# Äquivalenzrelationen und große Kardinalzahlen

Ralf Schindler

Universität Münster
Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung

## Definierbare Äquivalenzrelationen

Wir betrachten Äquivalenzrelationen auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

$E \subset \mathbb{R}^2$ ist eine *Äquivalenzrelation* gdw. für alle reellen Zahlen $x$, $y$, $z$ gilt:

- $xEx$
- $xEy \Rightarrow yEx$ und
- $xEy \wedge yEz \Rightarrow xEz$.

Wie kompliziert können derartige Äquivalenzrelationen sein? Z.B.: wie viele *Äquivalenzklassen* $[x]_E = \{y|yEx\}$ kann es geben?

Jede Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ besitzt mindestens eine und höchstens $2^{\aleph_0}$ (d.h. reell viele) Äquivalenzklassen.

Mit Hilfe des Auswahlaxioms konstruiert man sehr leicht für jedes $\kappa$ mit $1 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ eine Äquivalenzrelation mit genau $\kappa$ Äquivalenzklassen: Wähle $f\colon \kappa \to \mathbb{R}$ injektiv; setze $xEy$ gdw. $x = y$ oder $x$, $y \notin \operatorname{ran}(f \upharpoonright \{\alpha | \alpha > 0\})$.

Wir betrachten daher *definierbare* Äquivalenzrelationen.

Ein berühmtes Beispiel:

Die *Vitali-Äquivalenzrelation*: $xE_0y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$.

**Theorem (Pythagoräer, 500 v.u.Z.?).** $E_0$ besitzt mindestens zwei verschiedene Äquivalenzklassen.

$E_0$ besitzt in der Tat $2^{\aleph_0}$ Äquivalenzklassen.

Ähnliches gilt, wie wir gleich sehen werden, für viele definierbare Äquivalenzrelationen.

Georg Cantor hatte eine ähnliche Frage in Bezug auf bloße *Mengen* reeller Zahlen gestellt:

Wie groß können definierbare Mengen reeller Zahlen sein?

Die Antworten, die es auf Cantors Frage gibt, können mit Hilfe der **klassischen Deskriptiven Mengenlehre** gewonnen werden.

*Klassische Deskriptive Mengenlehre*:
Determiniertheit + große Kardinalzahlen.

Für die Frage nach der möglichen Zahl von Äquivalenzklassen definierbarer Äquivalenzrelationen ist die klassische Deskriptive Mengenlehre nicht ausreichend. Wir benötigen hier die **moderne Deskriptive Mengenlehre**, die die Methoden der Inneren Modelltheorie zu Hilfe nimmt.

*Moderne Deskriptive Mengenlehre*:
Determiniertheit + große Kardinalzahlen + Theorie der Inneren Modelle.

Die *Deskriptive Mengenlehre* studiert Eigenschaften *definierbarer* Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, wobei "definierbar" bedeutet:

- Borel

- analytisch/koanalytisch

- projektiv

- Souslin/universell Bairesch

Äquivalenzrelationen können als Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ in diesem Sinne definierbar sein.

Die Äquivalenzrelation $E$ heißt *Borel* gdw. $E$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ eine Borelmenge ist.

Empirische Beobachtung: Jede Borel-Äquivalenzrelation besitzt entweder höchstens abzählbar viele oder $2^{\aleph_0}$ Äquivalenzklassen.

Beispiele:

**Theorem (Feldman-Moore).** Sei $E$ eine Borel-Äquivalenzrelation, für die jedes $[x]_E$ höchstens abzählbar ist. Dann existiert eine abzählbare Polnische Gruppe $G$, die auf $\mathbb{R}$ agiert, so daß $E$ die durch $G$ auf $\mathbb{R}$ induzierte Orbit-Äquivalenzrelation ist.

Eine fundamentale Einsicht ist nun das nachfolgende allgemeine Dichotomie-Resultat:

**Theorem (Silver; 1980).** Sei $E$ eine Borel-Äquivalenzrelation. Dann gilt entweder:
• $E$ hat höchstens abzählbar viele Äquivalenzklassen, oder
• es gibt eine perfekte Menge $P \subset \mathbb{R}$ mit $[x]_E \neq [y]_E$ für alle $x$, $y \in P$, $x \neq y$.

$P \subset \mathbb{R}$ heißt *perfekt* gdw.

$P \neq \emptyset$,

$P$ ist abgeschlossen, und

$P$ besitzt keine isolierten Punkte.

Jede perfekte Menge reeller Zahlen ist gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.

**Theorem (Hausdorff und Aleksandrov; 1914).** Jede überabzählbare Borel-Menge enthält eine perfekte Teilmenge.

Nach obigem Satz von Silver gilt also: Sei $E$ eine Borel-Äquivalenzrelation. Dann besitzt $E$ entweder höchstens abzählbar viele oder $2^{\aleph_0}$ Äquivalenzklassen.
$E$ ist also entweder "sehr einfach" oder "sehr kompliziert".

Nach dem Satz von Hausdorff und Aleksandrov gilt: Sei $A \subset \mathbb{R}$ Borel. Dann ist $A$ entweder höchstens abzählbar oder besitzt $2^{\aleph_0}$ Elemente.

$A \subset \mathbb{R}^k$ heißt *analytisch* (oder $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$) gdw. $A$ Projektion einer Borelmenge $B \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ist, d.h. wenn

$$\vec{x} \in A \Leftrightarrow \exists y (\vec{x}, y) \in B.$$

$A$ ist analytisch gdw. $A = f(D)$ für eine Borelmenge $D$ und eine stetige Funktion $f$ ist.

$A \subset \mathbb{R}^k$ heißt *koanalytisch* (oder $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$) gdw. das Komplement von $A$ eine analytische Menge ist.

Borel $= \underset{\sim}{\Sigma}^1_1 \cap \underset{\sim}{\Pi}^1_1$, wobei Borel $\subsetneq \underset{\sim}{\Sigma}^1_1, \underset{\sim}{\Pi}^1_1$.

**Theorem (Silver; 1980).** Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine koanalytische Äquivalenzrelation. Dann gilt entweder:

- $E$ hat höchstens abzählbar viele Äquivalenzklassen, oder
- es gibt eine perfekte Menge von paarweise $E$-inäquivalenten reellen Zahlen.

**Theorem (Souslin; 1917).** Sei $A \subset \mathbb{R}$ analytisch. Dann ist $A$ entweder höchstens abzählbar oder enthält eine perfekte Teilmenge.

Wir werden später sehen, WARUM diese Aussagen richtig sind.

Wie steht es mit analytischen Äquivalenzrelationen bzw. mit koanalytischen Mengen?

Sei $xEy$ gdw. entweder: weder $x$ noch $y$ kodiert eine (abzählbare) Wohlordnung, oder: es existiert ein Isomorphismus zwischen den Ordnungen, die durch $x$ und $y$ kodiert werden.

• $E$ ist analytisch, und
• $E$ hat $\aleph_1$ Äquivalenzklassen.
• Jedes perfekte $P \subset \mathbb{R}$ enthält zwei $E$-äquivalente reelle Zahlen.

**Theorem (Burgess; 1978).** Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine analytische Äquivalenzrelation Dann gilt:
• $E$ hat höchstens $\aleph_1$ Äquivalenzklassen, oder
• es gibt eine perfekte Menge von paarweise $E$-inäquivalenten Zahlen.

Komplementär dazu:

**Theorem (Sierpinski; 1925).** Jede koanalytische Menge reeller Zahlen mit mehr als $\aleph_1$ Elementen besitzt eine perfekte Teilmenge.

Wir wollen endlich $E$ *dünn* nennen gdw. es kein perfektes $P \subset \mathbb{R}$ gibt, so daß $[x]_E \neq [y]_E$ für alle $x$, $y \in P$, $x \neq y$.

Die Verallgemeinerung des Theorems von Burgess lautet:

**Theorem (Harrington, Shelah; 1980).** ($V \prec_{\underset{\sim}{\Sigma}^1_3} V^{\mathbb{P}}$ für $\mathbb{P} =$ Cohen forcing.) Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine dünne $\underset{\sim}{\Pi}^1_2$ Äquivalenzrelation. Dann hat $E$ höchstens $\aleph_1$ Äquivalenzklassen.

Was ist das Muster?

$\boxed{\text{Projektive Mengen}}$

$A \subset \mathbb{R}^k$ heißt $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{n+1}$ gdw. $A$ Projektion einer $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$ Menge $B \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ist.

$A \subset \mathbb{R}^k$ heißt $\underset{\sim}{\Pi}^1_{n+1}$ gdw. das Komplement von $A$ $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{n+1}$ ist.

$A \subset \mathbb{R}^k$ heißt $\underset{\sim}{\Delta}^1_n$ gdw. $A$ sowohl $\underset{\sim}{\Sigma}^1_n$ als auch $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$ ist.

$$\ldots \underset{\sim}{\Delta}^1_n \subsetneq \underset{\sim}{\Sigma}^1_n, \underset{\sim}{\Pi}^1_n \subsetneq \underset{\sim}{\Delta}^1_{n+1} \ldots$$

*Projektiv* $= \bigcup_n \underset{\sim}{\Sigma}^1_n = \bigcup_n \underset{\sim}{\Pi}^1_n$.

Unsere Frage ist jetzt also:

Sei $E$ eine dünne projektive Äquivalenzrelation. Wieviele Äquivalenzklassen kann $E$ haben?

(Man kann zeigen, daß es projektive Äquivalenzrelationen mit $\aleph_2$ und mehr Äquivalenzklassen geben kann, siehe unten!)

Die Variante dieser Frage für Mengen reeller Zahlen lautet: gibt es definierbare Gegenbeispiele zur **Kontinuumshypothese**?

Wir müssen, wie wir sehen werden, starke Axiome heranziehen, um diese Fragen anzugehen!

## $\boxed{\kappa \text{ Souslinsche Mengen}}$

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt $\kappa$ Souslin gdw. es einen Baum auf $\mathbb{N} \times \kappa$ gibt, so daß $A = p[T]$, d.h.

$$x \in A \Leftrightarrow \exists f \in {}^{\mathbb{N}}\kappa \forall n (x \restriction n, f \restriction n) \in T.$$

$A \subset \mathbb{R}$ ist $\aleph_0$ Souslin gdw. $A$ analytisch ist.

Jede koanalytische, sogar jede $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist $\aleph_1$ Souslin.

(Jedes $A \subset \mathbb{R}$ ist trivial $2^{\aleph_0}$ Souslin.)

Die folgende Aussage erklärt die Resultate, die wir bislang gesehen haben.

Eine Äquivalenzrelation $E \subset \mathbb{R}^2$ heißt *ko-$\kappa$* Souslin gdw. $\mathbb{R}^2 \setminus E$ $\kappa$ Souslin ist.

**Theorem (Harringon, Shelah; 1980).** Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine dünne ko-$\kappa$ Souslin Äquivalenzrelation. Sei zusätzlich $E$ immer noch eine Äquivalenzrelation in $V^{\mathbb{P}}$, wobei $\mathbb{P} =$ Cohen forcing. Dann hat $E$ höchstens $\kappa$ Äquivalenzklassen.

Komplementär dazu:

**Theorem (Mansfield; 1970).** Sei $A \subset \mathbb{R}$ $\kappa$ Souslin. Wenn $A$ mehr als $\kappa$ Elemente besitzt, dann hat $A$ eine perfekte Teilmenge.

Um die optimalen Resultate zu erzielen, müssen wir zu gegebener definierbarer Äquivalenzrelation $E$ das kleineste $\kappa$ bestimmen, so daß $E$ $\kappa$ Souslin ist.

Wir benötigen hierfür die moderne Deskriptive Mengenlehre.

$\boxed{\text{ZFC}}$

ZFC (Zermelo-Fraenkel mit Auswahl) ist die Standardaxiomatisierung der Mengenlehre.

Axiome von Z: Extensionalität, Fundierung, Paarmenge, Vereinigungsmenge, Potenzmenge, Unendlichkeit, Aussonderung.

Axiome von ZF: Z + Ersetzung.

Axiome von ZFC: ZF + Auswahlaxiom.

## Projektive Determiniertheit

Sei $A \subset [0,1]$.

Gale/Stewart (1953): Betrachte das folgende Spiel, G($A$):

$$\begin{array}{c|ccccccc} I & i_0 & & i_2 & & \cdots & & \\ \hline II & & i_1 & & i_3 & & & \cdots \end{array}$$

$i_n \in \{0,1\}$. D.h. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in [0,1]$.

$I$ gewinnt. gdw. $\sum_{n<\infty} \frac{i_n}{2^{n+1}} \in A$, ansonsten gewinnt $II$.

G($A$) (oder auch $A$ selbst) heißt *determiniert* gdw. entweder $I$ oder $II$ eine Gewinnstratgie hat.

**Theorem (Martin; 1970).** Jede Borel-Menge ist determiniert.

Sei $\Gamma$ eine hinreichend abgeschlossene Klasse von Mengen reeller Zahlen. Wenn dann $A$ determiniert ist für jedes $A \in \Gamma$, dann gilt:

**Theorem (Mycielski-Swierczkowski; 1964).** Wenn $A \in \Gamma$, dann ist $A$ Lebesgue-meßbar.

**Theorem (Mazur; 193?).** Wenn $A \in \Gamma$, dann hat $A$ die Bairesche Eigenschaft.

**Theorem (Davis; 1964).** Wenn $A \in \Gamma$ überabzählbar ist, dann hat $A$ eine perfekte Teilmenge.

Die Determiniertheit der Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ liefert den tieferen Grund dafür, warum $\exists^{\mathbb{R}} A$ entweder höchstens abzählbar ist oder eine perfekte Teilmenge enthält.

**Projektive Determiniertheit (PD)** ist die Aussage, daß jede projektive Menge reeller Zahlen determiniert ist.

Aufgrund des Satzes von Davis gibt es also (unter PD) keine projektiven $A \subset \mathbb{R}$, deren Mächtigkeit zwischen der von $\mathbb{N}$ und der von $\mathbb{R}$ liegt. Es gibt also keine projektiven Gegenbeispiele zur Kontinuumshypothese.

Für Äquivalenzrelationen gilt analoges *nicht* !

D.h., auch unter PD kann es projektive Äquivalenzrelationen $E$ geben, so daß $\mathbb{R}/E$ von einer Mächtigkeit *zwischen* $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ ist.

Nicht zuletzt darum sind Äquivalenzrelationen interessanter als bloße Mengen reeller Zahlen.

Tatsache ist nun, daß Projektive Determiniertheit die Konsistenz sehr großer Kardinalzahlen impliziert. Umgekehrt beweisen große Kardinalzahlen PD.

## Große Kardinalzahlen

Eine Kardinalzahl $\kappa$ heißt *groß*, wenn die Existenz von $\kappa$ nicht in ZFC bewiesen werden kann.

Beispiele:

Unerreichbar $<$ Mahlo $<$ schwach kompakt $<$ unbeschreibbar $<$ $0^{\#}$ $<$ meßbar $<$ meßbar mit hoher Mitchell-Ordnung $<$ stark $<$ Woodin $<$ nicht zahm $<$ nicht domestiziert $<$ Shelah $<$ superkompakt $<$ riesig

**Theorem (Martin-Steel; 1985).** Die Existenz unendlich vieler Woodin-Kardinalzahlen impliziert PD.

$$\boxed{\Theta \text{ und } \underset{\sim}{\delta}^1_n}$$

Man definiert

$$\Theta = \sup\{\alpha | \exists f\colon \mathbb{R} \overset{\text{surj.}}{\longrightarrow} \alpha\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\Theta = (2^{\aleph_0})^+$.

Interessanter sind "lokale Versionen" von $\Theta$:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\underset{\sim}{\delta}^1_n = \sup\{\alpha | \exists f\colon \mathbb{R} \overset{\text{surj.}}{\longrightarrow} \alpha, f \in \underset{\sim}{\Delta}^1_n\}.$$

(Hierbei bedeutet $f \in \underset{\sim}{\Delta}^1_n$, daß der Graph von $f$ eine $\underset{\sim}{\Delta}^1_n$ Menge im $\mathbb{R}^2$ ist.)

Es gilt

$$\aleph_1 = \underset{\sim}{\delta}^1_1 < \underset{\sim}{\delta}^1_2 < \underset{\sim}{\delta}^1_3 < \ldots \Theta.$$

Keine der Zahlen $\underset{\sim}{\delta}^1_n$ für $n > 1$ muß eine Kardinalzahl sein.

Aus der Kontinuumhypothese folgt

$$\aleph_1 = \underset{\sim}{\delta}^1_1 < \underset{\sim}{\delta}^1_2 < \underset{\sim}{\delta}^1_3 < \ldots \Theta = \aleph_2.$$

Auf der anderen Seite hat Woodin 1990 bewiesen, daß $\underset{\sim}{\delta}^1_2 = \aleph_2$ aus natürlichen Axiomen folgt.

$\underset{\sim}{\delta}^1_n \geq \aleph_2$ für ein $n > 1$ liefert ein definierbares Gegenbeispiel zur Kontinuumshypothese *in einem anderen als dem Cantorschen Sinne*!

**Theorem (Kechris, Moschovakis; 1970).** Es gelte Projektive Determiniertheit.
Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ eine $\underset{\sim}{\Sigma}^1_n$ Menge. Dann gilt:
• Für ungerades $n$ ist $A$ $\kappa$ Souslin für ein $\kappa < \underset{\sim}{\delta}^1_n$, und
• für gerades $n$ ist $A$ $\underset{\sim}{\delta}^1_{n-1}$ Souslin.

Derartige "Periodizitäten" sind überall in der Deskriptiven Mengenlehre anzutreffen.

**Korollar.** Es gelte Projektive Determiniertheit. Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine dünne $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$ Äquivalenzrelation. Für ungerades $n$ hat dann $E$ weniger als $\underset{\sim}{\delta}^1_n$ Äquivalenzklassen. (I.e. $\mathrm{Card}(\mathbb{R}/E) < \underset{\sim}{\delta}^1_n$.) Für gerades $n$ hat dann $E$ höchstens $\underset{\sim}{\delta}^1_{n-1}$ Äquivalenzklassen. (I.e., $\mathrm{Card}(\mathbb{R}/E) \leq \underset{\sim}{\delta}^1_{n-1}$.)

Dieses Korollar, das mit Mitteln der klassischen Deskriptiven Mengenlehre gezeigt wird, erklärt lediglich fast alle Tatsachen bzgl. projektiver Äquivalenzrelationen, nicht aber die folgende.

**Theorem (Kechris; 1978).** Es gelte Projektive Determiniertheit.
Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine dünne $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ Äquivalenzrelation.
Dann hat $E$ höchstens $\aleph_1$ Äquivalenzklassen.

Greg Hjorth zeigte dies 1997 mit Hilfe iterierbarer Innerer Modelle mit Woodin-Kardinalzahlen. Dieser Ansatz führt zu optimalen Resultaten bzgl. dünner $\Sigma^1_n$ Äquivalenzrelationen für gerades $n$.

Der Satz von Kechris findet dann die folgende Verallgemeinerung.

**Theorem (Sch; 2005).** Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine dünne $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_n$ Äquivalenzrelation, wobei $n$ gerade ist. Dann ist $E$ auch $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_n$. Insbesondere hat $E$ höchstens $\underset{\sim}{\delta}{}^1_{n-1}$ Äquivalenzklassen.

Das Muster ist also wie folgt.

Komplexität der dünnen Äquivalenzrelation $E$

| $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_{2n+1}$ | $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_{2n+1}$ | $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_{2n+2}$ | $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_{2n+2}$ |
|---|---|---|---|
| $< \underset{\sim}{\delta}{}^1_{2n+1}$ | $\leq \underset{\sim}{\delta}{}^1_{2n+1}$ | $\leq \underset{\sim}{\delta}{}^1_{2n+1}$ | $\leq \underset{\sim}{\delta}{}^1_{2n+1}$ |

Kardinalität von $\mathbb{R}/E$

Diese Resultate sind optimal.

Sei $\varphi\colon U \to \underset{\sim}{\delta}^1_{2n+1}$ eine $\underset{\sim}{\Pi}^1_{2n+1}$ Norm mit assoziierter PWO $\leq$. Sei $x \leq^* y$ gdw. $y \notin U$ oder $(x \in U \wedge x \leq y)$. Dann ist $\leq^*$ $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$.

Sei $xEy$ gdw. $x \leq^* y \wedge y \leq^* x$. $E$ ist dann eine (dünne!) $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$ Äquivalenzrelation mit genau $\underset{\sim}{\delta}^1_{2n+1}$ Äquivalenzklassen.

Wir wollen nun einen Blick auf den Beweis des letzten Theorems werfen.

$\boxed{\text{Innere Modelle}}$

$L_0[X] = \emptyset$

$L_{\alpha+1}[X]$ = die Menge aller über $L_\alpha[X]$ mit Hilfe von Parametern aus $L_\alpha[X]$ definierbaren Teilmengen von $L_\alpha[X]$, wobei $X$ als Prädikat zur Verfügung steht

$L_\lambda[X] = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha[X]$ für Limeszahlen $\lambda$

$L[X] = \bigcup_\alpha L_\alpha[X]$

$L = L[\emptyset]$ ist Gödels "konstruktibles Universum".

**Theorem (Gödel; 1938).** $L$ ist Modell von ZFC und erfüllt die (Allgemeine) Kontinuumshypothese.

Dies liefert das Beispiel einer dünnen $\underset{\sim}{\Delta}^1_3$ Äquivalenzrelation, die unter Umständen $\aleph_2$ Äquivalenzklassen hat:

Setze $xEy$ gdw. $(\omega_1^V)^{+L[x]} = (\omega_1^V)^{L[y]}$.

Es gilt, daß $E$ $u_2 = \underset{\sim}{\delta}^1_2$ Äquivalenzklassen hat; $u_2 = \aleph_2$ ist nach Woodins Resultat (siehe oben) plausibel.

Die moderne Deskriptive Mengenlehre benötigt *iterierbare Innere Modelle* mit Woodin-Kardinalzahlen.

Diese sind von der Form $L[E]$, wobei $E$ eine Folge von *Externdern* (partiellen "Maßen") kodiert.

Bereits die Konstruktion dieser Modelle ist sehr schwierig.

$M_n =$ das minimale iterierbare Innere Modell mit $n$ Woodin-Zahlen.

$M_0 = L$.

## $\boxed{\text{Der Beweis}}$

Sei $E$ eine dünne $\Sigma^1_n$ Äquivalenzrelation, wobei $n$ gerade ist.

Startpunkt: $\mathcal{M} = M_{n-1}$, das kleinste iterierbare innere Modell mit $n-1$ Woodin-Kardinalzahlen. Sei $\delta$ die kleinste Woodin-Kardinalzahl von $\mathcal{M}$. Sei $\eta < \delta$ eine unerreichbare "lokale Woodin-Kardinalzahl" in $\mathcal{M}$.

Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir können $x$ generisch am Bild von $\eta$ über einem Iterat von $\mathcal{M}||\alpha$ machen (wobei $\alpha$ maximal ist mit $\mathcal{M}||\alpha \models \eta$ ist Woodin). Der springende Punkt ist: wenn $x'$ eine beliebige andere reelle Zahl ist, die ebenfalls generisch am Bild von $\eta$ über diesem Iterat ist (und einer gewissen Bedingung unterliegt), dann ist $x'Ex$. (Wir benutzen hier die Korrektheit von $\mathcal{M}$ und die Tatsache, daß $E$ dünn ist.)

Wir können dann $\neg(xEy)$ wie folgt formulieren.

Es gibt $x'Ex$ und $y'Ey$ und es gibt ein Iterat $\mathcal{M}^*$ von $\mathcal{M}$ vermöge einer Iteration von $\mathcal{M}||\alpha$, die auf $\mathcal{M}||\eta$ lebt, so daß $x' \oplus y'$ generisch über $\mathcal{M}$ am Bild von $\eta$ ist und $\mathcal{M}^*[x,y] \models \neg(x'Ey')$.

Aufgrund der Korrektheit von $\mathcal{M}$ und aufgrund der Tatsache, daß der relevante Teil der Iterationsstrategie von $\mathcal{M}$ eine $\Pi^1_{n-1}$ Menge ist, wird dann $\neg E$ eine $\Sigma^1_n(m)$ Menge, wobei $m$ das Modell $\mathcal{M}$ kodiert.

Resumee:

Wir haben die möglichen Größen von $\mathbb{R}/E$ für projektive $E$ mittels der Zahlen $\underset{\sim}{\delta}{}^1_n$ charakterisiert.

In ZFC läßt sich aber lediglich

$$\aleph_1 = \underset{\sim}{\delta}{}^1_1 < \underset{\sim}{\delta}{}^1_2 < \underset{\sim}{\delta}{}^1_3 < \cdots < 2^{\aleph_0}$$

beweisen.

$\underset{\sim}{\delta}{}^1_2 = \aleph_2$ ist möglich.

Die Frage, ob $\delta^1_n \geq \aleph_3$ für ein $n \geq 3$ möglich ist, ist eine der zentralen Fragen der gegenwärtigen Mengenlehre.

Testproblem:

Existiert eine dünne projektive Äquivalenzrelation $E$ auf $\mathbb{R}$, so daß (beweisbar unter vernünftigen Annahmen) $E$ genau $\aleph_3$ Äquivalenzklassen hat?