sein. Die 4 Identitäten $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ reduzieren das Problem auf 6 unabhängige Gleichungen.

iv) Im Vakuum $T_{\mu\nu} = 0$ soll $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ eine Lösung sein.

Einsteins erster Ansatz war $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$. Hier zeigte sich aber schnell, daß das nur in speziellen Koordinatensystemen gültig sein kann. Mehr Freiheit erlaubt der Ansatz $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu}$. Damit sind die Bedingungen i)+ii) erfüllt. Eine damals sehr schwierige Rechnung, heute die Bianchi-Identität (Theorem 10.7) zeigt, daß die Bedingung iii) genau für $1 + 2b = 0$ gilt. Damit entsteht der folgende Vorschlag:

14.1 Einsteinsche Feldgleichungen. *Das metrische Tensorfeld berechnet sich bei gegebener (aber kompatibler) Materieverteilung als Lösung von*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu} \ . \tag{14.3}$$

Der Newtonsche Grenzfall (s.u.) liefert $\varkappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}$. Bedingung iv) erzwingt $\Lambda = 0$. Neuere Beobachtungsdaten zeigen jedoch, daß die Bedingung iv) im Kosmos nicht realisiert ist.

Einige Bemerkungen:

- Einstein hat später ohne größeren Erfolg versucht, auch die rechte Seite $T_{\mu\nu}$ geometrisch zu verstehen.
- Die Feldgleichungen (14.3) sind nichtlinear und deshalb schwierig zu lösen. Hinzu kommt, daß auch $T_{\mu\nu}$ nicht beliebig vorgegeben werden kann: Es muß $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ gelten, aber die kovariante Ableitung enthält über die Christoffelsymbole die Metrik. Deshalb sind nur wenige exakte Lösungen, zumeist im Vakuum, bekannt. Die einfachste und gleichzeitig wichtigste ist die Schwarzschild-Lösung, die z.B. die Planetenbewegung beschreibt. Für das Universum als ganzes findet man die Friedmann-Robertson-Walker-Lösungen.

  Alternativ kann man Näherungslösungen suchen. Der einfachste Fall besteht hier in einer Linearisierung; diese führt z.B. auf Gravitationswellen.

- Hilbert hat die Feldgleichungen über ein Variationsprinzip erhalten. Die Wirkung

$$S = \frac{1}{2\varkappa c}\int d^4x\ \sqrt{-\det g}\, R + S_{\text{Materie}} \tag{14.4}$$

führt auf

$$\delta S = -\frac{1}{2\varkappa c}\int d^4x\ \sqrt{-\det g}\, G^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2c}\int d^4x\ \sqrt{-\det g}\, T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{14.5}$$

- Aus den Feldgleichungen folgen die Bewegungsgleichungen $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Mit einem Ansatz für $T^{\mu\nu}$, der Punktteilchen beschreibt, reduziert sich diese Gleichung auf die Geodätengleichung.
- Kontraktion mit der inversen Metrik liefert $-R = \varkappa T^\mu_\mu$. Somit können die Feldgleichungen auch geschrieben werden als

$$R_{\mu\nu} = \varkappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\rho_\rho)\ . \tag{14.6}$$

Daraus ergeben sich die Vakuumgleichungen $R_{\mu\nu} = 0$. In vier Dimensionen folgt daraus nicht $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$.

15 Linearisierte Theorie

Wir betrachten schwache Felder $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ mit $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ und berücksichtigen in den Feldgleichungen (14.3) nur h-lineare Terme. Zunächst ist

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\partial_\nu h^\mu_\rho + \partial_\rho h^\mu_\nu - \partial^\mu h_{\nu\rho} \tag{15.1}$$

wobei das Heben der Indizes mit der (inversen) Minkowski-Metrik $\eta^{\mu\nu}$ erfolgt. Der Ricci-Tensor reduziert sich in dieser Näherung auf

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma_\mu - \partial_\mu\partial_\nu h^\sigma_\sigma - \partial_\sigma\partial^\sigma h_{\mu\nu}\Big) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\partial_\sigma\partial_\mu \Psi^\sigma_\nu + \partial_\sigma\partial_\nu \Psi^\sigma_\mu - \partial_\sigma\partial^\sigma \Psi_{\mu\nu}\Big) + \mathcal{O}(h^2)\ , \end{aligned} \tag{15.2}$$

wobei $\Psi^\mu_\nu := h^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu h^\sigma_\sigma$. Wir führen eine Koordinatentransformation $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ derart aus, daß $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Wir wählen $\epsilon(x)$ gemäß Lorentz-Eichung $\partial_\sigma\Psi^\sigma_\mu = 0$. In dieser Eichung ergibt sich

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\sigma\partial^\sigma h_{\mu\nu} \tag{15.3}$$

und damit die Feldgleichungen

$$2R_{\mu\nu} = \Box h_{\mu\nu} := -\partial_\sigma \partial^\sigma h_{\mu\nu} = \varkappa(2T_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} T^\sigma_\sigma) \; . \tag{15.4}$$

Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung ist (wie in der Elektrodynmik) gegeben durch retardierte Potentiale.

16 Newtonscher Grenzfall

Für langsam bewegte Himmelskörper können wir $T_{00} = \varrho c^2$ als einzige nichtverschwindende Komponente von $T_{\mu\nu}$ annehmen. Damit folgt

$$\Box h_{00} = \varkappa \varrho c^2 \; , \qquad \Box h_{jj} = \varkappa \varrho c^2 \; . \tag{16.1}$$

Für statische Felder war $h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2}$ und $\Box\Phi = \Delta\Phi$, und daraus ergibt sich $\Delta\Phi = \frac{\varkappa c^4}{2}\varrho$. Vergleich mit der Poisson-Gleichung zeigt

$$\varkappa = \frac{8\pi G_N}{c^4} = 2.07 \cdot 10^{-43} \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg\,m}} \; . \tag{16.2}$$

Die Lösung außerhalb einer sphärisch-symmetrischen Masseverteilung der Masse m ist $\Phi = -\frac{G_N m}{r}$. Es folgt

$$g_{00} \approx 1 - \frac{2G_N m}{c^2 r} \; , \qquad g_{jj} \approx -\Big(1 + \frac{2G_N m}{c^2 r}\Big) \; . \tag{16.3}$$

Die Abweichungen von der Minkowski-Metrik führen auf Zeitdilatation und radiale Längenkontraktion. Die Effekte wurden im Shapiro-Experiment (Reflexion von Radarsignalen an der Venus, 1964, 1979) überprüft. Die Laufzeitverzögerung liegt in der Größenordnung von $10^{-4}\,\mathrm{s}$.

17 Gravitationswellen

Hier werden Vakuum-Lösungen der linearisierten Theorie betrachtet,

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \; .$$

Eine Lösung sind ebene Wellen in Richtung x^1:

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \cos(k(x^0 - x^1)) \; . \tag{17.1}$$

In der Lorentz-Eichung $2\partial_\sigma h^\sigma_\mu = \partial_\mu h^\sigma_\sigma$ folgt für die Amplituden

$$A^0_\nu - \frac{1}{2}\delta^0_\nu A^\sigma_\sigma - A^1_\nu + \frac{1}{2}\delta^1_\nu A^\sigma_\sigma = 0 \; , \quad A^0_0 - A^1_0 - \frac{1}{2}A^\sigma_\sigma = 0 \; ,$$
$$A^0_1 - A^1_1 - \frac{1}{2}A^\sigma_\sigma = 0 \; , \qquad A^0_2 - A^1_2 = 0 \; , \quad A^0_3 - A^1_3 = 0 \; . \tag{17.2}$$

Eine weitere Freiheit in der Koordinatenwahl, die die Lorentz-Eichung erhält, erlaubt die Wahl

$$(A_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & a & -b \end{pmatrix} . \tag{17.3}$$

Eine solche Welle führt zu Abstandsänderungen von zunächst parallel bewegten Testteilchen (geodätische Abweichung). Ist $\vec{n}$ der Abstandsvektor, so folgt[16] im Ruhsystem

$$\frac{d^2 n^i}{d\tau^2} = -c^2 R^i_{0j0} n^j \ . \tag{17.4}$$

Wegen $R^i_{0j0} = -\frac{1}{2}\partial_0\partial_0 h^i_j$ folgen die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 n^1}{dt^2} = 0 \ , \qquad & \frac{d^2 n^2}{dt^2} = (bn^2 + an^3)\frac{1}{2}(kc)^2 \cos(k(x^1 - ct)) \ , \\ & \frac{d^2 n^3}{dt^2} = (an^2 - bn^3)\frac{1}{2}(kc)^2 \cos(k(x^1 - ct)) \ . \end{aligned} \tag{17.5}$$

Diese beschreiben eine harmonische Bewegung in der x^2-x^3-Ebene. Sei z.B. $a = 0$ (lineare Polarisation) und für $t = 0$ ein Kreis gegeben, so wird dieser periodisch in Ellipsen deformiert, deren große Halbachse abwechselnd in x^2- und x^3-Richung

[16] Betrachte eine Schar von Geodäten $x^\mu(s, \lambda)$ (λ ist der Schar-Parameter, s der Kurvenparameter) und setze $n^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda}\Delta\lambda$ sowie $u^\mu := \dot{x}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$. Für jedes λ gilt die Geodätengleichung $0 = \frac{Du^\mu}{ds} := \frac{\partial u^\mu}{\partial s} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho$. Definiere die relative Geschwindigkeit $v^\mu := \frac{Du^\mu}{d\lambda}\Delta\lambda = (\nabla_\nu u^\mu) n^\nu$. Andererseits ist $v^\mu = \frac{D}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\Delta\lambda = \frac{D}{ds}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\Delta\lambda = \frac{Dn^\mu}{ds} = (\nabla_\nu n^\mu) u^\nu$.

Aus der Geodätengleichung $(\nabla_\nu u^\rho) u^\nu = 0$ folgt nach Ableitung

$$0 = \nabla_\mu((\nabla_\nu u^\rho) u^\nu) = (\nabla_\mu \nabla_\nu u^\rho) u^\nu + \nabla_\nu u^\rho \nabla_\mu u^\nu \ .$$

Betrachte die Relativbeschleunigung

$$\begin{aligned} a^\rho_{rel} = \frac{Dv^\rho}{ds} &= (\nabla_\mu v^\rho) u^\mu = \nabla_\mu((\nabla_\nu u^\rho) n^\nu) u^\mu \\ &= (\nabla_\mu \nabla_\nu u^\rho) n^\nu u^\mu + (\nabla_\nu u^\rho)(\nabla_\mu n^\nu) u^\mu \\ &= (\nabla_\mu \nabla_\nu u^\rho) n^\nu u^\mu + (\nabla_\nu u^\rho)(\nabla_\mu u^\nu) n^\mu \\ &= (\nabla_\mu \nabla_\nu u^\rho) n^\nu u^\mu - (\nabla_\mu \nabla_\nu u^\rho) n^\mu u^\nu \\ &= -\big((\nabla_\mu \nabla_\nu u^\rho) - (\nabla_\nu \nabla_\mu u^\rho)\big) n^\mu u^\nu = -R^\rho_{\sigma\mu\nu} u^\sigma n^\mu u^\nu \ . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichung für die geodätische Abweichung, die die Änderung von n^ρ bei Fortschreiten is s beschreibt (Gezeitenkräfte).

Beispiel: Im lokalen Inertialsystem $u = (1, 0, 0, 0)$, $n^0 = 0$ ergibt sich $\frac{1}{c^2}\frac{d^2 n^i}{dt^2} = -R^i_{0j0} n^j$. In der Newtonschen Mechanik ist $\frac{d^2}{dt^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} n^j$.

zeigt. Für andere Parameter a, b werden elliptische und zirkulare Polarisationen erhalten.

Die vorhergesagte quadrupol-artige Bewegung wurde seit 1960 mit Weber-Detektoren gesucht. Mögliche Quellen wären Doppelsterne und Supernovae. Weisberg und Taylor (1984) haben Doppelstern-Pulsare untersucht und eine Änderung der Umlaufzeit T gefunden: $\frac{dT}{dt} \approx -2.4 \cdot 10^{-12}$. Dieser Wert ist innerhalb 0.3% konsistent mit der Vorhersage der ART infolge Abstrahlung von Gravitationswellen.

Mit den zwei LIGO-Detektoren (Laser-Interferometer) in Hanford und Livingston wurden am 14.9.2015 Gravitationswellen detektiert (Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 061102). Das Signal wird interpretiert als Verschmelzung zweier schwarzer Löcher mit Massen von 36 bzw 29 Sonnenmassen. Das verschmolzene schwrze Loch hat eine Masse von 63 Sonnenmassen. Die Differenz von 3 Sonnenmassen wurde innerhalb von 0.2 s als Energie der Gravitationswellen abgestrahlt.

Teil V
Die Schwarzschild-Lösung

Die radialsymmetrische Schwarzschild-Lösung ist die erste (1916) und zugleich wichtigste exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen.

18 Vakuumlösung

Wir suchen eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen (14.3) entweder für eine statische radialsymmetrische Materieverteilung oder außerhalb einer solchen. Entsprechend der Symmetrie wählen wir Koordinaten $x'^0 = T,\ x'^1 = R,\ x'^2 = \vartheta,\ x'^3 = \varphi$, wobei die Winkel ϑ, φ ihre übliche Bedeutung haben: Für konstante 'Radien' R und 'Zeiten' T soll die Metrik konzentrischer Kugelschalen erhalten werden, und der 'Radius' R steht senkrecht auf der Tangentialebene:

$$(-g)\Big|_{R,T\ \text{const}} = f^2(R,T)\big((d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta(d\varphi)^2\big)\ , \qquad g_{12} = g_{13} = 0\ .$$

Die Lösung soll für alle Zeiten diese Symmetrie behalten, was durch die Wahl $g_{02} = g_{03} = 0$ reflektiert wird. Physikalisch bedeutet diese Annahme, daß die Materieverteilung nicht rotiert (siehe im Gegensatz dazu die Rechnung in Abschnitt 11.4). Somit erhalten wir folgenden Ansatz für das metrische Tensorfeld:

$$\begin{aligned} g = {} & g_{00}(R,T)(dT)^2 + 2g_{01}(R,T)dT\,dR + g_{11}(R,T)(dR)^2 \\ & - f^2(R,T)\big((d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta(d\varphi)^2\big)\ . \end{aligned} \tag{18.1}$$

Da die Signatur $(+1,-1,-1,-1)$ festgelegt ist, gilt $f^2(R,T) > 0$. Man kann nun als neue Koordinate $x^1 = r = f(R,T) > 0$ wählen und dann jene Funktion $x^0 = ct(R,T)$ bestimmen, die das metrische Tensorfeld diagonalisiert:

$$g = e^{\nu(r,t)}c^2(dt)^2 - e^{\lambda(r,t)}(dr)^2 - r^2(d\vartheta)^2 - r^2\sin^2\vartheta(d\varphi)^2\ . \tag{18.2}$$

Damit sind (bis auf reine Diffeomorphismen $t \mapsto t'(t)$, die wir später ausnutzen) sämtliche Freiheiten der Koordinatenwahl erschöpft, und als Diagonalelemente verbleiben (bis auf die festgelegten Vorzeichen) beliebige Funktionen $g_{11} = -e^{\lambda(r,t)}$ und $g_{00} = e^{\nu(r,t)}$. Durch elementare, aber umfangreiche Rechnung findet man die folgenden nicht identisch verschwindenden Christoffelsymbole ($\dot f = \frac{\partial f}{\partial t}$, $f' = \frac{\partial f}{\partial r}$):

$$\begin{aligned} &\Gamma^0_{00} = \frac{\dot\nu}{2}\ , && \Gamma^0_{01} = \frac{\nu'}{2}\ , && \Gamma^0_{11} = \frac{\dot\lambda}{2c^2}e^{\lambda-\nu}\ , \\ &\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}\ , && \Gamma^1_{10} = \frac{\dot\lambda}{2}\ , && \Gamma^1_{00} = \frac{c^2\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\ , \\ & && \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}\ , && \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\vartheta e^{-\lambda}\ , \\ &\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}\ , && \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}\ , && \Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta\ , \qquad \Gamma^3_{22} = \cot\vartheta\ . \end{aligned} \tag{18.3}$$

Im nächsten Schritt sind die Komponenten des Riemann-Tensors (9.7) zu bestimmen. Man findet nach langer Rechnung, die wir hier nicht widergeben: $R_{0123} = 0$, und die Summanden $R^0_{\mu 0\nu}$, $R^1_{\mu 1\nu}$, $R^2_{\mu 2\nu}$, $R^3_{\mu 3\nu}$ des Ricci-Tensors sind nur für $\mu = \nu$ oder $(\mu\nu) = (01)$ nicht identisch Null. Sie summieren sich zu

$$\begin{aligned}
R_{00} &= c^2 e^{\nu-\lambda}\Big(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \underline{\frac{\nu'}{r}}\Big) - \Big(\frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\lambda^2}{4} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{4}\Big)\,,\\
R_{11} &= -\Big(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \underline{\frac{\lambda'}{r}}\Big) + \frac{e^{\lambda-\nu}}{c^2}\Big(\frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\lambda^2}{4} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{4}\Big)\,,\\
R_{22} &= 1 - e^{-\lambda}\Big(1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\Big)\,, \qquad R_{33} = \sin^2\vartheta R_{22}\,,\\
R_{01} &= \frac{\dot\lambda}{r}\,.
\end{aligned} \tag{18.4}$$

Im Vakuum, also außerhalb des einer radialsymmetrischen, nichtrotierenden Materieverteilung, ist $T_{\mu\nu} = 0$. Somit reduzieren sich die Einsteinschen Feldgleichungen auf

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R + 2\Lambda) = -\Lambda g_{\mu\nu}\,. \tag{18.5}$$

Damit folgt für die (01)-Komponente $\dot\lambda = 0$, d.h. $\lambda = \lambda(r)$ hängt nur vom Radius ab. Die Gleichung für die (22)-Komponente lautet dann

$$1 - e^{-\lambda(r)}(1 + r(\nu'(r,t) - \lambda'(r))) = \Lambda r^2\,. \tag{18.6}$$

Diese Gleichung ist nur dann konsistent für alle t, wenn auch $\nu' = \nu'(r)$ von t unabhängig ist, d.h. es gilt $\nu(r,t) = \nu(r) + f(t)$. Durch eine Redefinition der Zeit gemäß $\tilde t(t) = \int_0^t d\tau e^{\frac{1}{2}f(\tau)}$ kann die Funktion $f(t)$ jedoch absorbiert werden, und die Metrik $\tilde g_{\mu\nu}$ bezüglich der Koordinaten $(c\tilde\tau, r, \vartheta, \varphi)$ ist zeitunabhängig. Somit ist bewiesen:

Satz 18.1 (Birkhoff, 1923) *Jede radialsymmetrische Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen ist statisch.*

Die Aussage ist ein wenig überraschend. Sie zeigt z.B., daß das Gravitationsfeld radial pulsierender oder sogar explodierender Sterne keinerlei Spuren dieser rein radialen Bewegungen trägt. Insbesondere können rein radiale Supernovae keine Gravitationswellen erzeugen. Deshalb ist der experimentelle Nachweis von Gravitationswellen für die (sehr seltene!) Kollision zweier schwarzer Löcher geglückt, die weit von der Radialsymmetrie entfernt ist.

Wir schreiben vereinfachend wieder t statt $\tilde t$. Die für alle Λ gültige Gleichung $\frac{e^{-\nu}}{c^2}R_{00} + e^{-\lambda}R_{11} = 0$ reduziert sich auf $\frac{\nu'+\lambda'}{r} = 0$, mit Lösung $\nu = -\lambda + C$. Eine erneute Reskalierung $t \mapsto e^{-C/2}t$ beseitigt die mögliche Konstante, so daß wir

$\lambda = -\nu$ annehmen können. Damit verbleibt folgende Differentialgleichung für die (22)-Komponente:

$$1 - \Lambda r^2 = e^{-\lambda(r)}(1 - r\lambda'(r)) = \frac{d}{dr}(re^{-\lambda(r)}) \; , \tag{18.7}$$

die durch Trennung der Variablen gelöst wird:

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2M}{r} \; . \tag{18.8}$$

Dabei ist M eine beliebige Integrationskonstante. Nur für $\Lambda \leq 0$ gibt es eine für große r sinnvolle Lösung. Einsetzen in die verbleibene Gleichung für R_{00} selbst zeigt, daß diese identisch erfüllt ist und keine weitere Bedingung liefert. Für $\Lambda = 0$ erhalten wir die eigentliche Schwarzschild-Metrik (1916)

$$g = \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)(d(ct))^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}(dr)^2 - r^2(d\vartheta)^2 - r^2\sin^2\vartheta(d\varphi)^2 \; . \tag{18.9}$$

Einige Bemerkungen:

- Offenbar gilt $\lim_{r\to\infty} g = \eta$ (Minkowski-Metrik), d.h. asymptotisch verschwindet das Gravitationsfeld (wie erwartet).
- Vergleich der für homogene Gravitationsfelder bekannten Korrespondenz $g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$ mit der Minkowski-Metrik zeigt $\Phi(r) = -\frac{c^2 M}{r}$. Andererseits erwarten wir nach der Newtonschen Theorie $\Phi(r) = -\frac{mG_N}{r}$ für das Gravitationspotential im Abstand r zu einer Punktmasse m. Somit identifizieren wir

  $$2M = \frac{2mG_N}{c^2} > 0 \; . \tag{18.10}$$

  Die Konstante $2M$ hat die Dimension einer Länge und heißt *Schwarzschild-Radius*. Das Produkt mG_N läßt sich bequem über die Umlaufzeit T eines Planeten oder Satelliten auf einer elliptischen Bahn der großen Halbachse a bestimmen (s.u.). Damit erhält man $2M = \frac{8\pi^2 a^3}{c^2 T^2}$ und z.B. $2M = 8.8\,\text{mm}$ für die Erde und $2M = 2.96\,\text{km}$ für die Sonne. Diese Werte liegen weit im Inneren der Himmelskörper, wo die Voraussetzung $T_{\mu\nu} = 0$ für die Herleitung der Schwarzschild-Metrik nicht gilt. Mit Ausnahme der schwarzen Löcher, auf die wir später eingehen, ist die Voraussetzung $r > 2M$ im Vakuum immer erfüllt.
- Die Schwarzschild-Metrik stimmt für $\frac{M}{r} << 1$ mit dem Newtonschen Grenzfall (16.3) überein. Erst in Ordnung $\mathcal{O}(\frac{r^2}{M^2})$ ergeben sich Abweichungen, die die Einsteinschen Feldgleichungen gegenüber anderen Gravitationstheorien auszeichnen.

- Mit dieser Normierung der Integrationskonstante M ergeben sich (in führender Ordnung in $\frac{1}{c}$) exakt die Frequenzänderungen

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\sqrt{g_{00}(A)}}{\sqrt{g_{00}(B)}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2M}{r_A}}{1-\frac{2M}{r_B}}} \tag{18.11}$$

  im Gravitationsfeld, die wir im Zusammenhang mit dem Pound-Rebka-Experiment (3.3) und den GPS-Satelliten (3.5) über das Äquivalenzprinzip diskutiert hatten.

- Radiale Abstände zwischen konzentrischen Kugelschalen der Fläche $4\pi r_1^2$ und $4\pi r_2^2$ bei konstanter Zeit sind vergrößert:

$$\begin{aligned} d(r_1, r_2) &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} \qquad (18.12)\\ &= \sqrt{r_2^2 - 2Mr_2} - \sqrt{r_1^2 - 2Mr_1} + M \log \frac{r_2 - M + \sqrt{r_2^2 - 2Mr_2}}{r_1 - M + \sqrt{r_1^2 - 2Mr_1}} \,. \end{aligned}$$

  Oft visualisiert man diese metrischen Verhältnisse für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ durch eine Rotationsfläche $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z(r))$ im $\mathbb{R}^3$, deren Schnitte mit einer Ebene $z = z_i = \text{const}$ Kreise vom Radius r_i sind, während $d(r_i, r_j)$ dem Weg $\int_{r_1}^{r_2} dr\, \sqrt{1 + (z'(r))^2}$ auf der Mantelfäche entspricht. Somit ist $z'(r) = \sqrt{\frac{2M}{r-2M}}$ mit Lösung (Flammsches Paraboloid)

$$z(r) = z(r_0) + \sqrt{8M}(\sqrt{r-2M} - \sqrt{r_0 - 2M}) \,.$$

- Durch die Transformation $r = (1 + \frac{M}{2\tilde{r}})^2 \tilde{r}$ erreicht man denselben Vorfaktor vor dem räumlichen Koordinaten. In diesen isotropen Koordinaten lautet die Schwarzschild-Metrik

$$g = \Big(\frac{1-\frac{M}{2\tilde{r}}}{1+\frac{M}{2\tilde{r}}}\Big)^2 (d(ct))^2 - \Big(1 + \frac{M}{2\tilde{r}}\Big)^4 ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2)$$

  mit $x^2 + y^2 + z^2 = \tilde{r}^2$. Da hier die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen dieselbe ist, läßt sich hier am einfachsten die Laufzeitänderung im Shapiro-Experiment berechnen.

19 Bahnen im Schwarzschild-Feld

19.1 Erste Integrale der Bewegung

Wir lösen die Geodätengleichungen für die Schwarzschild-Metrik. Dazu ist die zuvor bestimmte Parametrisierung

$$\lambda = -\nu = -\log(1 - \frac{2M}{r})$$

in die Gleichungen (18.3) für die Christoffelsymbole einzusetzen. Ist τ der auf Bogenlänge c^2 parametriserte Kurvenparameter, so folgt für die 2. Komponente

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} - \sin\vartheta\cos\vartheta\Big(\frac{d\varphi}{d\tau}\Big)^2 + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\vartheta}{d\tau} = 0\ . \tag{19.1}$$

Solche Differentialgleichungen 2. Ordnung erfordern die Vorgabe von Anfangsbedingungen wie $\vartheta(0)$ und $\dot\vartheta(0)$. Man kann das Koordinatensystem so wählen, daß die von den beiden Vektoren $\vec r(0)$ und $\dot{\vec r}(0)$ aufgespannte Ebene durch $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ und $\dot\vartheta(0) = 0$ parametrisiert wird. Dann löst aber $\vartheta(\tau) = \frac{\pi}{2}$ das Anfangswertproblem, und nach Picard-Lindelöf ist es die einzige Lösung. Wir bestätigen wie in der Newtonschen Therorie, daß die Bahnen im Zentralkraftfeld eben sind. Die Gleichung für die 3. Komponente vereinfacht sich mit dieser Parametrisierung zu

$$0 = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\tau}\Big(r^2\frac{d\varphi}{d\tau}\Big)\ , \tag{19.2}$$

d.h. der Drehimpuls ist erhalten:

$$L = r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = \text{const}\ . \tag{19.3}$$

Analog führt die 0. Komponente auf den Energieerhaltungssatz:

$$0 = \frac{d^2t}{d\tau^2} + \nu'\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = e^{-\nu}\frac{d}{d\tau}\Big(e^{\nu}\frac{dt}{d\tau}\Big) \quad\Rightarrow\quad (1-\frac{2M}{r})\frac{dt}{d\tau} = E = \text{const}\ . \tag{19.4}$$

An Stelle der verbleibenden Geodätengleichung für die 1. Komponente nehmen wir die Gleichung, die die Parametrisierung der Bahnkurve nach der Bogenlänge c^2 beschreibt, $g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2$:

$$c^2 = \Big(1-\frac{2M}{r}\Big)\Big(\frac{d(ct)}{d\tau}\Big)^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\Big(\frac{dr}{d\tau}\Big)^2 - r^2\Big(\frac{d\varphi}{d\tau}\Big)^2\ , \tag{19.5}$$

$$\Rightarrow\quad \Big(\frac{dr}{d\tau}\Big)^2 = E^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \Big(1-\frac{2M}{r}\Big)\frac{L^2}{r^2}\ . \tag{19.6}$$

Dabei haben wir die Integrationskonstanten eingesetzt. An dieser Stelle bietet sich der Vergleich mit der Newtonschen Theorie an. Dort haben wir die beiden Erhaltungssätze

$$E_N = \frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\phi^2) - \frac{G_N m}{r}\ , \qquad L = r^2\dot\phi$$

$$\Rightarrow\quad \Big(\frac{dr}{d\tau}\Big)^2 = 2E_N + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{L^2}{r^2}\ , \tag{19.7}$$

wobei wir $2M = \frac{2G_N m}{c^2}$ eingesetzt haben. Offenbar können

$$V(r) := \frac{L^2}{2r^2} - \frac{Mc^2}{r} - \frac{ML^2}{r^3}\ , \qquad V_N(r) := \frac{L^2}{2r^2} - \frac{Mc^2}{r} \tag{19.8}$$

als effektive Potentiale aufgefaßt werden. Das Schwarzschild-Potential wird durch den Zusatzterm $-\frac{ML^2}{2r^3}$ stark negativ für kleine r, während für große r kaum Unterschiede auftreten. Bei festgehaltenem Drehimplus bestimmt die Energie $\frac{E^2-c^2}{2}$ bzw. E_N die Art der Bewegung. Ist sie negativ, so liegt eine gebundene Bewegung $r_1 \leq r \leq r_2$ vor. Für E_N positiv gibt es eine Streuung. Das bleibt auf im Schwarzschild-Fall richtig für $0 < E^2 - c^2 < 2E_{krit}$. Oberhalb einer kritischen, vom Drehimpuls abhängigen, Energie kann die Drehimpulsbariere überwunden werden, und das Teilchen fällt in den Horizont $r = 2M$. Ableitung des Potentials $V(r)$ zeigt, daß stabile gebundene Bahnen, charakterisiert durch ein Potentialminimum, nur für $L > L_{krit} = 2\sqrt{3}Mc$ möglich sind.

19.2 Periheldrehung

Für gebundene Bahnen drückt man den Kurvenparameter besser durch den Winkel aus und nutzt die Kettenregel $\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau}$, um letztlich eine Bahnkurve $r(\phi)$ zu bestimmen:

$$c^2 = \frac{E^2}{1-\frac{2M}{r}} - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\Big(\frac{L}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\Big)^2 - \frac{L^2}{r^2} \tag{19.9}$$

Offenbar vereinfacht sich die Gleichung für inverse Radien $u := \frac{1}{r}$. Mit $u' := \frac{du}{d\phi}$ folgt

$$(u')^2 = \frac{E^2}{L^2} - (\frac{c^2}{L^2} + u^2)(1 - 2Mu)\ . \tag{19.10}$$

Trennung der Variablen führt auf ein elliptisches Integral. Geschickter ist es, die Gleichung erneut zu differenzieren:

$$u'' + u = \frac{Mc^2}{L^2} + 3Mu^2 \tag{19.11}$$

Dieselbe Rechnung für die Newtonsche Theorie zeigt, daß dort $3Mu^2 = 3\frac{mG_N}{c^2r^2}$ nicht auftritt. Für die Planetenbahnen kann dieser Term gegenüber $u = \frac{1}{r}$ und $\frac{Mc^2}{L^2}$ vernachlässigt werden. Deshalb löst man zunächst den Newtonschen Fall, eine inhomogene lineare Differentialgleichung, mit offensichtlicher Lösung

$$u_0 = \frac{Mc^2}{L^2}\big(1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)\big)\ . \tag{19.12}$$

Diese Näherung wird (mit Anfangsbedingung $\varphi_0 = 0$) in die rechte Seite von (19.11) eingesetzt:

$$u_1'' + u_1 = \frac{Mc^2}{L^2} + \frac{3M^3c^4}{L^4}\Big(1 + \frac{\epsilon^2}{2} + 2\epsilon\cos\varphi + \frac{\epsilon^2}{2}\cos(2\varphi)\Big)\ . \tag{19.13}$$

Das ist wieder eine lineare Schwingungs-Differentialgleichung mit periodischer äußerer Kraft, welche einen Resonanzanteil $\propto \cos\varphi$ trägt. Entsprechend der allgemeinen Lösungstheorie gibt es eine mit φ linear wachsende spezielle Lösung:

$$u_1 = \frac{Mc^2}{L^2}\big(1+\epsilon\cos\varphi\big) + \frac{3M^3c^4}{L^4}\Big(1+\frac{\epsilon^2}{2}+\epsilon\varphi\sin\varphi-\frac{\epsilon^2}{6}\cos(2\phi)\Big)\,. \qquad (19.14)$$

Der Vorfaktor $\frac{3M^3c^4}{L^4}$ ist im Sonnensystem extrem klein. Über sehr viele Umläufe $\varphi = 2\pi N$ wird dennoch ein merklicher Beitrag $\frac{3M^3c^4}{L^4}\varphi$ generiert. Vernachlässigen wir alle in φ beschränkten Zusatzterme in u_1 und setzen näherungsweise $\sin\big(\frac{3M^3c^4}{L^4}\varphi\big) \approx \frac{3M^3c^4}{L^4}\varphi$ und $\cos\big(\frac{3M^3c^4}{L^4}\varphi\big) \approx 1$, so entsteht

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{1}{r} &= \frac{Mc^2}{L^2}\Big(1+\epsilon\cos\Big(\Big(1-\frac{3M^2c^2}{L^2}\Big)\varphi\Big)\Big) \\ &= \frac{a}{1-\epsilon^2}\Big(1+\epsilon\cos\Big(\Big(1-\frac{3M}{a(1-\epsilon^2)}\Big)\varphi\Big)\Big)\,. \end{aligned} \qquad (19.15)$$

wobei wir die den Drehimpuls durch die große Halbachse

$$a = \frac{1}{2}(r_{\max}+r_{\min}) = \frac{L^2}{2Mc^2}\Big(\frac{1}{1+\epsilon}+\frac{1}{1-\epsilon}\Big) = \frac{L^2}{Mc^2(1-\epsilon^2)}$$

ausgedrückt haben. Weiter können wir den halben Schwarzschild-Radius, der die Sonnenmasse enthält, wie üblich über die Umlaufzeit T und die Halbachse ausgedrücken: Integration des Drehimpulses liefert

$$\begin{aligned} TL &= \int_0^T dtL = \int_0^T d\tau\; r^2(\tau)\frac{d\varphi}{d\tau} = \int_0^{2\pi} d\varphi\; r^2(\varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi\;\frac{a^2(1-\epsilon^2)^2}{(1+\epsilon\cos\varphi)^2} \\ &= 2\pi a^2\sqrt{1-\epsilon^2} \end{aligned}$$

Folglich ist $L^2 = \frac{4\pi^2a^4(1-\epsilon^2)}{T^2} = aMc^2(1-\epsilon^2)$, also $M = \frac{4\pi^2a^3}{c^2T^2}$. Damit entsteht

$$u_1 = \frac{1}{r} = \frac{a}{1-\epsilon^2}\Big(1+\epsilon\cos\Big(\Big(1-\frac{12\pi^2a^2}{c^2T^2(1-\epsilon^2)}\Big)\varphi\Big)\Big)\,. \qquad (19.16)$$

Damit ist der Winkelabstand zwischen nachfolgenden Periheldurchgängen nicht 2π, sondern näherungsweise $2\pi\big(1+\frac{12\pi^2a^2}{c^2T^2(1-\epsilon^2)}\big)$, d.h. das Perihel wandert pro Umlauf um

$$\Delta\varphi = \frac{24\pi^3a^2}{T^2c^2(1-\epsilon^2)} \qquad (19.17)$$

in Drehrichtung weiter: Die Planetenbahnen sind also keine Ellipsen mehr, sondern Rosetten. Für den Merkur mit $T = 88\,\mathrm{d}$ und $a = 5.79\cdot10^{10}\,\mathrm{m}$, $\epsilon = 0.206$ ergibt sich [Einstein, Nov. 1915]

$$(\Delta\varphi)_{\text{Merkur}} = 5.03\cdot10^{-7} = \frac{43.03''}{\text{Jahrhundert}}\,.$$

Tatsächlich führen die Störungen des Zweikörperproblems sowieso zu Rosettenbahnen, und diese Störungen überwiegen. Für den Merkur findet man insgesamt $574''$/Jahrhundert, wovon $277''$ auf die Venus zurückgehen, $153''$ auf den Jupiter usw. Nach Abzug dieser Störungen verblieb ein in der Newtonschen Himmelsmechanik unerklärter Rest von $(43.11 \pm 0.45)''$/Jahrhundert. Die perfekte Übereinstimmung mit der Vorhersage war die erste grandiose Bestätigung der Allgemeinen Relativitätstheorie.

20 Lichtablenkung

Ausgangspunkt sind wieder die Geodätengleichungen für die Christoffel-Symbole zur Schwarzschild-Metrik. Diese Gleichungen haben dieselben ersten Integrale (19.3) für Drehimpuls und (19.4) für Energie, aber der Kurvenparameter parmatrisiert eine Nullgeodäte:

$$0 = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{E^2}{1-\frac{2M}{r}} - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\Big(\underbrace{\frac{dr}{d\tau}}_{=\frac{L}{r^2}\frac{dr}{d\phi}}\Big)^2 - \frac{L^2}{r^2}\ . \tag{20.1}$$

Damit wird das effektive Potential für Nullgeodäten

$$V_0(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2 M}{r^3}\ . \tag{20.2}$$

Streulösungen, die einer Lichtablenkung entsprechen, sind nur möglich für $r > 3M$. Für $r = 3M$ gibt es eine instabile Kreisbahn, während Licht, das sich bis auf $< 3M$ dem Ursprung nähert, dort endet.

Die Streubahnen parametrisieren wir wie zuvor durch den inversen Radius $u = \frac{1}{r}$:

$$(u')^2 = \frac{E^2}{L^2} - u^2(1-2Mu) \quad \Rightarrow \quad u'' + u = 3Mu^2\ . \tag{20.3}$$

Die exakte Lösung ist wieder durch elliptische Funktionen gegeben, die nicht anschaulich zu diskutieren sind. Wir nutzen deshalb, daß $3Mu^2$ sehr klein ist und in der Newtonschen Theorie nicht auftritt. Die Newtonsche Lösung von $u_0'' + u_0 = 0$ ist $u_0 = \frac{1}{r} = \frac{1}{d}\cos(\varphi - \varphi_0)$, also $d = r\cos(\varphi - \varphi_0)$ beschreibt, wie erwartet, eine im Abstand d vom Ursprung verlaufende Gerade. Diese wird (bei sinnvoller Wahl $\varphi_0 = 0$) als erste Näherung in die rechte Seite eingesetzt:

$$u_1'' + u_1 = \frac{3M}{2d^2}(1 + \cos(2\varphi)) \tag{20.4}$$

Das ist wieder eine Schwingungs-Differentialgleichung mit periodischer äußerer Kraft, aber ohne Resonanz:

$$u_1 = \frac{1}{r} = \frac{1}{d}\cos\varphi + \frac{3M}{2d^2}(1 - \frac{1}{3}\cos(2\varphi)) = \frac{1}{d}\cos\varphi + \frac{M}{d^2}(2 - \cos^2\varphi) \tag{20.5}$$

Die Winkel, bei denen der Lichtstrahl im Unendlichen ist, entsprechen den Nullstellen dieser Gleichung. Insgesamt ist der Winkel gemäß $u_1 \geq 0$ zu wählen. Damit läuft für $M = 0$ der Winkel von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$. Für $M > 0$ darf $\cos\varphi$ etwas negativ werden:

$$\cos\varphi_0 = \frac{d}{2M}\Big(1 - \sqrt{1 + \frac{8M^2}{d^2}}\Big) \approx -\frac{2M}{d} \;, \tag{20.6}$$

und der Lichtstrahl verläuft von $\arccos(-\frac{2M}{d}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{2M}{d} + \mathcal{O}(\frac{M^3}{d^3}) \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ nach $\arccos(-\frac{2M}{d}) = \frac{\pi}{2} + \frac{2M}{d} + \mathcal{O}(\frac{M^3}{d^3}) \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Somit beträgt der Gesamtablenkungswinkel eines den Ursprung im Abstand d passierenden Lichtstrahls

$$\Delta\varphi \approx \frac{4M}{d} \;. \tag{20.7}$$

Nimmt man für d den Radius $6.96 \cdot 10^5$ km der Sonne, so folgt $\Delta\varphi = 8.47 \cdot 10^{-6} = 1.75''$.

Zum Vergleich sehen wir uns die Lichtablenkung in der Newtonschen Theorie an. Ein sich im sonnennächsten Punkt d befindendes Photon hat offenbar den Drehimpuls $L = dc$, so daß nach (19.12) gilt: $\frac{1}{d} = \frac{Mc^2}{(dc)^2}(1 + \epsilon)$. Somit bestimmen sich die asymptotischen Winkel aus der Gleichung

$$0 = 1 + \epsilon\cos\varphi = 1 + \Big(\frac{d}{M} - 1\Big)\cos\varphi \quad \Rightarrow \phi = \arccos(-\frac{M}{d}) \;.$$

Damit entsteht $\Delta_N\varphi \approx \frac{2M}{d}$, exakt der halbe Wert gegenüber der Schwarzschild-Lösung. Auch eine Rechnung nur auf Grundlage des Äquivalenzprinzips, die nur g_{00}, nicht aber g_{11} berücksichtigt, führt ebenfalls auf diesen halben Wert. Alle diese Aussagen sind natürlich nur in der Nährung $\frac{d}{M} \gg 1$ richtig. Nahe der (instabilen) Lichtkreisbahn $d = 3M$ muß exakt gerechnet werden, und die relativen Faktoren zur Newtonschen Theorie werden stark von 2 abweichen.

Die Vorhersagen können überprüft werden, indem man Photographien einer totalen Sonnenfinsternis, auf denen Sterne zu sehen sind, vergleicht mit Aufnahmen derselben Sterne am Nachthimmel. Die erste Gelegenheit war eine Finsternis am 29.3.1919, zu der zwei Expeditionen nach Brasilien und eine Insel vor Afrika geschickt wurden. Zurückgerechnet auf den Sonnenrand fand man Lichtablenkungen von $(1.98 \pm 0.16)''$ bzw. $(1.61 \pm 0.40)''$. Das Newtonsche Ergebnis konnte damit ausgeschlossen werden. Die Fehler konnten bei folgenden Finsternissen reduziert werden. Die seit den 60er Jahren beste Methode besteht in der Verfinsterung von Quasaren, die im Radiowellenbereich stärker (oder zumindest vergleichbar) strahlen als die Sonne. Jährlich am 8. Oktober bedeckt die Sonne den Quasar 3C 279, während 3C 273 gleichzeitig einen Winkel von 10° bildet.

20.1 Gravitationslinsen

Betrachtet man eine Schar von Lichtkurven, die das gravitative Zentrum in unterschiedlichen Abständen passieren, so folgt aus der Symmetrie des Problems,

daß die Lichtstrahlen auf einer Brennlinie fokussiert werden, die Teilmenge der Geraden durch Lichtquelle und Zentrum ist. Es liegt eine Gravitationslinse vor. Die Brennlinie ist jedoch ein entscheidender Unterschied zum Brennpunkt bei üblichen Linsen. Bei parallelen Lichtstrahlen und minimalem Abstand d beginnt die Brennline im Abstand $x = \frac{d}{\Delta\varphi} = \frac{d^2}{4M}$. Für die Sonne läuft das auf etwa 10^{-2} Lichtjahre hinaus, so daß für Beobachter auf der Erde die Sonne, und allgemein jeder Stern der Milchstraße, nicht als Gravitationslinse in Frage kommt. Dagegen können ausgedehntere Materieverteilungen (außerhalb der Michtstraße, z.B. Galaxien oder Galaxienhaufen) durchaus als Gravitationslinse für noch weiter entfernte Objekte wirken. Solche Linsen sind sehr häufig! Liegen Quelle, Linse und Beobachter exakt auf einer Geraden, so wird die Quelle als 'Einstein-Ring' abgebildet. Ansonsten erwartet man bei sphärisch-symmetrischer Materieverteilung in der Linse genau zwei Bilder. Reale Gravitationslinsen weichen von der sphärischen Symmetrie ab, so daß es neben Teilringen auch z.B. 4 Bilder derselben Quelle geben kann (Einstein-Kreuz). Ob es sich um Bilder derselben Quelle handelt, wird durch Abgleich der sehr charakteristischen Spektren ermittelt. Eine genauere Analyse zeigt, daß eines der Bilder verstärkt ist. Manche sehr entfernte Galaxien können nur durch diese Lichtverstärkung durch die größten Teleskope der Erde oder das Hubble Space Telescope gesehen werden.

21 Innere Schwarzschild-Lösung

Ausgangspunkt ist wieder der radialsymmetrische Ansatz (18.2) für das metrische Tensorfeld, jedoch mit anderen Funktionen $\lambda(r,t)$ und $\nu(r,t)$, die durch Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen zum Energie-Impulstensor (13.8) einer idealen Flüssigkeit

$$T^{\mu\nu} = \Big(\varrho(r) + \frac{p(r)}{c^2}\Big)u^\mu u^\nu - p(r)g^{\mu\nu}$$

bestimmt werden. Dabei sollen Dichte und Druck Funktionen allein von r sein, und die Flüssigkeit soll ruhen. Im Ruhsystem hat die Vierergeschwindigkeit nur eine zeitliche Komponente $u^0 \neq 0$, die sich aus der Nebenbedingung $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2$ bestimmt zu

$$u^\mu = (e^{-\frac{\nu}{2}}, 0, 0, 0)\ .$$

In dieser Wahl gilt $T_{01} = 0$, so daß unverändert die Gleichung $R_{01} = 0$ und damit $\lambda = \lambda(r)$ folgt.

Wir lösen die Einsteinschen Feldgleichungen in der Form (14.6). Dabei ist $T^\rho_\rho = \varrho c^2 - 3p$ und deshalb

$$T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T^\rho_\rho = \frac{e^\nu c^2}{2}(\varrho c^2 + 3p)\ , \tag{21.1}$$

$$T_{jj} - \frac{1}{2}g_{jj}T^\rho_\rho = g_{jj}\frac{p - \varrho c^2}{2} \quad \text{für } j = 1,2,3\ . \tag{21.2}$$

Insbesondere hängt die (22)-Komponente nicht von der Zeit ab, so daß wie im Vakuum $\nu = \nu(r)$ gesetzt werden kann. Somit entstehen mit (18.4) die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varkappa\frac{\varrho c^2 + 3p}{2} &= e^{-\lambda}\Big(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\Big) \\
\varkappa\frac{p - \varrho c^2}{2} &= e^{-\lambda}\Big(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r}\Big) \\
\varkappa\frac{p - \varrho c^2}{2} &= -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\Big(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}(\nu' - \lambda')\Big) \,.
\end{aligned} \tag{21.3}$$

Die halbe erste Gleichung, minus die halbe zweite Gleichung minus die dritte Gleichung lautet:

$$\varkappa\varrho c^2 = \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\Big(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\Big) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r - re^{-\lambda}\Big) \,. \tag{21.4}$$

Sie kann deshalb integriert werden zu

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2\mathcal{M}(r)}{r} \,, \qquad \mathcal{M}(r) = \frac{\varkappa c^2}{2}\int_0^r dx\; x^2\varrho(x) \,. \tag{21.5}$$

Bei einer isolierten Materieverteilung mit $\varrho(r) = 0$ für $r > R$ wird $\mathcal{M}(r) = \frac{\varkappa c^2}{2}\int_0^R ds\;\, s^2\varrho(s) =: M = \text{const}$ für $r > R$, so daß genau die Schwarzschild-Lösung im Vakuum erhalten wird, mit konkreter Berechnungsvorschrift für die Masse M aus der Dichteverteilung. Wir erhalten (zumindest für λ) einen stetigen Anschluß an die äußere Schwarzschild-Lösung. Mit $\varkappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}$ wird scheinbar exakt das Ergebnis der Newtonschen Theorie bezüglich der Gesamtmasse $m = 4\pi\int_0^R ds\;\, s^2\varrho(s)$. Zu beachten ist jedoch, daß das *nicht* das Volumenintegral der Dichte ist: dieses Integral ist

$$\begin{aligned}
M_0 &:= \frac{\varkappa c^2}{8\pi}\int d\mathrm{vol}(r,\vartheta,\varphi)\;\varrho(r) = \frac{\varkappa c^2}{8\pi}\int_0^R dr\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\;\sqrt{\det g^{(3)}}\;\varrho(r) \\
&= \frac{\varkappa c^2}{8\pi}\int_0^R dr\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\; e^{\frac{\lambda}{2}} r^2\sin\vartheta\;\varrho(r) \\
&= \frac{\varkappa c^2}{2}\int_0^R dr\frac{r^2\;\varrho(r)}{\sqrt{1 - \frac{2\mathcal{M}(r)}{r}}} > M \,.
\end{aligned} \tag{21.6}$$

Die Differenz kann als gravitative Bindungsenergie aufgefaßt werden.

Um ν zu bestimmen, bilden wir die Differenz aus der ersten und zweiten Gleichung (21.3):

$$\varkappa(\varrho c^2 + p) = e^{-\lambda}\frac{\nu' + \lambda'}{r} = e^{-\lambda}\frac{\nu'}{r} - \frac{2\mathcal{M}(r)}{r^3} + \varkappa c^2\varrho \,. \tag{21.7}$$

Es folgt

$$\nu' = \frac{2\mathcal{M}(r) + \varkappa p r^3}{r(r - 2\mathcal{M}(r))} \,. \tag{21.8}$$

Damit ist (21.3) jedoch noch nicht identisch erfüllt. Einsetzen z.B. in die erste Gleichung (21.3) führt auf eine komplizierte Gleichung für p'. Diese kann durch folgende Überlegung vereinfacht werden: Wir wissen, daß die Feldgleichungen nur integrabel sind für $0 = \nabla_\nu T^{\mu\nu}$. Die Gleichungen $\partial_t \varrho = 0 = \partial_t p$ sowie $\partial_t u^0 = 0$, die in der speziellen Relativitätstheorie eine ruhende Flüssigkeit beschreiben bzw. aus obiger Diskussion folgen, führen im Ruhsystem auf $u^\nu \partial_\nu \varrho = 0$, $u^\nu \partial_\nu p = 0$, $\partial_\nu u^\nu = 0$. Nach Korrespondenzprinzip werden daraus die tensoriellen und damit im beliebigen Koordinatensystemen richtigen Gleichungen

$$0 = u^\nu \nabla_{\partial_\nu} \varrho \,, \qquad 0 = u^\nu \nabla_{\partial_\nu} p \,, \qquad 0 = \nabla_{\partial_\nu} u^\nu \,.$$

Deshalb reduzieren sich die Integrabilitätsbedingungen auf

$$g^{\mu\sigma} \partial_\sigma p = \Big(\varrho(r) + \frac{p(r)}{c^2}\Big) u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \Big(\varrho(r) + \frac{p(r)}{c^2}\Big) u^\nu \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\rho \,. \tag{21.9}$$

Es verbleibt eine Bedingung

$$p' = -\frac{\nu'}{2}(\varrho c^2 + p) = -(\varrho c^2 + p) \frac{\mathcal{M}(r) + \varkappa p r^3/2}{r(r - 2\mathcal{M}(r))} \,, \tag{21.10}$$

die *Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung* des hydrostatischen Gleichgewichts. Zu ihrer Integration benötigt man die Zustandsgleichung $\varrho = \varrho(p)$. Aus der Lösung erhält man dann die verbleibende Funktion $e^{\nu(r)}$ der Metrik.

Der einfachste, zwar wenig realistische, aber dennoch lehrreiche Fall ist die Annahme konstanter Dichte, was einer inkompressiblen Flüssigkeit entspricht. Die erste Gleichung in (21.10) kann integriert werden zu $K e^{-\frac{\nu}{2}} = \varrho c^2 + p$ für eine Integrationskonstante K. Ist R der Radius des Sterns, so folgt

$$\mathcal{M}(r) = \frac{1}{6} \varkappa c^2 \varrho r^3 = M \frac{r^3}{R^3} \,. \tag{21.11}$$

Damit wird aus (21.7)

$$\begin{aligned} \varkappa K e^{-\frac{\nu}{2}} &= \Big(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\Big) \frac{\nu'}{r} + \frac{4M}{R^3} \\ &= \frac{1}{\beta} \Big(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\Big)^{1-\alpha} \frac{e^{-\beta\nu}}{r} \frac{d}{dr} \Big(\Big(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\Big)^\alpha e^{\beta\nu} \Big) \Big|_{\alpha=-\beta} \,. \end{aligned} \tag{21.12}$$

Bei sinnvoller Wahl von $\beta = \frac{1}{2}$ ergibt sich die Lösung (mit Integrationskonstanten A, B) zu

$$\begin{aligned} &\Big(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\Big)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\nu(r)}{2}} = A + \int_0^r ds \frac{\varkappa K s}{2(1 - \frac{2Ms^2}{R^3})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\varkappa K R^3}{4M} \Big(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\Big)^{-\frac{1}{2}} - B \\ \Rightarrow \qquad & e^{\frac{\nu(r)}{2}} = \frac{\varkappa K R^3}{4M} - B \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} = \frac{K}{\varrho c^2 + p} \,. \end{aligned} \tag{21.13}$$

Daraus und unter Verwendung von (21.11) gewinnen wir den Druck:

$$p(r) = \varrho c^2 \frac{B\sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}} - \frac{K}{2\varrho c^2}}{\frac{3K}{2\varrho c^2} - B\sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}}} \,. \tag{21.14}$$

Im Gleichgewicht muß der Druck an der Oberfläche verschwinden, $p(r=R)=0$. Somit ist $\frac{K}{2\varrho c^2} = B\sqrt{1-\frac{2M}{R}}$ und damit

$$p(r) = \varrho c^2 \frac{\sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}} - \sqrt{1-\frac{2M}{R}}}{3\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}}} \,. \tag{21.15}$$

Der Druck wird, wie erwartet, maximal im Zentrum $r=0$

$$p(0) = \varrho c^2 \frac{1-\sqrt{1-\frac{2M}{R}}}{3\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - 1} \,. \tag{21.16}$$

Aus der Forderung, daß ein endlicher Druck $p(0)$ die Gravitationskraft kompensiert, folgt die Bedingung

$$\begin{aligned} \frac{R}{2M} > \frac{9}{8} \quad &\Rightarrow \quad M = \frac{1}{6}\varkappa c^2 R^3 > \frac{1}{6}\varkappa c^2 \Big(\frac{9}{4}M\Big)^3 \\ &\Rightarrow \quad m = \frac{c^2 M}{G_N} < \frac{c^2}{G_N}\frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3\varkappa c^2 \varrho}} = \frac{4c^3}{9\sqrt{3\pi G_N^3}}\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \,. \end{aligned} \tag{21.17}$$

Ein Stern gegebener Masse kann nur stabil sein, wenn der Radius genügend groß bzw. die Dichte genügend klein ist.

Zwar gilt die Herleitung nur unter der Annahme $\varrho = \text{const}$, die Schlußfolgerung bleibt aber ganz allgemein richtig:

i) Ist der Radius R vorgegeben und die Dichteverteilung *beliebig* innerhalb der einzig sinnvollen Relationen $\varrho(r) > 0$ und $\varrho'(0) < 0$, dann ist die maximal mögliche Masse des Sterns jene aus der uniformen Dichteverteilung $2M < \frac{8}{9}R$.

ii) Für jede vorgegebene Zustandsgleichung $\varrho(p)$, die bis zu $\varrho \le \varrho_0$ gültig ist, gibt es unabhängig von der oberhalb ϱ_0 gültigen Zustandsgleichung eine obere Schranke für die Masse.

Die Argumentation in (ii) beruht auf der Aufteilung in einen Kern der Dichte $\ge \varrho_0$, der nach (i) eine maximale Masse haben muß, und der genaueren Rechnung für die Schale der Dichte $< \varrho$, plus Stetigkeit des Drucks an der Grenzfläche.

Typische Sterne haben relativ geringe Dichte ($\varrho = 1.4\,\mathrm{g/cm^3}$ für die Sonne) und können deshalb sehr massiv sein. Es liegt ein Gleichgewicht vor zwischen

Temperatur, Kernfusionsrate, Druck und Dichte. Das Zünden der jeweils nächsten Kernfusionstypen erfordert jedoch immer höhere Dichten, so daß irgendwann die Masseschranken wesentlich werden. Es zeigt sich, daß in Sternen unterhalb 1.4 Sonnenmasse (Chandrasekhar-Grenze) der Druck des entarteten Elektronengases genügt, um selbst bei Versiegen der Kernfusion und Temperatur $= 0$ eine Dichte aufrechtzuerhalten, die auf $R \gg 2M$ führt. Noch massivere Sterne kollabieren zu Neutronensternen. Die Dichte ist jene der Kernmaterie und bereits so groß, daß die nach (21.17) maximal mögliche Masse mit etwa 2 Sonnenmassen nicht viel größer ist als die Chandrasekhar-Grenze. Verbleibt selbst nach Abstoßen von Material durch eine Supernova mehr Masse als diese Grenze, so gibt es keinen stabilen Zustand für den Stern: Die einsetzende gravitative Kontraktion vergrößert die Dichte, verkleinert damit die maximale Masse. Der Stern kollabiert zu einem schwarzen Loch.

Neutronensterne haben wegen ihrer kleinen Radien sehr hohe Rotationsgeschwindigkeit (wegen Drehimpulserhaltung) von 100 bis 1000 Rotationen pro Sekunde und sehr starkes Magnetfeld. Stimmen Rotationsachse und Magnetfeldachse nicht überein, so wird gebündelte Synchrotronstrahlung in Richtung der Dipolachse emittiert. Trifft dieser Strahl die Erde, so spricht man von einem Pulsar. Solche Pulsare und allgemein Neutronensterne sind ideal, um die Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu überprüfen.

22 Schwarze Löcher

Ein schwarzes Loch ist eine Konzentration einer Masse m innerhalb eines Radius $R < 2M = \frac{2mG_N}{c^2}$. Wir hatten gesehen, daß ein solcher Zustand kann nicht mehr über den Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit beschrieben werden kann. Es war zunächst fraglich, ob es solche Massekonzentrationen tatsächlich gibt. Anhaltspunkt wäre die Bestimmung von $2M = \frac{8\pi^2 a^3}{c^2 T^2}$ über einen Doppelsternbegleiter. Findet man $2M > 6 \ldots 8\,\mathrm{km}$, so muß ein stellares schwarzes Loch vorliegen.

Ebenso können Sternhaufen oder die Kerne von Galaxien über die Bahnen umlaufender Sterne gewogen werden. Im Zentrum der Milchstraße gibt es mit Sagittarius A* eine Quelle von Radiowellen. Der Stern S2 hat bei einer großen Halbachse von $a = 980$ astronomischen Einheiten eine Umlaufzeit von nur $T = 15.2$ Jahren. Zusammen mit der Exzentrizität von $\epsilon = 0.876$ ergibt sich ein minimaler Bahnabstand von 17 Lichtstunden, der dreifachen Entfernung Sonne-Pluto. Man erhält für Sagittarius A* einen Schwarzschild-Radius von $2M = 1.27 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$, was $4.2 \cdot 10^6$ Sonnenmassen entspricht. Diese Masse ist innerhalb eines Radius von < 6 Lichtstunden konzentriert (folgt aus Bahn von S14). Da andere Konfigurationen nicht über das gesamte Alter der Milchstraße stabil sein können, geht man davon aus, daß Sagittarius A* ein supermassives schwarzes Loch ist.

In diesem Abschnitt geht es darum zu verstehen, was beim Durchgang durch die Singularität $r = 2M$ passiert. Zunächst stellt man fest, daß die Singularität

$r = 2M$ eine Koordinatensingularität der Schwarzschild-Metrik ist. Skalare Funktionen der Metrik wie $\det g = -c^2 r^4 \sin^2\vartheta$ und $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 48\frac{M^2}{r^6}$ erweisen sich als stetig bei $r = 2M$, lassen jedoch ein Problem bei $r = 0$ erwarten.

Wir sehen uns zunächst für einen radial fallenden Beobachter, d.h. für $L = 0$, die Annäherung an $r = 2M$ an. Aus (19.6) folgt für die Eigenzeitdifferenz auf der radialen Bahn zwischen $r > 2M$ und $2M$

$$\Delta\tau = \int_{2M}^{r} \frac{ds}{\sqrt{E^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{s}}} < \infty \,. \tag{22.1}$$

Für einen äußeren Beobachter, der seine Koordinatenzeit t verwendet, ist $dt = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\tau}{dr}dr$ und deshalb

$$\Delta t = \int_{2M}^{r} \frac{ds}{1 - \frac{2M}{s}} \frac{E}{\sqrt{E^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{s}}} \to \infty \,. \tag{22.2}$$

Während ein mitbewegter Beobachter den kritischen Radius $r = 2M$ in endlicher Zeit erreicht und (wie wir sehen werden) ohne Schaden passiert, sieht ein entfernter Beobachter ihn nie durch die Kugelschale $r = 2M$ fallen.

Für Licht kann nur die Koordinatenzeit sinnvoll betrachtet werden, da der Kurvenparameter τ keine physikalische Bedeutung hat. Aus der für $L = 0$ gültigen Gleichung (19.5) der Nullgeodäten

$$0 = \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)\Big(\frac{d(ct)}{d\tau}\Big)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\Big(\frac{dr}{d\tau}\Big)^2 \tag{22.3}$$

folgt

$$\Delta t = \int_{2M}^{r} \frac{ds}{1 - \frac{2M}{s}} \to \infty \,, \tag{22.4}$$

so daß für den äußeren Beobachter auch Licht die Kugelschale $r = 2M$ nie erreicht. In der Realität werden fallende Materie und davon ausgesandte Lichtsignale dennoch unsichtbar für äußere Beobachter, da wegen der gravitativen Frequenzänderung (18.11) die Wellenlänge unendlich rotverschoben ist. Ein bei $r = 2M$ mit Frequenz ν_{2M} aussgesandtes Signal erreicht den Radius r mit Frequenz

$$\frac{\nu_r}{\nu_{2M}} = \frac{\sqrt{g_{00}(2M)}}{\sqrt{g_{00}(r)}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{2M}}{1 - \frac{2M}{r}}} = 0 \,. \tag{22.5}$$

Auch deshalb kann ein äußerer Beobachter keine Information über die Physik bei $r = 2M$ erhalten: Der Schwarzschild-Radius ist für jeden äußeren Beobachter ein *Horizont*.

22.1 Kruskal-Szekeres-Koordinaten

Jede Koordinatentransformation überführt eine Lösung der Feldgleichungen in eine andere Lösung. Die Schwarzschild-Metrik deformiert Lichtkegel. Deshalb suchen wir eine Beschreibung in Lichtkegelkoodinaten, in denen der Lichtkegel immer derselbe bleibt. Die Gleichung einer radialen ($L = 0$) Nullgeodäte in der Schwarzschild-Metrik ist nach (22.3) $\frac{d(ct)}{dr} = \pm\frac{r}{r-2M}$, so daß

$$ct = \pm r_* + \text{const} \,, \qquad r_* = r + 2M \log\left|\frac{r}{2M} - 1\right| . \tag{22.6}$$

Wie definieren somit die Lichtkegelkoordinaten $u = ct - r_*$ und $v = ct + r_*$. Die hybriden Eddington-Finkelstein-Koordianten $(v, r, \vartheta, \varphi)$ führen bereits auf eine bei $r = 2M$ reguläre Metrik

$$g = \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)(dv)^2 - 2(dr)(dv) - r^2(d\vartheta)^2 - r^2\sin^2\vartheta(d\varphi)^2 \,. \tag{22.7}$$

Besser ist es auch r zu eliminieren:

$$g = -\Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)du\,dv - r^2(d\vartheta)^2 - r^2\sin^2\vartheta(d\varphi)^2 \,, \tag{22.8}$$

wobei $r(u, v)$ für $r > 2M$ und der Umformung

$$\frac{v-u}{4M} - 1 = \frac{r_*}{2M} - 1 = \frac{r}{2M} - 1 + \log\Big(\frac{r}{2M} - 1\Big) = \log\Big(\Big(\frac{r}{2M} - 1\Big)e^{\frac{r}{2M}-1}\Big)$$

durch die Lambert W-Funktion $W(z)e^{W(z)} = z$ gegeben ist,

$$r = 2M + 2MW(e^{\frac{v-u}{4M}-1}) \,. \tag{22.9}$$

Es gilt $W(x) > 0$ für $x > 0$. Die W-Funktion hat jedoch eine Fortsetzung zu $W : [-\frac{1}{e}, 0] \to [-1, 0]$, über die wir eine Fortsetzung der Lösung in das Gebiet $0 < r < 2M$ definieren. Dazu verwenden wir neue Koordinaten

$$V := e^{\frac{v}{4M}} =: X + T \,, \qquad U := -e^{-\frac{u}{4M}} =: T - X \,,$$

in denen mit

$$\begin{aligned} du\,dv &= -\frac{(4M)^2}{e}\frac{dU\,dV}{(-UVe^{-1})} = -\frac{(4M)^2}{e}\frac{dU\,dV}{W(-UVe^{-1})e^{W(-UVe^{-1})}} \\ &= -\frac{(4M)^2}{e}\frac{dU\,dV}{(\frac{r}{2M}-1)e^{\frac{r}{2M}-1}} = \frac{32M^3}{r}e^{-\frac{r}{2M}}\frac{dU\,dV}{1-\frac{2M}{r}} \end{aligned}$$

entsteht:

$$g = \frac{32M^3}{r}e^{-\frac{r}{2M}}((dT)^2 - (dX)^2) - r^2(d\vartheta)^2 - r^2\sin^2\vartheta(d\varphi)^2 \,. \tag{22.10}$$

Dabei ist

$$r = 2M + 2MW\Big(\frac{X^2 - T^2}{e}\Big)\,, \qquad X^2 - T^2 \geq -1\,, \tag{22.11}$$
$$ct = 2M \log \frac{X+T}{X-T}\,,$$

wobei die bisherige Koordinatenzeit nur für $X > T$, entsprechend $r > 2M$ erklärt ist.

Die Koordinaten $(T, X, \vartheta, \varphi)$ heißen *Kruskal-Szekeres-Koordinaten*. Das Kruskal-Diagramm stellt radiale Bahnen im X-T-Koordinatensystem dar. Einige Bemerkungen:

- Die Kruskal-Koordinaten $(T, X, \vartheta, \varphi)$ haben für alle zugelassenen Werte $X^2 - T^2 > -1$ die korrekte Lorentz-Signatur und parametrisieren deshalb eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, in die die bisherige Schwarzschild-Raumzeit isometrisch eingebettet ist.
- Radiale Nullgeodäten (ϑ, φ konstant) sind global gegeben durch $T = \pm X +$ const, so daß Lichtkegel überall dieselben sind.
- Die beiden Hyperbeln $\{X^2 = T^2 - 1\,,\ T > 1\}$ und $\{X^2 = T^2 - 1\,,\ T < -1\}$ beschreiben die Singularität $r = 0$ und begrenzen von oben und unten das zulässige Gebiet. Die Geraden $X = T$ und $X = -T$ beschreiben den Schwarzschild-Horizont $r = 2M$. Hier divergiert die Koordinatenzeit t nach $\pm\infty$. Zusammen mit den begrenzenden Hyperbeln $r = 0$ teilen sie die Kruskal-Raumzeit in 4 Gebiete:

  I: $X > |T|$. Dieses ist die eigentliche Schwarzschild-Raumzeit mit korrekt definierter Koordinatenzeit t.

  II: $\sqrt{T^2 - 1} < |X| < T$. Das innerhalb des üblichen Schwarzschild-Horizonts liegende Gebiet, entsprechend $0 < r < 2M$. Die Koordinatenzeit t ist hier nicht erklärt.

  I': $X < -|T|$. Eine mit der Schwarzschild-Raumzeit I nicht zusammenhängende Kopie derselben. Eine Koordinatenzeit kann definiert werden.

  II': $\sqrt{T^2 - 1} < |X| < -T$. Eine mit II nicht zusammenhängende Kopie von II.

- Bahnen $t =$ const in I und I' sind Geraden $T = \alpha X$ mit $|\alpha| < 1$. Bahnen $r =$ const sind Hyperbeln $X^2 - T^2 =$ const.
- Ein Beobachter in I kann jeden Radius $r > 2M$ in I, den Teil $X > 0, T > 0$ des Horizonts $r = 2M$ und jeden Radius $0 < r < 2M$ in II erreichen.
- Ein Beobachter in I' kann jeden Radius $r > 2M$ in I', den Teil $X < 0, T > 0$ des Horizonts $r = 2M$ und jeden Radius $0 < r < 2M$ in II erreichen.

- Ein Beobachter in II und auch von ihm ausgesandtes Licht kann keines der anderen Gebiete I,I',II' erreichen. Deshalb wird II als *Schwarzes Loch* bezeichnet.
- Jede kausale Bewegung in II verringert den Koordinatenradius r. Der Beobachter endet unvermeidlich nach endlicher Eigenzeit in der Singularität $r = 0$. Diese Zeit läßt sich am besten aus der formal fortgesetzten Schwarzschild-Metrik berechnen, die auf $\frac{1}{\frac{2M}{r}-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 > c^2$ führt. Damit folgt für die Eigenzeit von r nach 0

  $$c(\Delta\tau)(r) = \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{\frac{2M}{s}-1}} = 2M \arcsin\sqrt{\frac{r}{2M}} - \sqrt{r(2M-r)} \leq \pi M \ .$$

  Diese Eigenzeitdifferenz ist umso kürzer, je kleiner r bereits ist. Räumlich ausgedehnte Objekte werden deshalb auseinandergerissen.
- Ob in II eine andere Koordinatenzeit sinnvoll erklärt werden kann, in der man rückwärts läuft und so die eigene Zukunft sehen kann, ist unklar.
- Beobachter aus I und I' können sich in II treffen, bevor sie die Singularität erreichen.
- Der Radius eines Sterns schirmt das Gebiet links der Bahnkurve $u(R,T)$ des Sternrands ab, einschließlich der Gebiete I',II'. Dort ist $T_{\mu\nu} \neq 0$ und die Lösung I',II' nicht relevant. Der kollabierende Stern erreicht jedoch einen Teil des Gebiets II. Jeder Punkt des Sterns, der den Horizont $r = 2M$ überschritten hat, endet nach endlicher Eigenzeit in der Singularität $r = 0$.
- Deshalb können beim Sternkollaps gebildete schwarze Löcher II keine Verbindung zu einer weiteren Raumzeit II' haben. Nur primordiale schwarze Löcher, die von Anfang an existiert haben, könnten mit einem Gebiet II' in Verbindung stehen.
- Ein Beobachter in II' wird nach endlicher Kruskal-Zeit in eines der Gebiete I,I',II getrieben. Deshalb definiert II' ein weißes Loch, das Strahlung oder jede Form von Materie und Beobachtern emittiert. Da sich so die Physik in I (und I') beliebig beeinflussen ließe, darf es das Gebiet II', außer in einer Form des Urknalls, nicht geben.
- Spekulativ sind Verklebungen von Schwarzschild-Horizonten an verschiedenen Orten im Universum zu einem Wurmloch.

23 Ergänzungen

23.1 Zur Thermodynamik schwarzer Löcher

Die Kerr-Lösung (1963)ist eine Verallgemeinerung der Schwarzschild-Lösung auf den Außenraum rotierender Sterne oder rotierender schwarzer Löcher. Die Metrik wird dann durch M, L parametriesiert. Hier ist keine innere Kerr-Lösung

bekannt. Auch elektrische Ladungen Q sind möglich (Schwarzschild $\mapsto$ Reissner-Nordström, Kerr $\mapsto$ Kerr-Newman).

Penrose und Hawking haben ab den 60er Jahren Singularitäten-Theoreme bewiesen. Die Singularität ist im Sinn kausaler Unvollständigkeit zu verstehen, d.h. es gibt nicht fortsetzbare Geodäten. Die Theoreme beweisen unter Positivitätsannahmen an die Energie wie $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$ (schwache Energiebedingung), daß jedes schwarze Loch (nicht nur die Schwarzschild-Lösung) eine Singularität enthält.

Ein weiteres Ergebnis in diesem Umfeld is das No-Hair-Theorem, besser No-Hair-Vermutung. Es besagt, daß das äußere Gravitationsfeld schwarze Löcher nur durch die drei Parameter Masse m, Drehimpuls $J = mL$ und Ladung Q parametrisiert ist, d.h. die Kerr-Newmann-Lösung wäre die allgemeinste. Diese wenigen Informationen entsprechen sehr wenig Entropie. Insbesondere ließe sich Entropie vernichten, indem man sie in das schwarze Loch schickt. Um den 2. Hauptsatz der Thermodynamik dennoch zu retten, wurde eine Größe gesucht, die in der Summe mit der Entropie im Außenraum stets zunimmt. Anhaltspunkt war ein Theorem von Hawking, nach dem die Gesamtoberfläche

$$A = 4\pi\Big(r_h^2 + \frac{J^2}{m^2c^2}\Big)\,, \quad r_h := \frac{G_N m}{c^2} + \sqrt{\Big(\frac{G_N m}{c^2}\Big)^2 - \frac{G_N Q^2}{c^4} - \frac{J^2}{m^2c^2}} \tag{23.1}$$

der Horizonte beim Verschmelzen schwarzer Löcher stets zunimmt. Bekenstein konnte so folgende Formel für die Entropie schwarzer Löcher herleiten:

$$S = k_B \frac{A}{4\ell_P^2} = \frac{k_B c^3 A}{4G_N\hbar}\,. \tag{23.2}$$

In verschiedenen Varianten der Quantegravitation versucht man, diese Formel durch Abzählen von Mikrozuständen zu verstehen. Die Rolle der Oberfläche in dieser Formel gab Anlaß zur Formulierung holographischer Prinzipien von 't Hooft und Susskind. Diese behaupten, daß jede über die Entropie schwarzer Löcher hinausgehende Information, z.B. über einkommende und (s.u.) abgestrahlte Teilchen, auf der Horizont-Oberfläche eingeprägt ist, die wie ein Hologramm die Wechselwirkung des Universums mit dem schwarzen Loch kodiert.

Wenn schwarze Löcher eine Entropie haben, sollten sie auch eine Temperatur haben, die Hawking-Temperatur

$$T = \frac{2\hbar c}{k_B}\cdot\frac{r_h - \frac{G_N m}{c^2}}{A} \overset{J,Q=0}{\longrightarrow} \frac{\hbar c^3}{8\pi G_N k_B m}\,. \tag{23.3}$$

Ensprechend sollten schwarze Löcher strahlen. Sehr vereinfacht passiert folgendes: Nahe am Horizont, aber noch im Gebiet I, wird aus dem Vakuum ein virtuelles Teilchen-Antiteilchen-Paar erzeugt. Bevor sie rekombinieren, fällt eines der Teilchen in den Horizont, während das andere entkommt und zur Strahlung beiträgt. Die dazu notwendige Energie muß aus dem schwarzen Loch kommen, d.h. seine

Masse verringern. Umgekehrt empfängt das schwarze Loch Temperaturstrahlung aus dem Universum. Sobald das Universum durch seine Expansion kühler wird als das schwarze Loch, überwiegt die Abstrahlung, die sich mit abnehmender Masse weiter beschleunigt und am Ende das schwarze Loch vollständig verdampft. Gegenwärtig könnten primordiale schwarze Löcher der Masse $10^{14}\,\mathrm{g}$ verdampfen, was jedoch nicht beobachtet wurde. Schwarze Löcher mit 2 Sonnenmassen verdampfen in 10^{67} Jahren.

23.2 Zur Vereinigung der fundamentalen Wechselwirkungen

Die beiden Steiten der Einsteinschen Feldgleichungen, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ bzw. $T_{\mu\nu}$, haben einen völlig unterschiedlichen Charakter. Die linke Seite ist rein geometrisch, die rechte zunächst nicht. Kaluza und Klein haben schon in den 20er Jahren eine vereinheitlichte Theorie von Gravitation und Elektromagnetismus in 5 Dimensionen vorgeschlagen. Dabei ist die 5. Dimension zu einem genügend kleinen Kreis kompaktifiziert. Das Vektorpotential A_μ ist dabei die Komponente $g_{\mu 5}$ der Metrik. Letztlich scheitert dieses Programm, weil weitere Elementarteilchen und Kräfte gefunden wurden, die nicht in der Metrik unterzubringen sind. Allerdings haben gerade diese Kräfte, die wir als elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkungen bezeichnen, eine sehr natürliche geometrische Interpretation als Zusammenhänge in Faserbündeln über der Raumzeit-Mannigfaltigkeit. Diese Yang-Mills-Felder lassen sich gemeinsam mit der Gravitation zu einem einzigen geometrischen Objekt kombinieren, dem Dirac-Operator

$$\mathsf{D} = \gamma^a e_a^\mu \Big(\mathrm{i}\partial_\mu + \frac{1}{8}[\gamma_b, \gamma_c]\omega_\mu^{bc} + \tau_K A_\mu^K \Big) \,.$$

Dabei sind die γ-Matrizen γ^a die Generatoren der Clifford-Algebra $\{\gamma^a, \gamma^b\} = \eta^{ab}1$, e_a^μ sind die *Vierbeine* definiert durch $\eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu = g^{\mu\nu}$, ω_μ^{bc} ist der Spin-Zusammenhang zum Levi-Civita-Zusammenhang. Hier gilt $\partial_\nu e_a^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} e_a^\sigma - \omega^a_{\nu b} e_b^\mu = 0$, so daß sich ω_ν^{ab} allein aus den e_a^μ berechnen läßt. Die τ_K sind Basen der Lie-Algebren $U(1), SU(2), SU(3)$ des Standardmodells, und A_μ^K sind die entsprechenden Komponenten der Yang-Mills-Felder. Die Euler-Lagrange-Gleichungen zu einer beliebigen Funktion des Spektrums von D auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit sind (bis auf falsche Signatur und Topologie) die Einsteinschen Feldgleichungen zum Energie-Impuls-Tensor der Yang-Mills-Felder.

23.3 Zum Verhältnis von Quantenphysik und Gravitation

In Wirklichkeit sind die Yang-Mills-Felder Quantenfelder. In zweidimensionalen konformen Quantenfeldtheorie konstruiert man einen Energie-Impuls-Tensor als Operator auf einem Hilbert-Raum. Man hofft, das das auch für Yang-Mills-Felder in 4 Dimensionen gelingt. Der Versuch, die Einsteinschen Feldgleichungen durch $G_{mu\nu} = \varkappa\langle T_{\mu\nu}\rangle$ zu retten, wobei $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ der Vakuumerwartungswert ist, führt nicht

weit: $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ ist nicht divergenzfrei. Also müßte man auch $G_{mu\nu}$ zu einem Operator machen, was auf Quantengravitation hinausläuft.

In jedem Fall weiß man, daß Quantenfelder die Energie-Ungleichungen verletzen, die Voraussetzung für die Singularitätentheoreme sind. Quanten-Energie-Ungleichungen beweisen eine negative untere Schranke für $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$, mit der sich manche Theoreme retten lassen. Pathologien wie Zeitmaschinen und Warp-Geschwindigkeiten können nur in so engen Grenzen auftreten, daß sie nicht ausgenutzt werden können.

Eine auf Wigner zurückgehende Überlegung zeigt, daß bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Prinzipien der Quantenphysik unsere Raumzeit *keine* Riemannsche Mannigfaltigkeit mehr sein kann. Dazu betrachtet man Ereignisse an zwei Punkte im Abstand Δx. Um sie zu trennen, ist ein Streuexperiment mit Teilchen genügend kurzer de Broglie-Wellenlänge durchzuführen. Nach der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation wird dem Objekt eine Energie der Größenordnung $E = c\Delta p \geq \frac{\hbar c}{2\Delta x}$ übertragen und in einem Gebiet der Ausdehnung Δx konzentriert. Diese zusätzliche Energiedichte ist Quelle eines Gravitationsfeldes, das schwach genug sein muß, um die Streuteilchen entkommen zu lassen. Das erfordert $\Delta x \geq 2M = \frac{2G_N m}{c^2} = \frac{2G_N E}{c^4} \geq \frac{G_N \hbar}{c^3 \Delta x}$ oder

$$\Delta x \geq \ell_P = \sqrt{\hbar G_N} c^3 = 1.6 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}\,.$$

Dabei heißt ℓ_P *Planck-Länge* Genauer gilt nach Doplicher-Fredenhagen-Roberts (1995) $\Delta x^0(\Delta x^1 + \Delta x^2 + \Delta x^3) \geq \ell_P^2$ und $\Delta x^1 \Delta x^2 + \Delta x^2 \Delta x^3 + \Delta x^3 \Delta x^1 \geq \ell_P^2$. Entsprechend sollten die Koordinaten durch Operatoren auf Hilbert-Räumen realisiert werden, deren Vertauschungsrelationen auf die angegebenen Schranken führen. Dieser Weg wird in manchen Arbeiten zur *nichtkommutativen Geometrie* versucht.

Auch die Renormierungsgruppe führt zur gleichen Schlußfolgerung: Die Renormierungsgruppe erkärt, weshalb Systeme der statistischen Physik mit unendlich vielen Freiheitsgraden durch sehr wenige makroskopische Parameter wie Druck und Temperatur zu beschreiben sind (Universalitätsklassen). Es ist demnach auch kein Zufall, daß die Wechselwirkungen des Standardmodells renormierbar sind: Alle anderen möglichen Wechselwirkungen werden durch den Renormierungsgruppenfluß wegskaliert. Gravitation ist als Quantenfeldtheorie nicht renormierbar und dürfte deshalb nicht existieren, falls der Renormierungsgruppenfluß bei unendlich hoher Energieskala begonnen wird. Da es Gravitation gibt, muß der der Fluß bei endlicher Skala starten, deren Wert sich, wie erwartet, als die Planck-Skala $E_P = \frac{\hbar c}{\ell_P}$ ergibt.

23.4 String-Theorie

Die String-Theorie ist der am weitesten ausgebaute Zugang zur Quantengravitation. An die Stelle punktförmiger Teilchen treten offene oder geschlossene Saiten

der Länge ℓ_P. Sie entstand Ende der 60er Jahre als Theorie der starken Wechselwirkung. Dabei wurden die heutigen Gluonen als Feder (oder Saite) zwischen den Quarks aufgefaßt. Jedoch treten im Spektrum der Theorie masselose Tensorfelder vom Typ $(2,0)$ auf, so daß man die Theorie 1974 uminterpretiert hat als eine die Gravitation umfassende Theorie aller Wechselwirkungen.

Die einfachsten Formulierung ist die Polyakow-Wirkung

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d\sigma d\tau \, \sqrt{-\det h}\, h^{ab} g_{\mu\nu} (\partial_a X^\mu(\sigma,\tau))(\partial_b X^\nu(\sigma,\tau)) \; . \tag{23.4}$$

Dabei ist Σ die zweidimensionale Weltfläche des Strings, parametrisiert durch σ, τ, und h eine (nicht relevante) Metrik auf Σ. Weiter ist $g_{\mu\nu}$ eine vorgegebene Metrik auf der D-dimensionalen Raumzeit M, und die X^μ sind die Komponenten einer Abbildungen $X : \Sigma \to \mathfrak{X}(M)$. Die Euler-Lagrange-Gleichungen für X^μ sind Wellengleichungen, für die Randbedingungen gestellt werden. Nach Quantisierung und Renormierung werden entsprechend der konformen Invarianz der Weltfläche Darstellungen der Virasoro-Algebra erhalten. Die Forderung nach Anomaliefreiheit führt bei Berücksichtigung der zentrale Ladung zur Schlußfolgerung, daß die Quantentheorie dieser Strings nur in $D = 26$ Dimensionen konsistent ist.

Durch Hinzunahme supersymmetrischer Partner Ψ der X^μ läßt sich die kritische Dimension auf $D = 10$ reduzieren. Die überschüssigen 6 Dimensionen müssen entsprechend der Kaluza-Klein-Idee kompaktifiziert sein. Diese kompakte Untermannigfaltigkeit ist typischerweise eine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit – eine komplex-3-dimensionale Mannigfaltigkeit, die eine Ricci-flache Metrik zuläßt. Nach Abschätzungen gibt es $\mathcal{O}(10^{500})$ Möglichkeiten für solche Kompaktifizierungen. Deshalb sind physikalische Vorhersagen schwierig, es konnten jedoch zahlreiche sehr tiefe Ergebnisse in der Mathematik erhalten werden, vor allem in der algebraischen Geometrie. Hier ist die String-Theorie eine unverzichtbare Quelle von Inspiration.

Bis Mitte der 80er Jahre wurden (neben der rein bosonischen) folgende 5 konsistente (d.h. zumindest in Einschleifennäherung renormierbare) Superstring-Theorien ermittelt:

- Typ-I: offene Strings (die sich schließen dürfen), Symmetrie $SO(32)$
- Typ-IIA: nur geschlossene Strings, masselose Fermionen beider Chiralitäten
- Typ-IIA: nur geschlossene Strings, masselose Fermionen nur einer Chiralität
- zwei heterotische String-Theorien geschlossener Strings. Einer der chiralen Sektoren ist ein Superstring (in 10 Dimensionen), der andere rein bosonisch in 26 Dimensionen, dann kompaktifiziert auf einem 16-dimensioanlen Gitter, wobei es zwei mögliche Symmetrien gibt: $E(8) \times E(8)$ bzw. $SO(32)$.

Anschließend konzentrierte man sich auf D-Branen, also Untermannigfaltigkeiten der 10-dimensionalen Raumzeit. Offene Strings enden auf diesen Branen, wobei den Enden Dirichlet-Randbedingungen auferlegt werden. In diesem Rahmen

konnte die Bekenstein-Formel für 5-dimensionale extreme schwarze Löcher mikroskopisch durch Abzählen möglicher Branenkonfigurationen erhalten werden.

Mitte der 90er Jahre wurden *Dualitäten* zwischen den String-Theorien gefunden. S-Dualität überführt stark gekoppelte Teilchen einer Theorie in schwach gekoppelte Teilchen der anderen Theorie, und umgekehrt. So ist Typ I S-dual zu Typ HO, und Typ IIB ist in nichtrivialer Weise selbstdual. T-Dualität überführt eine n-fache Schwingungsmode bei Radius R in eine n-fache Windungsmode bei Radius $1/R$, und umgekehrt. Typ HO ist T-dual zu Typ HE, und Typ IIB ist T-dual zu Typ IIA. Diese Dualitäten führten Witten zu der Vermutung, daß alle String-Theorien Spezialfälle einer noch allgemeineren Theorie sind, der *M-Theorie*. Diese enthält mit 11-dimensionaler, klassischer, Supergravitation einen weiteren interessanten Spezialfall, der nach Kompaktifizierung auf dem Kreis S^1 zur Typ IIA-Superstringtheorie führt und bei Kompaktifizierung auf dem Intervall zur heterotischen $E(8) \times E(8)$-Theorie führt. Es gibt Vorschläge, M-Theorie als Matrixmodelle zu realisieren. Branen scheinen auch in der M-Theorie eine wichtige Rolle zu spielen.

Das wohl wichtigste Ergebnis dieser Forschungen ist die von Juan Maldacena 1997 initiiierte AdS-CFT-Korrespondenz. Der Anti-de-Sitter-Raum ist eine maximal-symmetrische Vakuum-Lösung der Einsteinschen-Feldgleichungen mit negativer kosmologischer Konstante. So entsteht eine hyperbolische Geometrie, die in geeigneten Koordinaten mit einem Rand versehen werden kann, der im wesentlichen der flache Minkowski-Raum ist. Die Korrespondenz besagt, daß die Gravitationstheorie im Inneren dual, und damit exakt äquivalent, zu einer konformen Feldtheorie auf dem (niederdimensionalen!) Rand ist. Es realisiert damit das aus der Bekenstein-Formel für die Entropie schwarzer Löcher bekannte *holographische Prinzip*, nach dem die Information vollständig auf der Oberfläche kodiert ist.

Das wichtigste Beispiel ist die Dualität zwischen der Typ-IIB-Stringtheorie auf $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ und der $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills-Theorie. Letztere zeigt faszinierende Eigenschaften wie Integrabilität in 4 Dimensionen.

23.5 Schleifenquantengravitation

Ausgangspunkt ist die 3+1-Zerlegung der Raumzeit in eine Familie Σ_t dreidimensionaler Hyperflächen. Das metrische Tensorfeld zerlegt sich dann gemäß

$$g = (N dt)^2 - h_{ij}(dx^i - N^i dt)(dx^j - N^j dt) \; .$$

Dabei ist h eine Riemannsche Metrik auf Σ_t. Die Funktionen N und Vektoren N^j heißen *lapse* und *shift*. Die Metrik h definiert ein Dreibeinfeld e^a_j über $h_{ij} = e^a_i e^b_j \delta_{ab}$. Offenbar läßt sich die Einstein-Hilbert-Wirkung durch e^a_i, N^i, N ausdrücken. Man stellt fest, daß N^i und N linear auftreten, so daß ihre Koeffizienten in Folge der Feldgleichungen identisch Null sind (Hamilton-constraint $H \approx 0$ und Diffeomorphismen-constraint). Seien $\Pi^a_i = \frac{1}{2}\sqrt{\det h}\, e^b_i (K_{ab} - \delta_{ab} K_{cc})$

die kanonischen Impulse zu den e_i^a (dabei ist K_{ab} die *äußere Krümmung*). In der ursprünglichen Formulierung, der ADM-Theorie, betrachtete man die Wheeler-de Witt-Gleichung $H\Psi = 0$, jedoch ohne Erfolg.

Ashtekar fand 1987 neue Variablen, in denen der Hamilton-constraint sehr viel einfacher ist. Die Linearkombination

$$A_a^i := -\frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega_{bc}^i + \gamma e_b^i K_{ab} \ ,$$

wobei der Immirzi-Parameter γ zunächst beliebig ist, erfüllt zusammen mit den skalierten Dreibeinen $E_i^a := \sqrt{\det h} e_i^a$ die Poisson-Klammern

$$\{E_i^a(x), E_j^b(y)\} = 0 \ , \quad \{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = 0 \ , \quad \{E_i^a(x), A_b^j(y)\} = \varkappa \delta_b^a \delta_i^j \delta(x-y) \ .$$

Der Diffeomorphismen-constraint nimmt in diesen Variablen die einfache Form $E_i^a F_{ab}^i \approx 0$ an, wobei F_{ab}^i die $so(3)$-Feldstärke zu den $so(3)$-Zusammenhangskoeffizienten A_a^i ist. Des weiteren wird der Hamilton-constraint bei der Wahl $\gamma = \mathrm{i}$ und Übergang von $so(3)$ zu $su(2)$ sogar polynomial.

Bei der Quantisierung sind die Funktionen $E_i^a(x), A_b^j$ durch Operatoren zu ersetzen. Es genügt aber nicht, nur die kanonischen Kommutatorrelationen zu fordern, denn auch die constraints müssen als Operatorgleichung realisiert werden. Das ist für den Hamilton-constraint ein schwieriger Schritt, der nicht vollständig gelungen ist. Es zeigte sich, daß die Festlegung $\gamma = \mathrm{i}$ keine Vorteile bringt und man γ besser reell wählt.

Schleifen-Quantengravitation besteht in einer Quantisierung dieser Poisson-Algebra durch Wilson-Linien entlang von Netzwerken. Letztere sind Darstellungen der $su(2)$, werden deshalb Spin-Netzwerke genannt. Die Bausteine sind Holonomien $h_e = \mathcal{P}\exp(\int_e A_i dx^i)$, die durch das weggeordnete exponentierte Integral der Zusammenhänge über die Kanten e des Netzwerks gegeben sind. Zunächst kann man sich die Netzwerke als eingebettet in die Zeitscheibe Σ_t denken, dann wird Σ_t jedoch vergessen, und das Netzwerk selbst ist die Raumzeit. Ashtekar und Lewandowski konnten der gesamten Hierarchie von Netzwerken einen Hilbert-Raum zuordnen.

Wichtige frühe Ergebnisse waren Quantisierung von Fläche und Volumen durch die Spins der Kanten, die durch die Fläche gehen bzw. der Knoten im Volumen. Damit konnte eine weitere mikroskopische Herleitung der Bekenstein-Entropie gefunden werden, wobei der Immirzi-Parameter sich aus dieser Rechnung bestimmt. Ohne Korrekturen folgt $\gamma = \frac{\log 2}{\pi\sqrt{3}}$.

Vertreter der Schleifenquantengravitation betonen als konzeptionelle Vorteile gegenüber der aus der Teilchenphysik heraus entstandenen String-Theorie, daß ihre Theorie explizit unabhängig vom Hintergrund und invariant unter Diffeomorphismen ist. Auch ist die Konsistenz ohne komplizierte Formen von Materie gesichert. Umgekehrt gab es keinen Rückfluß tiefer Erkenntnisse in die Mathematik.

Zweidimensionale euklidische Quantengravitation läßt sich über die Abzählung von Triangulierungen von Flächen verstehen. Diese Abzählungen sind äquivalent zu gewissen Matrix-Modellen. Kürzlich konnte Teilaspekte innerhalb der farbigen Tensor-Modelle in höhere Dimension verallgemeinert werden. Es gibt Verbindungen dieser Tensor-Modelle zur Schleifenquantengravitation über Gruppenfeldtheorie.

Teil VI
Kosmologie

Die wissenschaftlichen Kosmologie begann 1917 mit einer Arbeit von Albert Einstein. Darin wurde die Frage untersucht, ob die gekrümmte Raumzeit für das Universum relevant ist. Einstein ging von der Annahme einer gleichförmigen Materieverteilung aus, was auf Skalen sehr viel größer als die Duchmesser der Galaxien realistisch erscheint. Seine Erwartung war, daß es wie für die Schwarzschild-Lösung eine statische Lösung für ein endliches homogenes Universum geben sollte. Dieser Annahme erwies sich als falsch, so daß Einstein die kosmologische Konstante zur Rettung eines statischen Universums eingeführt hat.

1922 hat Alexander Friedmann nichtstatische Lösungen der kosmologischen Modelle gefunden. Einstein sah diese als interessante mathematische Arbeit an, jedoch ohne physikalische Bedeutung.

1929 konnte Edwin Hubble zeigen, daß die Galaxienspektren systematisch rotverschoben sind, d.h. die Galaxien entfernen sich von uns. Lemaître und andere haben das als Expansion des Universums gedeutet.

24 Friedmann-Robertson-Walker-Metrik

Kosmologische Modelle sind Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen zu Materieverteilungen, die das kosmologische Prinzip erfüllen:

24.1 Kosmologisches Prinzip. *Der räumliche Teil der Geometrie ist homogen und isotrop, d.h. es gibt keine ausgezeichneten Punkte und Richtungen.*

Wir zeigen: es gibt eine universelle Zeit t, so daß der metrische Tensor folgende Form annimmt:

$$g = (ds)^2 = c^2(dt)^2 - g_{ij}dx^i dx^j \ , \qquad i,j = 1,2,3 \ . \tag{24.1}$$

Die x^i heißen mitbewegte Koordinaten, da in ihnen die Materie ruhend ist.

Die Herleitung von (24.1) basiert auf folgenden Argumenten:

i) Seien $x^\mu(\tau)$ die Weltlinien. Setze $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ und $a^\mu = \frac{Du^\mu}{d\tau} = (\nabla_\nu u^\mu)u^\nu$. Die Beschleunigung ist raumartig. Aus der lokalen Isotropie folgt dann $a^\mu = 0$, d.h. die x^μ sind Geodäten.

ii) $u_\mu = \partial_\mu f$ für eine geeignete Funktion f. Betrachte $\nabla_\mu u_\nu - \nabla_\nu u_\mu = \partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu$. Nach i) gilt $(\nabla_\nu u^\mu)u^\nu = 0$, außerdem ist $u_\mu u^\mu = c^2$ und deshalb $(\nabla_\nu u^\mu)u_\mu = 0$. Beides zusammen liefert $(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu)u^\mu = 0$. Im mitbewegten Koordinatensystem gilt $u = (c,0,0,0)$, so daß $\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu$ nur räumliche Komponenten hat. Aber der Vektor $\partial_i u_j - \partial_j u_i$ zeichnet eine Richtung aus, die Rotation von u. Nach kosmologischem Prinzip muß diese Rotation verschwinden, d.h. u ist ein Gradient: $u_i = \partial_i f$.

iii) Setze $f =: c^2 t$, $u_\mu = c^2 \partial_\mu t$. Dann ist t die Eigenzeit längs jeder Weltline, da

$$dt = \frac{1}{c^2} u_\mu dx^\mu = \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} dx^\mu = \frac{1}{2c^2} \frac{(ds)^2}{d\tau} = d\tau \ .$$

Die Hyperfläche $t = \text{const}$ ist orthogonal zur Weltlinie: $u_\mu dx^\mu = c^2 dt = 0$.

iv) In der Hyperfläche $t = \text{const}$, wähle mitbewegte Koordinaten x^i, $i = 1, 2, 3$, d.h. $x^i = \text{const}$ längs Weltlinien. Somit $(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - g_{ij}(t, x) dx^i dx^j$, da $g_{0i} = 0$ wegen iii).

v) Die Zeitabhängigkeit ist durch einen globalen Skalenfaktor gegeben:

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - \tilde{R}^2(t, x)(d\sigma)^2 \quad \text{mit} \quad (d\sigma)^2 = \tilde{g}_{ij}(x) dx^i dx^j \ .$$

Betrachte dazu drei infinitesimal benachbarte Punkte A, B, C. Angenommen, $\measuredangle(BAC)$ wäre zeitabhängig. Wegen Isotropie müssen sich die Winkel anderer Dreiecke mit gemeinsamer Ecke A in gleicher Weise ändern, was lokal bei A nicht möglich ist. Somit bleiben alle Dreiecke im Zeitverlauf ähnlich, d.h. die Zeitabhängigkeit ist ein gemeinsamer Faktor aller g_{ij}.

vi) Schließlich ist $(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - \tilde{R}^2(t)(d\sigma)^2$: Betrachte zwei infinitesimal benachbarte Teilchen mit Abstand $\Delta\ell = \tilde{R} \Delta\sigma$. Die relative Expansionsrate ist

$$\frac{\frac{d}{dt} \Delta\ell}{\Delta\ell} = \frac{\frac{d}{dt}(\tilde{R} \Delta\sigma)}{\tilde{R} \Delta\sigma} = \frac{\frac{d}{dt}(\tilde{R})}{\tilde{R}} =: H \ .$$

Angenommen, H hängt von x ab. Dann verletzt $\partial_i H \neq 0$ die Isotropieannahme, so daß $H = H(t)$. Es folgt $\tilde{R} = W(x) \exp \int H \, dt$, aber der Faktor $W(x)$ kann in Redefinition von $d\sigma$ absorbiert werden.

Insgesamt ist gezeigt:

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - \tilde{R}^2(t)(d\sigma)^2 \ . \tag{24.2}$$

Die Materie ist mitbewegt in den Koordinaten x^i.

Wegen Homogenität muß die Krümmung für festes t räumlich konstant sein. Wir betrachten deshalb dreidimensionale Räume konstanter Krümmung.

Dreidimensionale Räume konstanter Krümmung sind homogene Räume, die mit Methoden der Gruppentheorie studiert werden. In ihnen spielen Killingvektoren eine wichtige Rolle.

Eine andere Konstruktion startet von 3-dimensionalen Hypersphären im $\mathbb{R}^4$, die wie folgt parametrisiert werden:

$$x^1 = r \sin\vartheta \cos\varphi \ , \quad x^2 = r \sin\vartheta \sin\varphi \ , \quad x^3 = r \cos\vartheta \ , \quad x^4 = \pm\sqrt{\tilde{R}^2 - r^2} \ .$$

Dann gilt

$$(d\ell)^2 := \sum_{i=1}^{4}(dx^i)^2 = (dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2 + r^2\sin^2 d\vartheta(d\varphi)^2 + \frac{(rdr)^2}{\tilde{R}^2 - r^2}$$
$$= \frac{(dr)^2}{1-\frac{r^2}{\tilde{R}^2}} + r^2\big((d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta\,(d\varphi)^2\big)\,, \qquad 0 < r < \tilde{R}\,. \tag{24.3}$$

Man rechnet $R = \frac{1}{\tilde{R}^2} > 0$ für die Skalarkrümmung nach.

Analog betrachtet man für negative Krümmung das Hyperboloid $\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2 - (x^4)^2 = -\tilde{R}^2$. Eine identische Rechnug zeigt

$$(d\ell)^2 = \frac{(dr)^2}{1+\frac{r^2}{\tilde{R}^2}} + r^2\big((d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta\,(d\varphi)^2\big)\,, \qquad r > 0\,. \tag{24.4}$$

Die Skalarkrümmung ist $R = -\frac{1}{\tilde{R}^2} < 0$.

Beide Fälle, und der flache Raum $\mathbb{R}^3$, können mit $\bar{r} := \frac{r}{\tilde{R}}$ zusammengefaßt werden zu

$$(d\ell)^2 = \tilde{R}^2\Big(\frac{(d\bar{r})^2}{1-k\bar{r}^2} + \bar{r}^2\big((d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta\,(d\varphi)^2\big)\Big)\,, \quad k \in \{-1,0,1\}\,. \tag{24.5}$$

Für $k = 1$ (positive Krümmung) wird ein geschlossener Raum mit Volumen

$$V = 2\int_0^{\tilde{R}} dr \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{1-\frac{r^2}{\tilde{R}^2}}} = 2\pi^2\tilde{R}^3$$

erhalten, während für $k = -1$ (negative Krümmung) $V = \infty$ gilt. In jedem Fall ist der Umfang eines Kreises mit Radius r gleich $2\pi r$. Die Berechnung des Abstands eines Punktes $p(r,\vartheta,\varphi)$ von 0 wird zweckmäßigerweise in Abstandskoordinaten $\bar{r} = \begin{cases} \sin\chi & \text{für } k=1, \\ \sinh\chi & \text{für } k=-1, \end{cases}$ durchgeführt. In diesen Koordinaten gilt

$$(d\ell)^2 = \tilde{R}^2\Big((d\chi)^2 + \sin[\mathrm{h}]^2\chi\big((d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta\,(d\varphi)^2\big)\Big)\,.$$

Damit ist $d(0,p) = \tilde{R}\chi = \begin{cases} \tilde{R}\arcsin\bar{r} & \text{für } k=1, \\ \tilde{R}\,\mathrm{arsinh}\,\bar{r} & \text{für } k=-1. \end{cases}$ Für $k = 1$ folgt $d(0,p) \geq \frac{U}{2\pi}$, während $d(0,p) \leq \frac{U}{2\pi}$ für $k = 1$.

Eingesetzt in (24.2) folgt die Robertson-Walker-Metrik (1936)

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - \tilde{R}^2(t)\Big(\frac{(d\bar{r})^2}{1-k\bar{r}^2} + \bar{r}^2\big((d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta\,(d\varphi)^2\big)\Big)\,, \tag{24.6}$$

mit $k \in \{-1,0,+1\}$. Diese ist die allgemeinste Metrik, die mit dem kosmologischen Prinzip verträglich ist.

Eine längliche Rechnung liefert folgende Komponenten des Einstein-Tensors:

$$G_{00} = 3\frac{\dot{\tilde{R}}^2 + kc^2}{\tilde{R}^2 c^2} , \qquad G_{0i} = 0 , \qquad G_{ij} = -\Big(2\frac{\ddot{\tilde{R}}}{\tilde{R}c^2} + \frac{\dot{\tilde{R}}^2 + kc^2}{\tilde{R}^2 c^2}\Big) g_{ij} . \tag{24.7}$$

Dieser ist in die Feldgleichungen $G_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$ einzusetzen. Wir wählen den Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit $T_{\mu\nu} = (\varrho + \frac{p}{c^2}) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$, wobei in mitbewegten Koordinaten $u^0 = c$ und $u^i = 0$ gilt. Es folgt:

$$3\frac{\dot{\tilde{R}}^2 + kc^2}{\tilde{R}^2} = \varkappa c^4 \varrho + \Lambda c^2 , \tag{I}$$

$$2\frac{\ddot{\tilde{R}}}{\tilde{R}} + \frac{\dot{\tilde{R}}^2 + kc^2}{\tilde{R}^2} = -\varkappa c^2 p + \Lambda c^2 . \tag{II}$$

Gleichung (I) heißt *Friedmann-Gleichung*. Zur Lösung dieser Gleichungen muß die Zustandsgleichung $\varrho(p)$ vorgegeben werden. Die Gleichungen können kombiniert werden zu

$$\frac{\ddot{\tilde{R}}}{\tilde{R}} = -\frac{\varkappa c^2}{2}\Big(p + \frac{1}{3}\varrho c^2\Big) + \frac{1}{3}\Lambda c^2 . \tag{II'}$$

Weiter nimmt die Kombination $\frac{d}{dt}((\mathrm{I}) \cdot \tilde{R}^2) - (\mathrm{II'}) \cdot 3\tilde{R}^2\dot{\tilde{R}}$ folgende Form an:

$$\frac{d}{dt}\Big(\Big(\varrho c^2 + \frac{\Lambda}{\varkappa}\Big)\tilde{R}^3\Big) + \Big(p - \frac{\Lambda}{\varkappa}\Big)\frac{d}{dt}\tilde{R}^3 = 0 . \tag{III}$$

Für $\Lambda = 0$ entspricht das der thermodynamischen Gleichung $dE + pdV = 0$. Hintergrund dieses "1. Hauptsatzes der Thermodynamik" ist die Tatsache, daß der Energie-Implus-Tensors kovariant-konstant ist. Zusammen mit der Zustandsgleichung ist (III) die einfachste Möglichkeit, $\tilde{R}(\varrho)$ zu berechnen. Dann kann (I) integriert werden zu $\tilde{R}(t)$.

Alternativ führt man den Skalenfaktor $a(t)$ ein durch $\tilde{R}(t) = a(t)R_0$ mit $R_0 := \tilde{R}(t_0)$. Dann folgt

$$3\frac{\dot{a}^2 + \frac{k}{R_0^2}}{a^2} = \varkappa c^2 \varrho + \Lambda , \tag{I"}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + \frac{k}{R_0^2}}{a^2} = -\varkappa p + \Lambda , \tag{II"}$$

$$\frac{d}{dt}(\varrho a^3) + p\frac{d}{dt}a^3 = 0 . \tag{III"}$$

25 Kosmologische Modelle

25.1 Einstein-Kosmos

Einstein hat 1917 neben dem kosmologischen Prinzip gefordert, daß das Universum statisch ist. Damit reduzieren sich (II,I) auf

$$\frac{k}{\tilde{R}^2} = -\varkappa p + \Lambda \;, \qquad \frac{3k}{\tilde{R}^2} = \varkappa \varrho c^2 + \Lambda \;. \tag{25.1}$$

Für Staub ($p = 0$) ist die Lösung

$$\frac{k}{\tilde{R}^2} = \Lambda \;, \qquad \varkappa \varrho c^2 = 2\Lambda \;, \tag{25.2}$$

somit $\Lambda > 0$. Genauer hat die Forderung, daß die Gleichungen eine statische Lösung für Staub zulassen, Einstein zur Einführung der kosmologischen Konstante bewogen. Weiter folgt $k = 1$, d.h. das Universum hat positive Krümmung und ist geschlossen. Die Dichte ergibt sich zu

$$\varrho = \frac{c^2}{4\pi G_N \tilde{R}^2} \;.$$

Eine genauere (spätere) Diskussion zeigt, daß dieses Weltmodell instabil ist, so daß die Stationarität nicht realisierbar ist.

25.2 Friedmann-Kosmos

Alexander Friedmann hat 1922,1924 nichtstatische Lösungen der Feldgleichungen für Staub $p = 0$ gefunden. Als Friedmann-Kosmos bezeichnet man die Lösung mit $\Lambda = 0$. Für $\Lambda = 0$ und $p = 0$ folgt aus (III)

$$\varrho \tilde{R}^3(t) = M = \text{const} \tag{25.3}$$

und dann für $k = 1$ eine Gesamtmasse $m = 2\pi^2 M$ des Universums. Gleichung (I) nimmt folgende Form an:

$$\frac{\dot{\tilde{R}} + kc^2}{\tilde{R}^2} = \frac{\varkappa M c^4}{3\tilde{R}^3} \;. \tag{25.4}$$

Trennung der Variablen führt auf auf die Friedmann-Gleichung

$$\dot{\tilde{R}}^2 - \frac{\varkappa M c^4}{3\tilde{R}} + kc^2 = 0 \;. \tag{25.5}$$

Im wesentlichen ist das die (radiale) Energiegleichung für das Newtonsche Gravitationsgesetz (mit Gesamtenergie proportional zu $-k$). Die Lösung der

Friedmann-Gleichung ist:

$$
\begin{aligned}
k = 1: \qquad & ct = \frac{R_0}{2}\arccos\Big(1 - \frac{2\tilde{R}}{R_0}\Big) - \sqrt{R_0\tilde{R} - \tilde{R}^2}\,, \\
k = -1: \qquad & ct = -\frac{R_0}{2}\mathrm{arcosh}\Big(1 + \frac{2\tilde{R}}{R_0}\Big) + \sqrt{R_0\tilde{R} + \tilde{R}^2}\,, \\
k = 0: \qquad & ct = \frac{2R_0}{3}\Big(\frac{\tilde{R}}{R_0}\Big)^{\frac{3}{2}}\,,
\end{aligned}
\tag{25.6}
$$

wobei $R_0 := \frac{\varkappa M c^2}{3}$.

- Die Lösung für $k = 1$ ist eine Zykloide, die ein oszillierendes Universum beschreibt. Für $k = -1$ und $k = 0$ gibt es eine permanente Expansion.
- Alle Lösungen haben eine Singulatität bei $t = 0$. Selbstverständlich kann die Materie dann nicht mehr durch Staub beschrieben werden. Jedoch zeigen Singularitätentheoreme von Penrose und Hawking, daß (unter Positivitätsannahmen an den Energie-Impuls-Tensor) ein gegenwärtig expandierendes Universum notwendigerweise eine Singularität in der Vergangenheit hatte.
- In der Nähe von $t = 0$ gilt näherungsweise $\tilde{R} \sim t^{\frac{2}{3}}$ unabhängig von k.

In einem mit Staub gefüllten Newtonschen radialsymmetrischen Universum ist die Kraft auf ein Teilchen im Abstand R gegeben durch $F = \frac{G_N m M'}{R^2} = -m\ddot{R}$, wobei M' die Masse innerhalb der Kugel vom Radius R ist. Radialsymmetrische Beiträge außerhalb der Kugelschale kompensieren sich exakt. Somit gilt der Energiesatz

$$\dot{R}^2 - \frac{2G_N M'}{R} = E = \text{const}\,.$$

Nach Redefinition $M' = \frac{4\pi}{3}M$ ist das exakt die Friedmann-Gleichung.

Berücksichtigt man Λ, so lautet der Energiesatz

$$\dot{R}^2 - \frac{2G_N M'}{R} - \frac{\Lambda c^2}{3}R^2 = E = \text{const}\,.$$

Das Maximum lokalisiert den instabilen Einstein-Kosmos.

25.3 Strahlungskosmos

Für ultrarelativistische Teilchen gilt, wie für Photonen, $p = \frac{1}{3}\varrho c^2$. Damit lautet Gleichung (III)

$$\frac{d}{dt}\big(\varrho c^2 \tilde{R}^3\big) + \frac{1}{3}\varrho c^2 \frac{d}{dt}\big(\tilde{R}^3\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho c^2 \tilde{R}^4 = A = \text{const}\,. \tag{25.7}$$

Eingesetzt in (I) folgt

$$\dot{\tilde{R}}^2 - \frac{\varkappa A}{3\tilde{R}^2} + kc^2 = 0 \tag{25.8}$$

mit Lösung

$$\tilde{R}^2 = 2\Big(\frac{\varkappa A}{3}\Big)^{\frac{1}{2}} ct - kc^2t^2 \tag{25.9}$$

Für $k = 1$ wird wieder ein oszillierendes Universum erhalten, für $k = 0$ und $k = 1$ eine permanente Expansion. Wie zuvor gibt es bei $t = 0$ eine Singularität. Für $t \approx 0$ gilt $\tilde{R} \sim \sqrt{t}$ unabhängig von k.

25.4 De Sitter-Kosmos

Es wird $\varrho = 0$ und $p = 0$ angenommen, aber $\Lambda \neq 0$. Dann nehmen Gleichungen (I,II) die folgende Form an:

$$\ddot{\tilde{R}} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 \tilde{R} = 0 \,, \qquad\qquad 3\frac{\dot{\tilde{R}}^2 + kc^2}{\tilde{R}^2} = \Lambda c^2 \,. \tag{25.10}$$

Die Lösung ist für $\Lambda > 0$

$$\begin{aligned} k &= +1 \qquad & \tilde{R} &= \Big(\frac{\Lambda}{3}\Big)^{-\frac{1}{2}} \cosh\Big(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\Big) \,, \\ k &= -1 \qquad & \tilde{R} &= \Big(\frac{\Lambda}{3}\Big)^{-\frac{1}{2}} \sinh\Big(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\Big) \,, \\ k &= 0 \qquad & \tilde{R} &= A \exp\Big(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\Big) \,. \end{aligned} \tag{25.11}$$

Für $\Lambda < 0$ ergibt sich

$$k = -1 \,, \qquad\qquad \tilde{R} = \Big(\frac{\Lambda}{3}\Big)^{-\frac{1}{2}} \cos\Big(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} ct\Big) \,. \tag{25.12}$$

Für $\Lambda = 0$ ergibt sich

$$k = 0 \,, \qquad\qquad \tilde{R} = \text{const} \qquad \text{(Minkowski-Raum)} \,. \tag{25.13}$$

Die Lösungen haben die Besonderheit, daß sogar die 4-dimensionale Krümmung konstant ist, d.h. die Symmetriegruppe ist größer als in den zuvor diskutierten kosmologischen Lösungen.

26 Beobachtende Kosmologie

26.1 Rotverschiebung

Eine Quelle mit radialem Parameter $\bar{r} = \bar{r}_1$ emittiere zu Zeiten t_1 und $t_1 + \Delta t_2$ Licht. Dieses werde zu Zeiten $t_0, t_0 + \Delta t_0 > t_1$ von einem Beobachter in $\bar{r} = 0$ empfangen. Da $ds^2 = 0$ für Licht, gilt $c\,dt = \tilde{R}(t)\frac{dr}{\sqrt{1-k\bar{r}}}$ und dann

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{r}_1} \frac{dr}{\sqrt{1-k\bar{r}}} &= \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{\tilde{R}(t)} = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{cdt}{\tilde{R}(t)} \\ \Rightarrow \qquad \frac{\Delta t_0}{\tilde{R}(t_0)} &= \frac{\Delta t_1}{\tilde{R}(t_1)} \end{aligned} \tag{26.1}$$

(gilt allgemein für $\Delta\chi_0 = \Delta\chi_1 q$). Mit Δt_1 als Zeit zwischen zwei Maxima einer Welle folgt für die Frequenzen ν_1 der gesendeten Welle und ν_0 der empfangenen Welle

$$\nu_0 \tilde{R}(t_0) = \nu_1 \tilde{R}(t_1)\ . \tag{26.2}$$

Expandiert das Universum, $\tilde{R}(t_1) < \tilde{R}(t_0)$ für $t_1 < t_0$, so ist $\nu_0 < \nu_1$, d.h. die Wellenlänge ist rotverschoben. Man definiert

$$z := \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0}\ , \qquad \text{somit} \qquad z + 1 = \frac{\tilde{R}(t_0)}{\tilde{R}(t_1)}\ . \tag{26.3}$$

Es ist üblich, kosmische Entfernungen als Rotverschiebung anzugeben, da diese im Gegensatz zur Differenz der Koordinatenzeiten modellunabhängig ist. Für kleine $t_0 - t_1$ gilt nach Taylor-Entwicklung

$$\tilde{R}(t) = \tilde{R}(t_0)\Big(1 + (t-t_0)H(t_0) - \frac{1}{2}q(t_0)(t-t_0)^2 H^2(t_0) + \dots\Big)\ . \tag{26.4}$$

Dabei heißt $H = \frac{\dot{\tilde{R}}(t)}{\tilde{R}(t)}$ die Hubble-Zahl, und $H(t_0) =: H_0$ heißt gegenwärtige Hubble-Konstante. Die Funktion $q(t) = -\frac{\ddot{\tilde{R}}(t)\tilde{R}(t)}{\tilde{R}^2(t)}$ heißt Verzögerungsparameter, mit $q_0 := q(t_0)$. In diesen Parametern ergibt sich

$$z = H_0(t_0 - t_1) + (1 + \frac{q_0}{2})H_0^2(t_0 - t_1)^2 + \dots \tag{26.5}$$

Die Zeitdifferenz $t_0 - t_1$ kann durch den gegenwärtigen Abstand

$$d = \tilde{R}(t_0)\int_0^{\bar{r}_1} \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1-k\bar{r}^2}} = \tilde{R}(t_0)\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{\tilde{R}(t)} = c(t_0 - t_1) + \frac{1}{2}H_0 c(t_0 - t_1)^2 \tag{26.6}$$

ausgedrückt werden. Es folgt

$$z = \frac{1}{c}H_0 d + \frac{1}{2}(q_0 + 1)\frac{1}{c^2}H_0^2 d^2 + \dots \tag{26.7}$$

Somit:

26.1 Hubblesches Gesetz, 1929. *Die Rotverschiebung z ist in erster Näherung proportional zur Entfernung.*

Abweichungen von der Linearität (zugänglich über Typ IA-Supernovae) erlauben Rückschlüsse auf q_0 und damit auf das realisierte kosmologische Modell. Experimentell bestimmt man (2015)

$$H_0 = (2.19 \pm 0.02) \cdot 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1} = (67.7 \pm 0.5)\,\frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}} \tag{26.8}$$

Über q_0 war lange Zeit wenig bekannt. 1998 gab es erste Hinweise, daß $q_0 < 0$ ist, entsprechend $\Lambda > 0$. Der inverse Hubble-Parameter $H_0^{-1} = 14.5 \cdot 10^9$ Jahre ist größer als das Alter $t_0 = 13.7 \cdot 10^9$ Jahre des Universums, $t \mapsto \tilde{R}(t)$ in den diskutierten Weltmodellen eine konkave Funktion ist.

Die Friedmannschen Gleichungen (I,II) lassen sich durch H_0, q_0 ausdrücken:

$$H^2 + \frac{kc^2}{\tilde{R}^2} = \frac{1}{3}\varkappa\varrho c^4 + \frac{1}{3}\Lambda c^2\,, \qquad 2qH^2 = \frac{1}{3}\varkappa c^2(\varrho c^2 + 3p) + \frac{1}{3}\Lambda c^2\,. \tag{26.9}$$

Für $p = 0$ folgt

$$H^2(2q-1) = \frac{kc^2}{\tilde{R}^2}\,, \qquad\qquad 2q = \frac{\varkappa c^4}{3H^2}\varrho + \frac{2\Lambda c^2}{3H^2}\,, \tag{26.10}$$

d.h. das Universum ist für $q_0 > \frac{1}{2}$ geschlossen, für $q = \frac{1}{2}$ flach und für $q < \frac{1}{2}$ hyperbolisch gekrümmt. Man definiert $\varrho_c := \frac{3H^2}{\varkappa c^4}$ als kritische Dichte. Mit dem gegenwärtigen Hubble-Parameter ergibt sich $\varrho_{c,0} = 9.5 \cdot 10^{-27}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Dann folgt aus $2q = \frac{\varrho}{\varrho_c} + \frac{2\Lambda c^2}{3H^2}$ für $\Lambda = 0$, daß für $\varrho > \varrho_c$ das Universum geschlossen ist ($k = 1$), für $\varrho = \varrho_c$ flach ist ($k = 1$), und für $\varrho < \varrho_c$ hyperbolisch ist ($k = -1$). Aus den Massen der Galaxien bestimmt man $\varrho_0 = 3 \cdot 10^{-28}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und $\varrho_\gamma = 4.5 \cdot 10^{-31}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ als Dichte der Strahlung. Beobachtungen zeigen $\Omega_M \approx 0.03$, also $\varrho < \varrho_c$. Dunkle Materie und $\Lambda > 0$ dürften diese Aussagen modifizieren.

Man schreibt (I,II) auch als

$$\frac{\dot{\tilde{R}}^2}{\tilde{R}^2} = \frac{1}{3}\varkappa c^4(\varrho + \varrho_\Lambda) - \frac{kc^2}{\tilde{R}^2}\,, \qquad\qquad \varrho_\Lambda := \frac{\Lambda}{\varkappa c^2} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G_N}\,, \tag{26.11}$$

$$2\frac{\ddot{\tilde{R}}}{\tilde{R}} = -\frac{1}{3}\varkappa c^2\big((\varrho + \varrho_\Lambda)c^2 + 3(p + p_\Lambda)\big)\,, \qquad p_\Lambda := -\frac{\Lambda}{\varkappa} = \varrho_\Lambda c^2\,.$$

In Dichteparametern

$$\Omega_M(t) = \frac{\varrho(t)}{\varrho_c(t)}\,, \qquad \Omega_\Lambda(t) = \frac{\varrho_\Lambda(t)}{\varrho_c(t)}\,, \qquad \Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda \tag{26.12}$$

nehmen die Gleichungen (26.11) (in Verallgemeinerung von (26.10) auf $p \neq 0$) folgende Form an:

$$H^2(\Omega - 1) = \frac{kc^2}{\tilde{R}^2} \,, \tag{26.13}$$
$$2q = \Omega + \frac{\varkappa c^2(p + p_\Lambda)}{H^2} \,.$$

Gegenwärtig ist in guter Näherung $p = 0$ und dann $2q = \Omega - 2\Omega_\Lambda = \Omega_M - 2\Omega_\Lambda$. Aus der Messung von Ω_M und q läßt sich Ω_Λ bestimmen.

26.2 Abstände

Der gegenwärtige Abstandsparameter ist $d = \tilde{R}\chi = \tilde{R} \cdot \begin{cases} \arcsin \bar{r} & \text{für } k = 1, \\ \operatorname{arsinh} \bar{r} & \text{für } k = -1, \\ \bar{r} & \text{für } k = 0. \end{cases}$

Alternativ führt man den Helligkeitsabstand ein. Sei L die absolute Helligkeit, d.h. der Energiefluß eines Objekts. Sei l die scheinbare Helligkeit, d.h. der beim Beobachter ankommende Energiefluß. Im flachen Universum gilt $L = l \cdot 4\pi d^2$. Entsprechend wird der Helligkeitsabstand eingeführt als

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \,. \tag{26.14}$$

In der Friedmann-Robertson-Walker-Metrik wird das Licht über eine Fläche $A = 4\pi(\tilde{R}\bar{r})^2 = 4\pi\tilde{R}^2 f^2(\frac{d}{\tilde{R}})$ verteilt, wobei $f(x)$ je nach Krümmung $\sin x, \sinh x, x$ ist. Für Licht war $\tilde{R}d\chi = cdt$ und daraus $\frac{\Delta t_1}{\tilde{R}(t_1)} = \frac{\Delta t_0}{\tilde{R}(t_0)}$.

Bei gegenwärtiger Expansion kommt es zu einer Ausdünnung von Photonen um den Faktor $\frac{\tilde{R}(t_1)}{\tilde{R}(t_0)}$. Hinzu kommt der Energieverlust duch die Rotverschiebung um den gleichen Faktor $\frac{\tilde{R}(t_1)}{\tilde{R}(t_0)}$. Insgesamt entsteht

$$l = \frac{L}{4\pi\tilde{R}_0^2 f^2(\frac{d}{\tilde{R}_0})} \cdot \frac{\tilde{R}^2(t_1)}{\tilde{R}_0^2}$$
$$\Rightarrow \qquad d_L = f^2(\frac{d}{\tilde{R}_0})\frac{\tilde{R}_0^2}{\tilde{R}^2(t_1)} = d(1+z)\frac{f(\chi_0)}{\chi_0} \,. \tag{26.15}$$

Dabei ist $\tilde{R}_0 = \tilde{R}(t_0)$ und $\chi_0 = \chi(t_0) = \frac{d}{\tilde{R}_0}$.

26.3 Kosmologische Horizonte

Wird Licht bei $r = 0$, d.h. $\chi = 0$ und $t = t_1$ emittiert, so erreicht es zum Zeitpunkt t_0 den Abstandsparameter

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{\tilde{R}(t)} \,. \tag{26.16}$$

Wir nehmen eine Anfangssingularität bei $t = 0$ an. Sterne sind sichtbar bis zu einer maximalen Entfernung

$$\chi_{\max} = \int_0^{t_0} \frac{c\,dt}{\tilde{R}(t)} , \quad d_{\max} = \tilde{R}_0 \cdot \chi_{\max} . \tag{26.17}$$

Im geschlossenen Universum gibt es einen "Teilchen-Horizont", falls $\chi_{\max} < \pi$. Im offenen Universum gibt es immer einen Teilchen-Horizont.

In der Nähe von $t = 0$ war $\tilde{R}(t) = At^\alpha$ mit $\alpha = \frac{1}{2}$ für Strahlung und $\alpha = \frac{2}{3}$ im frühen Friedmann-Kosmos. Dann folgt

$$\chi_{\max} = \frac{c}{A(1-\alpha)} t_0^{1-\alpha} \quad \Rightarrow d_{\max} = \frac{1}{(1-\alpha)} ct_0 . \tag{26.18}$$

Der Horizont wächst linear mit t_0.

27 Dunkle Materie

Folgende Anhaltspunkte für die Existenz dunkler Materie wurden gegeben:

- J.H. Oort (1932) und F. Zwicky (1933) haben die Bewegungsverhältnisse in Galaxien untersucht und Widersprüche zur Summe der in den Sternen gebundenen Masse gefunden.
- Überzeugendere Argumente ergaben sich aus den Rotationskurven der Galaxien (Vera Rubin, seit 1960).
- Heute lassen sich Massen über Gravitationslinseneffekte sehr genau bestimmen, z.B. im Bullet-Cluster (2006).
- Die kosmische Hintergrundstrahlung (CMB) zeigt Fluktuationen, die von den COBE, WMAP, Planck-Satelliten studiert wurden. Details dieser Flukuationen hängen von der Dichte der dunklen Materie ab.
- Schließlich kann die Strukturbildung im Universum simuliert werden, in Abhängigkeit von der Dichte der dunklen Materie.

Genauer bezeichnet man *nichtbaryonische Materie* als dunkle Materie. Es gibt durchaus braune Zwerge und Gas-Wolken, die zwar nicht strahlen, aber nicht als dunkel klassifiziert werden. Jüngste Beobachtungen ergeben folgende Dichten:

Dunkle Materie:	84%
Atome (=Baryonen):	16%
Photonen:	0.02%
Neutrinos:	0.01%

28 Frühes Universum

Strahlung dominiert für $\tilde{R} \ll \tilde{R}_0$ wegen $\frac{\varrho_{\text{Strahlung}}}{\varrho_{\text{Materie}}} \sim \frac{1}{\tilde{R}}$. Für Strahlung gilt das Stefan-Boltzmannsche Gesetz $\varrho_{\text{Strahlung}} \sim T^4$ und damit $T \sim \frac{1}{\tilde{R}}$. Einen heißen Urknall mit anschließender Abkühlung und Nachglimmen hat Gamov 1946 vorgeschlagen. Diese CMB-Strahlung der Temperatur von 2.7 K wurde 1964 von Penzias-Wilson entdeckt. 400 000 Jahre nach dem Urknall war das Universum soweit abgekühlt, daß neutrale Atome sich bilden konnten. Die Physik bis 10^{-13} Sekunden nach dem Urknall ist mit Teilchenbeschleunigern zugänglich.

Zeit, Skalenparameter, Temperatur und Dichte hängen nach den aktuell favorisierten Modellen wie folgt zusammen:

t	$\tilde{R}$ (m)	T (K)	ϱ (kg/m^3)		
10^{-4} s	$3 \cdot 10^{14}$	10^{12}	10^{19}	Baronen, Antibaryonen	
2 s	$3 \cdot 10^{16}$	10^{10}	10^{11}	Kernreaktionen, Nukleosynthese	Strahlung dominiert
2000 s	10^{18}	$3 \cdot 10^8$	10		
$4 \cdot 10^5$ a	10^{23}	3000	10^{-18}	Entkopplung der Strahlung	Materie dominiert
10^{10} a	10^{26}	2.7	10^{-27}	heute	

29 Das aufgeblasene Universum

Dennoch hat die Urknall-Theorie Probleme:

i) Horizont-Problem: Weshalb ist die Hintergrundstrahlung so gleichförmig?

ii) Flachheits-Problem: Weshalb gilt näherungsweise $\varrho \approx \varrho_c$?

iii) Magnetische Monopole werden nicht beobachtet.

Ein Lösungsvorschlag ist Aufblasung des Universums (inflation).

Zu i) Der gegenwärtige Teilchenhorizont ist $d_{\max} \approx 3.5ct$, im frühen Universum eher $d_{\max} \approx 3ct$. Betrachte mitbewegte Teilchen, die gegenwärtig am Horizont mit Abstand $d_{\max}(t_0)$ sind. Ihr früherer Abstand war $d(t) = d_{\max}(t_0)\frac{\tilde{R}(t)}{\tilde{R}(t_0)}$ oder $d(t) = d_{\max}(t)\frac{t_0}{t}\frac{\tilde{R}(t)}{\tilde{R}(t_0)}$. Für $t = T_E = 400\,000$ Jahre (Entkopplung der Strahlung) ergibt sich $d(t_E) = 50 d_{\max}(t_E)$. Nur ein kleiner Teil des heute sichtbaren Universum (im Winkelbereich von 1°) war in kausalem Zusammenhang zur Zeit der Entkopplung, im Gegensatz zur beobachteten Isotropie der Hintergrundstrahlung.

Zu ii) Es gilt $\Omega(t) - 1 = \left(\frac{\dot{\tilde{R}}_0}{\dot{\tilde{R}}(t)}\right)^2(\Omega_0 - 1)$. Verwendet man $\frac{\dot{\tilde{R}}_0}{\dot{\tilde{R}}(t)} \approx \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{2}}$, so folgt $\Omega(t) - 1 = \frac{t}{t_0}(\Omega_0 - 1)$. Da $\Omega_0 = \mathcal{O}(1)$, muß für kleine t mit großer Genauigkeit $\Omega(t) = 1$ gewesen sein. Zur Planck-Zeit $t = t_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}} = 5.4 \cdot 10^{-44}$ s folgt $\Omega - 1 \approx 10^{-60}$. Das erfordert eine extreme Feinabstimmung der Anfangsdaten.

Wäre $\Omega > 1$ bei $t = t_{\text{Planck}}$ nicht so genau 1, das Universum also geschlossen, so wäre auch das erreichbare maximale Alter extrem kurz, im Widerspruch zur Beobachtung.

A. Guth hat 1980/81 zur Lösung der Probleme vorgeschlagen, daß es in der Frühzeit des Universums eine Phase exponentieller Expansion gab. Genauer soll es eine de Sitter-Phase mit $\Lambda \gg 0$ gegeben haben. Nach (25.11) gilt für große Λ

$$\tilde{R}(t) \approx A \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\right) . \tag{29.1}$$

Innerhalb eines Intervalls $[t_a, t_f]$ soll $\frac{\tilde{R}_f}{\tilde{R}_a} > 10^{39}$ erreicht werden. Diese Annahme löst das Flachheits-Problem, denn

$$\Omega_f - 1 = \left(\frac{\dot{\tilde{R}}_a}{\dot{\tilde{R}}_a}\right)^2 (\Omega_a - 1) = \left(\frac{\tilde{R}_a}{\tilde{R}_a}\right)^2 (\Omega_a - 1) \approx 10^{-78} (\Omega_a - 1) . \tag{29.2}$$

Somit wird auch für generische Ω_a zum Ende der de Sitter-Phase $\Omega_f = 1$ mit extremer Genauigkeit erreicht. In der anschließenden Friedmann-Phase wird dann der heutige Wert $\Omega_0 - 1 \approx 10^{51}(\Omega_f - 1) \approx 10^{-27}(\Omega_a - 1)$ erreicht. Unser Universum sollte demnach flach sein.

Durch diese exponentielle Expansion wird eine sehr kleine, kausal zusammenhängende, Region des Universums auf ein Volumen aufgeblasen, welches nach Friedmann-Evolution das gesamte heute sichtbare Universum umfaßt. So erklärt sich die Isotropie der Hintergrund-Strahlung: Bei linearer Extrapolation von $\tilde{R}$ scheinbar nicht kausal zusammenhängende Gebiete waren es in Wirklichkeit. Auch werden ursprünglich vorhandene magnetische Monopole extrem verdünnt.

Als auslösender Mechanismus wurde von Guth eine spontane Symmetriebrechung vorgeschlagen. Das Universum befand sich zu $t = t_a$ in einem metastabilen Gleichgewicht mit $\Lambda > 0$. Innerhalb der de Sitter-Phase bewegte sich das Universum in sein stabiles Gleichgewicht mit $\Lambda = 0$.

In genaueren Modellen werden typischerweise folgende Parameter angenommen: $t_a \approx 10^{-35}\, s$, $t_f \approx 10^{-22}\, s$, $\frac{\tilde{R}_f}{\tilde{R}_a} \approx 10^{-50}$, $\tilde{R}_f \approx 1\,\text{cm}$.

30 Beschleunigte Expansion des Universums

Die Vorhersage $\Omega = 1$ ist im Widerspruch zur Beobachtung $\Omega_{\text{Baryonen}} = 0.05$ und $\Omega_{\text{Dunkle_Materie}} = 0.26$. Der fehlende Teil wird *dunkle Energie* genannt, für deren Existenz es folgenden Hinweis gibt. Eine Typ-IA Supernova hat eine genau definierte Helligkeitskurve, so daß aus der beobachteten Helligkeit auf die Entfernung geschlossen werden kann. 1998 wurde im Hubble Deep Field eine extrem weit entfernte Typ-1A Supernova gefunden. Die damit und aus weiteren Supernovae bestimmbare Kurve $\tilde{R}(t)$ führt zur Schlußfolgerung, daß die Expansion des

Universums gegenwärtig beschleunigt ist. Entsprechend ist auch gegenwärtig die kosmologische Konstante $\Lambda > 0$ mit Beitrag $\varrho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G_N}$ zur Dichte.

Eine weitere Stütze der Annahmen $\Lambda > 0$ sind Schwankungen der Hintergrundstrahlung, die erstmals durch den WMAP-Satellit und dann sehr viel genauer durch den Planck-Satellit (2013) bestimmt wurden. Diese Daten sind in großer Genauigkeit kompatibel mit $\Omega = 1$. Folgende individuellen Beiträge zu Ω wurden bestimmt:

$$\Omega_\Lambda = 0.691 \pm 0.006 \ , \quad \Omega_{\rm DM} = 0.259 \pm 0.006 \ , \quad \Omega_{\rm Baryonen} = 0.0486 \pm 0.001 \ . \tag{30.1}$$

In der Summe führt das auf $\Omega = 1.000 \pm 0.005$ und damit $k = 0$, wie von der aufgeblasenen Phase vorhergesagt. Weitere Parameter sind

$$\begin{aligned} H_0 &= (67.74 \pm 0.04) \frac{\rm km\ s^{-1}}{\rm Mpc} \ , \qquad t_0 = (13.8 \pm 0.02) \cdot 10^9 \, \text{Jahre} \ , \\ \varrho_{c,0} &= (8.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-27} \text{kg m}^{-3} \ . \end{aligned} \tag{30.2}$$

Auch Modelle zur Strukturbildung (ΛCDM = Kosmologisches Standardmodell, Λ+kalte dunkle Materie) stützen die obigen Aussagen. Für $k = 0$, $p = 0$, $\varrho \tilde{R}^3 = M = \text{const}$ nimmt Gleichung (I) folgende Form an:

$$(\dot{\tilde{R}})^2 = \frac{\varkappa c^4 M}{3} \frac{1}{\tilde{R}} + \frac{\Lambda c^2}{3} \tilde{R}^2 \ . \tag{30.3}$$

Die Lösung ist

$$\tilde{R}(t) = \Big(\frac{\varkappa c^2 M}{\Lambda} \Big)^{\frac{1}{3}} \Big(\sinh \Big(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} ct \Big) \Big)^{\frac{2}{3}} \ . \tag{30.4}$$