Wozu brauchen wir große Kardinalzahlen?

Ralf Schindler

Cantor (1873): $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. D.h., es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen; aber *wieviele* gibt es?

Kontinuumshypothese (CH): Für jedes überabzählbare $A \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Bijektion $f \colon A \to \mathbb{R}$.

Cantors Programm: Zeige CH durch "Induktion nach der Komplexität" von $A \subset \mathbb{R}$.

Cantor-Bendixson (1883): Jedes überabzählbare abgeschlossene $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Young (1906): Jede überabzählbare G_δ- oder F_σ-Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Bernstein (1908): Es existiert eine überabzählbare Menge reeller Zahlen, die keine perfekte Teilmenge enthält.

Der Beweis benutzt eine Wohlordung der Menge der reellen Zahlen. Eine solche Wohlordnung sollte nicht "definierbar" sein.

Aufgeklärte Version von Cantors Programm: Zeige, daß jede "definierbare" überabzählbare Menge reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge besitzt.

Was heißt hier "definierbar"?
Kandidaten:
Borel, analytisch, projektiv, in $L(\mathbb{R})$, $\mathrm{OD}_{\mathbb{R}}$.
Universell Bairesch = homogen Souslinsch.

Aleksandrov/Hausdorff (1916): Jede überabzählbare Borel-Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Suslin (ca. 1917): Jede überabzählbare analytische Menge $A \subset \mathbb{R}$ enthält eine perfekte Teilmenge.

Sierpinski (1925): Jedes koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ ist die Vereinigung von $\aleph_1$ vielen Borel-Mengen. Dasselbe gilt sogar für $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen $A \subset \mathbb{R}$.

Daraus folgt:

Wenn $A \subset \mathbb{R}$ koanalytisch ist, dann ist A entweder höchstens abzählbar oder hat $\aleph_1$ viele Elemente oder enthält eine perfekte Teilmenge.

Wie steht es nun mit komplizierteren Mengen reeller Zahlen?

Zermelo/Fraenkel/Skolem (ab 1904):
Standard-Axiomensystem der Mengenlehre, ZFC.

Kann in ZFC entschieden werden, ob jede überabzählbare projektive Menge reeller Zahlen eine perfekte Teilmenge besitzt?

Gödel (1939): In L gilt, daß es eine koanalytische Menge reeller Zahlen ohne perfekte Teilmenge gibt. Darüberhinaus gilt in L die Kontinuumshypothese.

Cohen (1963): Es gibt ein Modell von ZFC, in dem es ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH gibt.

Seien T, T' zwei Theorien. T und T' heißen *äquikonsistent* gdw. gilt: T ist dann und nur dann konsistent, wenn T' konsistent ist.

Die Beweise von Gödel und Cohen zeigen, daß die folgenden Theorien äquikonsistent sind:

(1) ZF

(2) ZFC

(3) ZFC + CH

(4) ZFC+ es gibt ein koanalytisches Gegenbeispiel zu CH

Wie steht es mit der Konsistenz von "ZFC+ jedes projektive $A \subset \mathbb{R}$ hat eine perfekte Teilmenge"?

Specker (1957): Wenn jedes überabzählbare koanalytische $A \subset \mathbb{R}$ eine perfekte Teilmenge besitzt, dann ist $\aleph_1$ eine unerreichbare Kardinalzahl in L.

Wenn κ unerreichbar ist, dann ist V_κ Modell von ZFC. Insbesondere beweist ZFC nicht die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl.

Das Studium der Frage, ob (definierbare) überabzählbare Mengen reeller Zahlen perfekte Teilmengen besitzen, führt also zu **großen Kardinalzahlen**.

Solovay (1970): Wenn ZFC+ “es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl” konsistent ist, dann gibt es ein Modell von ZFC, in dem jede überabzählbare Menge reeller Zahlen, die $\mathrm{OD}_{\mathbb{R}}$ ist, eine perfekte Teilmenge besitzt.

Damit sind die folgenden Aussagen äquikonsistent.

(1) ZFC+ “es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl.”

(2) ZFC+ “jede überabzählbare Menge reeller Zahlen in $\mathrm{OD}_{\mathbb{R}}$ besitzt eine perfekte Teilmenge.”

Gibt es vernünftige Axiome, die entscheiden, *welche* Klassen Γ definierbarer Mengen reeller Zahlen so sind, daß jedes überabzählbare $A \in \Gamma$ eine perfekte Teilmenge besitzt?

Derartige Axiome existieren: Große-Kardinalzahl-Axiome und Determiniertheitsannahmen. Diese sind wirklich zwei Seiten ein und derselben Medaille.

Diese Axiome entscheiden sogar *alle* natürlichen Fragen bzgl. der Struktur

$$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in).$$

Sei $A \subset [0, 1]$.

Gale/Stewart (1953): Betrachte das folgende Spiel, G(A):

$$\begin{array}{c|ccccccc} I & i_0 & & i_2 & & \cdots & & \\ \hline II & & i_1 & & i_3 & & \cdots \end{array}$$

$i_n \in \{0, 1\}$. D.h. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in [0, 1]$.

I gewinnt. gdw. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in A$, ansonsten gewinnt II.

G(A) (oder auch A selbst) heißt *determiniert* gdw. entweder I oder II eine Gewinnstratgie hat.

Martin (1970): Jede Borel-Menge ist determiniert.

Sei Γ eine hinreichend abgeschlossene Klasse von Mengen reeller Zahlen. Wenn dann A determiniert ist für jedes $A \in \Gamma$, dann gilt:

Davis (1964): Wenn $A \in \Gamma$ überabzählbar ist, dann hat A eine perfekte Teilmenge.

Mycielski-Swierczkowski (1964): Wenn $A \in \Gamma$, dann ist A Lebesgue-meßbar.

Mazur (193?): Wenn $A \in \Gamma$, dann hat A die Bairesche Eigenschaft.

Die Determiniertheit der Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ liefert den tieferen Grund dafür, warum $\exists^{\mathbb{R}} A$ entweder höchstens abzählbar ist oder eine perfekte Teilmenge enthält.

Projektive Determiniertheit ist die Aussage, daß jede projektive Menge reeller Zahlen determiniert ist.

Tatsache ist nun, daß Projektive Determiniertheit die Konsistenz sehr großer Kardinalzahlen impliziert.

Unerreichbar $<$ Mahlo $<$ schwach kompakt $<$ unbeschreibbar $<$ $0^{\#}$ $<$ meßbar $<$ meßbar mit hoher Mitchell-Ordnung $<$ stark $<$ Woodin $<$ nicht zahm $<$ nicht domestiziert $<$ Shelah $<$ superkompakt $<$ riesig

Martin-Steel-Woodin (198?):

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) Es gilt Projektive Determiniertheit.

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Maus mit n Woodinschen Kardinalzahlen.

Eine *Maus* ist eine hinreichend iterierbare Struktur der Form $J_\alpha[E]$, wobei E eine Folge von Extendern ist.

Größere große Kardinalzahlen werden benötigt, um die Determiniertheit von komplizierteren Mengen reeller Zahlen zu zeigen:

Woodin (198?): Wenn es eine klassengroße Maus mit unendlich vielen Woodinschen Kardinalzahlen $< \omega_1^V$ gibt, dann ist jede Menge A reeller Zahlen, die in $L(\mathbb{R})$ liegt, determiniert.

Neeman (199?): Angenommen, es gibt eine Woodinsche Kardinalzahl. Dann ist jedes $A \subset \mathbb{R}$, das universell Bairesch ist, determiniert.

Mit Hilfe einer Woodinschen Kardinalzahl ist also *jede* “definierbare” Menge reeller Zahlen determiniert.

ZFC$+$ Projektive Determiniertheit entscheidet alle natürlichen Fragen bzgl. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in)$. (Vgl. Peano-Arithmetik und $(\mathbb{N}, +, \cdot)$!)

Sollten wir Projektive Determiniertheit akzeptieren?

Steel-Woodin (199?): Projektive Determiniertheit folgt aus der Invarianz der Theorie von $L(\mathbb{R})$ unter Forcing-Erweiterungen.

Wenn eine "natürliche" Aussage die Konsistenz von Projektiver Determiniertheit impliziert, dann impliziert sie bereits Projektive Determiniertheit selbst.

Die aufgeklärte Version von Cantors Programm ist damit mit Hilfe von großen Kardinalzahlen durchgeführt.

Gibt es vernünftige Axiome, die CH entscheiden?

Gödels Programm: Entscheide CH mit Hilfe großer Kardinalzahlen.

Levy-Solovay (1964-7): Keine Theorie der Form ZFC $+ \exists\kappa\ \varphi(\kappa)$, wobei $\exists\kappa\ \varphi(\kappa)$ eines der gängigen Große-Kardinalzahl-Axiome ist, entscheidet CH.

Gödels Pragramm ist damit gescheitert. Es gibt höchstens *aufgeklärte Versionen von Gödels Programm*.

Große Kardinalzahlen werden in der modernen Mengenlehre zumeist dazu benutzt, um Modelle von ZFC zu konstruieren, in denen gewisse Aussagen gelten, die in ZFC alleine nicht entschieden werden können.

Foreman-Magidor-Shelah (1988): Wenn κ superkompakt ist, dann gibt es eine generische Erweiterung von V, in der Martin's Maximum gilt.

Martin's Maximum ist eine (maximale) Verstärkung von Martin's Axiom, welches wiederum eine Verallgemeinerung des Baireschen Kategoriensatzes ist: wenn die Boolesche Algebra $\mathbb{B}$ stationäre Mengen bewahrt und wenn $\{D_\xi : \xi < \omega_1\}$ eine Familie dichter Mengen ist, dann existiert ein Filter $G \subset \mathbb{B}$ mit $G \cap D_\xi \neq \emptyset$ für jedes $\xi < \omega_1$.

Die Theorie der inneren Modelle wird benutzt um nachzuweisen, daß große Kardinalzahlen für die Konstruktion gewisser Modelle auch **notwendig** sind.

Beispiele:

Woodin (?): Wenn Martin's Maximum gilt, dann gibt es Modelle von ZFC mit Woodinschen Kardinalzahlen.

Der Beweis zeigt auch, daß unter Martin's Maximum Projektive Determiniertheit gilt.

Jensen: $\square_{\aleph_\omega}$ ist die Aussage: es gibt eine Folge $(C_\alpha\colon \alpha < \aleph_{\omega+1})$, so daß für jede Limesordinalzahl $\alpha < \aleph_{\omega+1}$ gilt: C_α ist unbeschänkt in α, der Ordnungstyp von C_α ist $\leq \aleph_\omega$, und für jeden Limespunkt β von C_α gilt $C_\beta = C_\alpha \cap \beta$.

$\square_{\aleph_\omega}$ wird benutzt, um Aronszajn-Bäume der Höhe $\aleph_{\omega+1}$ zu konstruieren.

Woodin-Schimmerling-Steel-Zeman (2003): wenn $\square_{\aleph_\omega}$ falsch ist (und $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$), dann ist jede Menge reeller Zahlen $A \in L(\mathbb{R})$ determiniert.

Es ist eine empirische Tatsache, daß alle “natürlichen” Aussagen, die in der Mengenlehre studiert werden, äquikonsistent mit der einen oder anderen Annahme hinsichtlich der Existenz großer Kardinalzahlen ist.

Woodin (ca. 1990): Die folgenden Theorien sind äquikonsistent.

(1) ZFC+ jede Menge $A \in L(\mathbb{R})$ ist determiniert.

(2) ZFC+ das nichtstationäre Ideal auf ω_1 ist ω_2-saturiert.

(3) ZFC+ es gibt unendlich viele Woodinsche Kardinalzahlen.

Gitik (1991): Die Negation der Singulären Kardinalzahlhypothese ist äquikonsistent mit der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl κ mit Mitchell-Ordnung κ^{++}.

Dieses Resultat beruht auf Vorarbeiten von Magidor, Jensen, Dodd, Mitchell und anderen aus den 70er und 80er Jahren.

Sch-Steel (1997-2001): Die folgenden Theorien sind äquikonsistent.

(1) ZFC+ alle projektiven Mengen reeller Zahlen sind Lebesgue-meßbar und haben die Bairesche Eigenschaft + alle projektiven Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ können durch eine projektive Funktion uniformisiert werden.

(2) ZFC+ es gibt eine echt aufsteigende Folge $(\kappa_n : n \in \mathbb{N})$ mit Supremum λ, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $X \in \mathcal{P}(\lambda)$ eine elementare Einbettung $\pi: V \to M$ von V in ein inneres Modell M mit $X \in M$ existiert.

Große Kardinalzahlen werden auch zum Beweis von Transfer-Aussagen benutzt.

Beispiele:

Martin-Harrington (197?): Wenn jede analytische Menge determiniert ist, dann auch $A \setminus B$ für analytische Mengen A, B, etc.

Angenommen, jede analytische Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist determiniert. Dann gilt entweder für $\Gamma = \Sigma^1_3$ oder für $\Gamma = \Pi^1_3$, daß zu jedem $A \in \Gamma$, $A \in \mathbb{R}^2$, eine Uniformisierungsfunktion in Γ existiert.

Große Kardinalzahlen können auch dort hilfreich sein, wo sie nicht wirlich gebraucht werden.

R. Laver (1989): Entscheidbarkeit des Wortproblems für linksdistributive Systeme (i.e., Mengen S mit einer Verknüpfung $\circ$, die $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$ gehorcht).

Laver benutzte die Existenz einer nichttrivialen elementaren Einbettung $\pi \colon V_\kappa \to V_\kappa$.

P. Dehornoy zeigte 1992, daß Lavers Resultat auch ohne die Annahme der Existenz einer großen Kardinalzahl gültig ist.

Was sagt die heutige Mengenlehre zur Kontinuumshypothese (CH)?

Gödel hatte nachgewiesen, daß CH in seinem Modell L gilt.

CH gilt ebenfalls in allen konstruktiblen inneren Modellen der Form $L[E]$, die große Kardinalzahlen enthalten.

Alle diese Modelle haben jedoch eine “definierbare” Wohlordnung der Menge der reellen Zahlen.

Gödel hatte geglaubt, daß $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Foreman-Magidor-Shelah (1988): Wenn Martin's Maximum gilt, dann ist $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Woodin (1991): Wenn Martin's Maximum gilt, dann gibt es eine Surjektion $f\colon \mathbb{R} \to \aleph_2$, so daß die Menge $\{(x, y)\colon f(x) < f(y)\}$ projektiv ist.

Moore-Todorcevic-Velickovic (198? - 2003): Alle übrigen gängigen Forcing-Axiome implizieren ebenfalls $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Hugh Woodin: Große Kardinalzahlen müssen auf subtile Art benutzt werden, um die Frage nach der Größe des Kontinuums zu beantworten. (Aufgeklärte Version von Gödels Programm!)

H_ω wird von den Zahlentheoretikern studiert.

Für H_{ω_1} gibt es eine (praktisch gesehen) vollständige Thorie (ZFC$^-$+ Projektive Determiniertheit).

Das Objekt der Stunde ist H_{ω_2}; darin wird CH entschieden.

Die folgende Diskussion setzt die Existenz einer echten Klasse Woodinscher Kardinalzahlen voraus.

Gödels Vollständigkeitssatz: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow$ jedes (abzählbare) Modell von T ist auch Modell von φ.

Ω-Logik: $T \vdash_\Omega \varphi \Leftrightarrow_{\mathsf{def}}$ es gibt ein $A \subset \mathbb{R}$, A universell Bairesch, so daß jedes A-abgeschlossene abzählbare Modell von T auch Modell von φ ist.

Woodin (199?): Sei ψ so, daß $\mathsf{ZFC} + \psi$ Ω-konsistent ist. Dann ist $\mathsf{ZFC} + \psi$ *nicht* Ω-vollständig bzgl. Σ^2_3-Aussagen.

Korollar: Sei ψ eine Aussage, so daß $\mathsf{ZFC} + \psi$ Ω-konsistent und Ω-vollständig bzgl. H_{ω_2} ist. Dann ist die Kontinuumshypothese falsch.

Woodin (199?): Es gibt ein solches ψ: $\mathsf{AD}^{L(\mathbb{R})} +$ H_{ω_2} ist eine $\mathbb{P}_{\mathsf{max}}$-Erweiterung von $L(\mathbb{R})$. Dieses ψ impliziert $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

John Steels Kritik an Woodins Argumentation:

Woodins Theorem, wonach $\mathsf{ZFC} + \psi$ nicht Ω-vollständig bzgl. Σ^2_3-Aussagen ist, falls $\mathsf{ZFC} + \psi$ Ω-konsistent ist, besagt lediglich, daß die Ω-Vollständigkeit einer Theorie kein gutes Kriterium für die Wahl einer Theorie ist.

Ω^*-Logik: $T \vdash_{\Omega^*} \varphi \Leftrightarrow_{\mathsf{def}}$ für jedes α und für jede Boolesche Algebra $\mathbb{B}$, wenn $V_\alpha^{\mathbb{B}} \models T$, dann auch $V_\alpha^{\mathbb{B}} \models \varphi$.

$T \vdash_\Omega \varphi \Rightarrow T \vdash_{\Omega^*} \varphi$; Ω-Vollständigkeit ist (scheinbar?) stärker als Ω^*-Vollständigkeit.

Ω-Vermutung: $T \vdash_\Omega \varphi \Leftrightarrow T \vdash_{\Omega^*} \varphi$.

Woodin: Zeige die Ω-Vermutung!

Steel: Widerlege die Ω-Vermutung!

Die Ω^*-Vollständigkeit einer Theorie ist vielleicht ein gutes Kriterium für die Wahl einer Theorie. (ZFC ist Ω^*-vollständig bzgl. Aussagen über H_{ω_1}.)

Saharon Shelah: Cantor hat offensichtlich die falsche Frage gestellt, da CH unabhängig von ZFC ist.

Er hätte stattdessen z.B. folgendes fragen sollen:

Angenommen, $\aleph_\omega$ ist eine starke Limeskardinalzahl (d.h. $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Welchen Wert kann dann $2^{\aleph_\omega}$ haben?

S. Shelah: Wenn $\aleph_\omega$ eine starke Limeskardinalzahl ist, dann ist

$$2^{\aleph_\omega} < \min(\aleph_{(2^{\aleph_0})^+}, \aleph_{\omega_4}).$$

M. Gitik: Wenn $\aleph_\omega$ eine starke Limeskardinalzahl ist, dann kann $2^{\aleph_\omega}$ beliebig groß unterhalb von $\aleph_{\omega_1}$ sein.

R. Sch. (2002): Wenn $\aleph_\omega$ eine starke Limeskardinalzahl ist und wenn zugleich $2^{\aleph_\omega} > \aleph_{\omega_1}$, dann gilt Projektive Determiniertheit.

Oder Cantor hätte nach Resultaten wie den folgenden fragen sollen:

M. Gitik (2004): Wenn ZFC+ “es gibt eine superkompakte Kardinalzahl” konsistent ist, dann auch ZFC+ es gibt eine singuläre Kardinalzahl κ mit überabzählbarer Kofinalität, so daß gilt:

(*) die Menge der $\mu < \kappa$ mit $2^\mu = \mu^+$ ist sowohl stationär als auch kostationär.

Gitik-Sch-Shelah (2002): Wenn (*) gilt, dann gilt auch Projektive Determiniertheit.

Viele Resultate, die in der Mengenlehre gewonnen werden, haben das “metamathematische” Aussehen “wenn T konsistent ist, dann ist auch T' konsistent,” wobei typischerweise T oder T' die Existenz großer Kardinalzahlen behauptet.

Interessant werden diese Aussagen aber erst durch die teilweise sehr schwierigen *mathematischen* Methoden, die ihr Beweis erfordert.

Frage (Steel): Zeige: wenn $\square_{\aleph_\omega}$ falsch ist, dann gibt es ein inneres Modell mit einer superkompakten Kardinalzahl.

Prämie: Wenn Sie den Beweis im Jahre n finden und im Jahre $n+k$ zu Papier bringen, dann zahlt Ihnen Steel

$$5000 - 500k \text{ Dollar.}$$