Universität Ulm
Abteilung Reine Mathematik

# Zur Darstellbarkeit des rigid analytischen Picard-Funktors

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat.
der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
der Universität Ulm

vorgelegt von
Urs Hartl
aus München
1999

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

Die Klassifizierung von Geradenbündeln in der Algebraischen Geometrie geschieht seit A. Grothendieck durch das Studium des Picard-Funktors. Nach Resultaten von Grothendieck [FGA, n° 232,Section 6] ist der Picard-Funktor für ein projektives Schema über einem Körper $K$ darstellbar durch ein $K$-Schema. Dies wurde von J.P. Murre [Mu] und F. Oort [Oo] auf eigentliche Schemata verallgemeinert.

Im Gegensatz zur algebraischen Situation ist für rigid analytische Räume wenig bekannt. Für eine rigid analytische Varietät $X_K$ über einem vollständigen, diskret bewerteten Körper $K$ ist die Darstellbarkeit des Picard-Funktors nur in folgenden Fällen bewiesen:

- $X_K$ ist algebraisch und eigentlich über $K$.
  Dies folgt mit dem GAGA-Prinzip aus den oben erwähnten Darstellungsätzen im algebraischen Fall.

- $X_K$ ist eine eigentliche, glatte, rigid analytische Gruppe.
  Dies wurde von W. Lütkebohmert [Lü 3] gezeigt.

Der allgemeine Fall für eigentliche, glatte, rigid analytische $K$-Varietäten erscheint schwierig und es ist zur Zeit vollkommen unklar, wie er zu lösen ist.

Wir wollen in dieser Arbeit die Darstellbarkeit der Eins-Komponente des Picard-Funktors auf der Kategorie der glatten, rigid analytischen Varietäten unter der zusätzlichen Voraussetzung zeigen, daß $X_K$ ein strikt semistabiles, formelles Modell besitzt. Es besteht die Vermutung, daß jede glatte, quasikompakte, rigid analytische Varietät nach einer endlichen Körpererweiterung ein strikt semistabiles Modell besitzt. Falls diese Vermutung richtig ist, so folgt die Darstellbarkeit für alle eigentlichen, glatten, rigid analytischen $K$-Varietäten. Doch auch zum Beweis der Vermutung gibt es derzeit keine konkreten Ansätze. Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist

**Satz 4.5** (Seite 37)
*Sei $X_K$ eine eigentliche, glatte, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über $K$, welche ein strikt semistabiles, formelles Modell $X$ über $R$ besitzt, sowie $x_K \in X_K(K)$.*

*Dann ist der Picard-Funktor $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ nach einer endlichen, separablen Körpererweiterung darstellbar durch eine glatte, rigid analytische Gruppe $P_K$. Diese ist eine Erweiterung*

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}^r_{m,K} \longrightarrow P_K \longrightarrow Q_K \longrightarrow 1$$

*einer eigentlichen, glatten, rigid analytischen Gruppe $Q_K$ durch einen affinen Torus $\mathbb{G}^r_{m,K}$.*

Wir beweisen den Satz in dieser Arbeit unter der Voraussetzung $\operatorname{char} K = 0$. Diese wird jedoch nur an einer Stelle benötigt (siehe unten). Der Beweis geht auf einen Beitrag von W. Lütkebohmert ([Lü 4]) zurück. Er folgt den dort dargelegten Ideen.

Für eigentliche, glatte, algebraische Schemata über $K$ ist die Eins-Komponente der Picard-Varietät eigentlich über $K$. Das gleiche gilt für eigentliche, glatte, rigid analytische Gruppen über $K$. Im allgemeinen, rigid analytischen Fall muß dies jedoch nicht so sein. Das heißt, es ist möglich, daß der Rang $r$ des Torus echt positiv ist. Rigid analytische Hopf-Varietäten sind dafür ein Beispiel. Diese sind Analoga der Hopf-Varietäten über den komplexen Zahlen, die ebenfalls eine nicht-eigentliche Picard-Varietät besitzen. Wir erläutern dieses Beispiel in Abschnitt 5.4 näher.

Wir wollen die Konstruktion der Picard-Varietät am Beispiel der Tate-Kurve veranschaulichen. Die Tate-Kurve ist der Quotient $X_K = \mathbb{G}_{m,K}/q^{\mathbb{Z}}$ für ein $q \in K^\times$ mit $|q| < 1$. Sie ist zusammenhängend, eigentlich und glatt über $K$ und besitzt ein strikt semistabiles, formelles Modell $X$ über dem Bewertungsring $R$ von $K$. Die spezielle Faser $X_0$ dieses Modells ist eine geschlossene Kette projektiver Geraden. Da $X_K$ eine elliptische Kurve ist, wird $\operatorname{Pic}^0_{X_K/K}$ dargestellt durch die Jacobi-Varietät $J_K$ von $X_K$. Diese ist isomorph zu $X_K$ und besitzt somit ebenfalls ein strikt semistabiles Modell $J$. Sei $\overline{J}$ die Eins-Komponente des formal glatten Teils von $J$. Dann ist

$$\overline{J} \;=\; \overline{\mathbb{G}}_{m,R} \;=\; \varinjlim_n \mathbb{G}_{m,R_n}\,,$$

wobei der Index $n$ von $R_n$ die $n$-te Stufe $R/(\pi^{n+1})$ bezeichnet. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{G}_{m,R_n}$ stellt den Funktor $\operatorname{Pic}^0_{X_n/R_n}$ dar. Die rigide Faser $\overline{J}_K$ von $\overline{J}$ stellt den Funktor $\operatorname{Pic}^0_{X_K/K}$ auf der Kategorie der glatten, zusammenhängenden, rigid analytischen Varietäten $V_K$ mit glattem, formellem Modell $V$ dar. Dies liegt daran, daß jeder Morphismus $V_K \longrightarrow J_K$ durch $\overline{J}_K$ faktorisiert. Nun ist $\overline{J}_K = \overline{\mathbb{G}}_{m,K} := \operatorname{Sp} K\langle\zeta,\zeta^{-1}\rangle$ und läßt sich somit in die multiplikative Gruppe einbetten,

$$\overline{J}_K \;=\; \overline{\mathbb{G}}_{m,K} \;\hookrightarrow\; \mathbb{G}_{m,K} \;=:\; \widehat{J}_K\,.$$

Wir interpretieren die Gruppe $\widehat{J}_K$ folgendermaßen. Es gilt $\mathrm{H}^1(X_K,\mathbb{Z}) = \mathrm{H}^1(X_0,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\cdot b$. Daraus erhalten wir ein Geradenbündel $(\zeta^b)$ auf $X_K \times_K \mathbb{G}_{m,K}$, welches einen Morphismus $\mathbb{G}_{m,K} \longrightarrow J_K$ liefert. In $\widehat{J}_K$ gibt es ein Gitter

$$M \;:=\; \{\zeta \in \widehat{J}_K :\; (\zeta^b) \text{ ist trivial}\} \;=\; q^{\mathbb{Z}}\,.$$

Es läßt sich zeigen, daß der Quotient $\widehat{J}_K/M = J_K$ ist. Also ist $\widehat{J}_K$ die universelle Überlagerung von $J_K$.

Im allgemeinen Fall konstruieren wir die Picard-Varietät auf analoge Weise. Die $n$-te Stufe $X_n := X \times_R R_n$ des strikt semistabilen, formellen Modells $X$ von $X_K$ ist eigentlich und flach über $R_n$ mit geometrisch reduzierter, spezieller Faser. Nach dem Darstellungssatz von M. Artin [Ar 1] ist $\operatorname{Pic}^0_{X_n/R_n}$ deshalb darstellbar durch ein Gruppenschema $P'_n$. Auf $X_n \times_{R_n} P'_n$ existiert das Poincaré-Bündel $\mathcal{P}'_n$. Die $P'_n$ bilden ein induktives System und wir erhalten ein formelles $R$-Gruppenschema $P' := \varinjlim P'_n$, topologisch von endlichem Typ über $R$, sowie ein Geradenbündel $\mathcal{P}' := \varprojlim \mathcal{P}'_n$ auf $X \times_R P'$.

$P'$ ist nicht notwendigerweise flach über $R$. Deshalb sei $\overline{P'}$ das größte zusammenhängende, flache Untergruppenschema von $P'$. Es ist ein zulässiges, formelles $R$-Schema. Um $\overline{P'}$ zu glätten, betrachten wir $\overline{P}_{K} := \left(\overline{P'}_{\mathrm{rig}}\right)_{\mathrm{red}}$. In $\operatorname{char} K = 0$ ist $\overline{P}_{K}$ geometrisch reduziert. Dies ist die einzige Stelle im Beweis, an der wir diese Voraussetzung benutzen. Nach dem Theorem über die reduzierte Faser ([FRG, IV, Theorem 2.1]) erhalten wir ein formelles Modell $\overline{P}$ mit geometrisch reduzierter, spezieller Faser $\overline{P}_0$. Der Rücktransport $\overline{\mathcal{P}}$ des Geradenbündels $\mathcal{P}'$ vermöge $\overline{P} \longrightarrow \overline{P'} \hookrightarrow P'$ ist das Poincaré-Bündel auf $X \times_R \overline{P}$. Die Gruppe $\overline{P}_{K}$ stellt den Funktor $\operatorname{Pic}^0_{X_K/K}$ auf der Kategorie der glatten, zusammenhängenden, rigid analytischen Varietäten mit glattem, formellem Modell dar.

Die spezielle Faser $\overline{P}_0$ von $\overline{P}$ ist semiabelsch, das heißt eine Erweiterung

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}^r_{m,R_0} \longrightarrow \overline{P}_0 \longrightarrow B_0 \longrightarrow 1$$

einer abelschen Varietät $B_0$ durch einen Torus $\mathbb{G}^r_{m,R_0}$. Dies hat folgenden Grund. Da $X$ strikt semistabil ist, gilt $\operatorname{Pic}(X_0) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(X_0 \times_{R_0} \mathbb{G}_{a,R_0})$. Also sind alle Geradenbündel auf $X_0 \times_{R_0} \mathbb{G}_{a,R_0}$, die trivial entlang $X_0 \times \{0\}$ sind, global trivial.

Der Torus dehnt sich zu einem formellen Torus $\overline{\mathbb{G}}^r_{m,R} \hookrightarrow \overline{P}$ aus. Die rigide Faser $\overline{\mathbb{G}}^r_{m,K}$ läßt sich in den affinen Torus $\mathbb{G}^r_{m,K}$ einbetten und wir erhalten

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \overline{\mathbb{G}}^r_{m,K} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \overline{P}_{K} \arrow[r] \arrow[d, hook] & B_{\mathrm{rig}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{G}^r_{m,K} \arrow[r] & \widehat{P}_{K} \arrow[r] & B_{\mathrm{rig}} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

als das push-forward bezüglich dieser Einbettung. Dabei ist $B_{\mathrm{rig}}$ eine eigentliche, glatte rigid analytische Gruppe.

Wir zeigen, daß unter den Voraussetzungen von Satz 4.5 für die Kohomologiegruppe gilt $\mathrm{H}^1(X_K, \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{Z})$. Diese ist für den Torusanteil verantwortlich. Sei $b_1, \dots, b_r$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathrm{H}^1(X_K, \mathbb{Z})$ mit trivialisierender Überdeckung $X^\nu_K$. Dann kommt das Geradenbündel $\overline{\mathcal{P}}_K|_{X^\nu_K \times_K \overline{P}_K}$ dank seiner kubischen Struktur von einem Geradenbündel $\mathcal{B}^\nu_K$ auf $X^\nu_K \times_K B_{\mathrm{rig}}$. Die Verklebung dieser Geradenbündel erfolgt mittels $(\zeta_1^{b_1} \otimes \ldots \otimes \zeta_r^{b_r})$ für Koordinaten $\zeta_\rho$ des Torus. Wir können dieses Verklebungsdatum benutzen, um die Rücktransporte der $\mathcal{B}^\nu_K$ zu einem Geradenbündel $\widehat{\mathcal{P}}_K$ auf $X_K \times_K \widehat{P}_K$ zu verkleben. In $\widehat{P}_K$ betrachten wir das $K$-rationale Gitter

$$M \;:=\; \{\, m \in \widehat{P}_K : \; (\mathrm{id}_{X_K} \times m)^* \, \widehat{\mathcal{P}}_K \text{ ist trivial} \,\}\,.$$

Da $M \cap \overline{P}_K = \{1\}$ ist, ist $M$ diskret. Also können wir $M$ ausdividieren und erhalten

$$P_K \;:=\; \widehat{P}_K / M\,.$$

Das Geradenbündel $\widehat{\mathcal{P}}_K$ besitzt eine $M$-Linearisierung und steigt somit zu einem Geradenbündel $\mathcal{P}_K$ auf $X_K \times_K P_K$ ab. Die glatte, rigid analytische Varietät $P_K$ stellt den Picard-Funktor $\operatorname{Pic}^0_{X_K/K}$ auf der Kategorie der glatten, zusammenhängenden $K$-Varietäten dar. Um dies zu zeigen, ist es nötig, Geradenbündel von der rigiden Faser auf das formelle Modell auszudehnen. Dies ist im allgemeinen nicht möglich. In der speziellen Situation des Produktes zweier strikt semistabiler, formeller Modelle gelingt es uns jedoch lokal, indem wir eine geeignete Desingularisierung des Produktes angeben. Wir können außerdem das Hindernis für die globale Ausdehnung kontrollieren. Es wird durch den multiplikativen Anteil des Geradenbündels gegeben. Dieser ist verantwortlich für den Torusanteil $\mathbb{G}^r_{m,K}$.

Die Aussage über die Struktur von $P_K$ zeigen wir folgendermaßen. Wir zerlegen den Torus $\mathbb{G}_{m,K}^r$ gemäß dem Gitter $M$ in ein Produkt $\mathbb{G}_{m,K}^{r'} \times_K \mathbb{G}_{m,K}^{r''}$ von Tori mit $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, M = r''$ und $r' + r'' = r$. Die Projektion $\mathbb{G}_{m,K}^r \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}^{r''}$ liefert dann einen Morphismus

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_{m,K}^r & \longrightarrow & \widehat{P}_K & \longrightarrow & B_{\mathrm{rig}} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_{m,K}^{r''} & \longrightarrow & \widehat{Q}_K & \longrightarrow & B_{\mathrm{rig}} & \longrightarrow & 1\,, \end{array}$$

welcher $M \xrightarrow{\sim} N \subseteq \widehat{Q}_K$ abbildet. Die Untergruppe $N$ ist ein Gitter von vollem Rang in $\widehat{Q}_K$ und wir erhalten $P_K = \widehat{P}_K/M$ als Erweiterung

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}^{r'} \longrightarrow P_K \longrightarrow Q_K \longrightarrow 1$$

einer eigentlichen, glatten, rigid analytischen Gruppe $Q_K := \widehat{Q}_K/N$ durch einen affinen Torus $\mathbb{G}_{m,K}^{r'}$.

Wir führen die hier skizzierte Konstruktion in Kapitel 5 durch. In den vorangehenden Kapiteln stellen wir die benötigten Sätze über formelle und rigide Räume (Kapitel 2), strikt semistabile Modelle (Kapitel 3) und über Geradenbündel (Kapitel 4) zusammen.

Einige offene Fragen schließen sich an.

1. Läßt sich der Beweis auf $\mathrm{char}\, K \neq 0$ verallgemeinern?
   Dazu müßte es möglich sein, den Glättungsprozeß, der ausgehend von $\overline{P'}$ die geometrisch reduzierte $K$-Varietät $\overline{P}_K$ liefert zu verallgemeinern. Dies ist die einzige Stelle, an der die Voraussetzung $\mathrm{char}\, K = 0$ eingeht.

2. Wann ist $P_K$ eigentlich über $K$?
   Dies ist beispielsweise so, falls $X_K$ eine algebraische Varietät oder eine rigid analytische Gruppe ist. Um die Frage allgemein zu klären, müßte es gelingen, die tieferen Gründe im ersten Fall zu verstehen.

3. Was läßt sich über die Néron-Severi-Gruppe von $X_K$ über $K$ sagen?
   Es besteht die Vermutung, daß sie ein Unterquotient der Néron-Severi-Gruppe der speziellen Faser des strikt semistabilen, formellen Modells von $X_K$ und damit endlich erzeugt ist. Die in Abschnitt 4.4 bereitgestellten Methoden sollten ermöglichen, dies zu bestätigen.

4. Was läßt sich im allgemeinen für eigentliche, glatte, rigid analytische Varietäten sagen?
   Stimmt die Vermutung, daß jede solche Varietät nach einer endlichen Körpererweiterung ein strikt semistabiles, formelles Modell besitzt?
   Wir diskutieren diese Frage im Anschluß an Vermutung 3.7.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor W. Lütkebohmert für die hervorragende Betreuung danken. Mein Dank gilt ferner der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung[1] dieser Arbeit.

[1] DFG-Projekt Lu 224/4-1

# Kapitel 2

# Grundlagen

## 2.1 Formelle und rigide Geometrie

In diesem Kapitel sollen zunächst einige Grundlagen über rigide Räume und formelle Schemata zusammengetragen werden. Als generelle Referenz hierzu verwenden wir [FRG] und [BGR].

**Definition 2.1.**
Sei $R$ ein vollständiger, diskreter Bewertungsring mit Uniformisierender $\pi$, Quotientenkörper $K$ und Restklassenkörper $k = R/(\pi)$, sowie $R_n := R/(\pi^{n+1})$.

a) Die *$R$-Algebra der strikt konvergenten Potenzreihen* ist definiert als

$$R\langle\xi_1,\dots,\xi_r\rangle \;:=\; \Big\{ \sum_{\nu_i \geq 0} a_{\nu_1,\dots,\nu_r}\, \xi_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot\xi_r^{\nu_r} \,:\, \lim_{|\underline{\nu}|\to\infty} |a_{\nu_1,\dots,\nu_r}| \;=\; 0 \Big\}\,.$$

Sie ist die $\pi$-adische Komplettierung des Polynomringes in $r$ Unbestimmten über $R$.

b) Eine $R$-Algebra $A$ heißt *topologisch von endlicher Darstellung*, falls sie isomorph zu einem Quotienten $R\langle\xi_1,\dots,\xi_r\rangle/\mathfrak{a}$ für ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R\langle\xi_1,\dots,\xi_r\rangle$ ist. Sie heißt *zulässig*, falls sie topologisch von endlicher Darstellung und flach über $R$ ist.

*Bemerkung* 2.1.1.
Da $R$ noethersch ist, ist auch $R\langle\xi_1,\dots,\xi_r\rangle$ noethersch nach [Bo, Corollary III.2.10.5].

Die formellen Spektra $\operatorname{Spf} A$ zulässiger $R$-Algebren $A$ bilden die lokalen Bausteine der formellen Schemata, die wir betrachten wollen. Für den generellen Begriff des formellen Schemas verweisen wir auf [EGA, I, Section 10].

**Definition 2.2.**
Ein formelles $R$-Schema heißt *zulässig*, falls es lokal isomorph zu affinen, formellen Schemata $\operatorname{Spf} A$ für zulässige $R$-Algebren $A$ ist.

Für ein zulässiges, formelles $R$-Schema $X = (X, \mathcal{O}_X)$ definieren wir die *$n$-te Stufe von $X$*, oder die *$n$-te infinitesimale Umgebung in $X$* als das $R_n$-Schema

$$X_n \;:=\; (X, \mathcal{O}_{X_n}) \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{O}_{X_n} \;:=\; \mathcal{O}_X/\pi^{n+1}\mathcal{O}_X\,.$$

Das $k$-Schema $X_0$ heißt die *spezielle Faser* von $X$.

Bevor wir den Zusammenhang von formeller und rigider Geometrie beschreiben können, wollen wir erklären, was rigid analytische Varietäten sind. Sie spielen die Rolle der generischen Fasern von zulässigen, formellen $R$-Schemata. Ihre Definition geht auf J. Tate [Ta] zurück.

**Definition 2.3.**
Sei $R$ ein vollständiger, diskreter Bewertungsring mit Uniformisierender $\pi$, Quotientenkörper $K$ und Restklassenkörper $k = R/(\pi)$, sowie $R_n := R/(\pi^{n+1})$.

a) Die $K$-Algebra der strikt konvergenten Potenzreihen

$$T_r \quad := \quad K\langle \xi_1, \ldots, \xi_r \rangle \quad := \quad R\langle \xi_1, \ldots, \xi_r \rangle \otimes_R K$$

heißt die *Tate-Algebra in $r$ Unbestimmten über $K$*. Ein Quotient $T_r/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq T_r$ heißt eine *$K$-affinoide Algebra*.

b) Eine *affinoide, rigid analytische Varietät über $K$* ist das Maximalspektrum $\operatorname{Sp} A_K$ einer $K$-affinoiden Algebra $A_K$.

*Bemerkung* 2.3.1.
$T_r$ ist noethersch nach [BGR, Theorem 5.2.6.1].

Auf $\operatorname{Sp} A_K$ läßt sich eine Grothendieck-Topologie definieren, mit deren Hilfe sich affinoide, rigid analytische Varietäten zu globalen Objekten verkleben lassen. Diese heißen *rigid analytische Varietäten über $K$*. Für eine ausführliche Darstellung siehe [BGR].

Einem zulässigen, formellen $R$-Schema $X$ ordnen wir nun eine rigid analytische Varietät $X_{\mathrm{rig}}$ zu. Lokal besteht $X$ aus affinen Unterschemata der Form $\operatorname{Spf} A$ mit einer zulässigen, formellen $R$-Algebra $A$. Die $K$-Algebra $A_K := A \otimes_R K$ ist affinoid. Die so erhaltenen affinoiden, rigid analytischen Varietäten $\operatorname{Sp} A_K$ können wir mittels des Verklebungsdatums von $X$ zu einer rigid analytischen Varietät $X_{\mathrm{rig}}$ über $K$ verkleben. Dies ergibt einen Funktor

$$\mathrm{rig}: \quad X \quad \longmapsto \quad X_{\mathrm{rig}}\,.$$

Nach einem Satz von M. Raynaud [Ra] induziert rig eine Äquivalenz zwischen

a) der Kategorie der quasikompakten, quasiseparierten, zulässigen, formellen $R$-Schemata, lokalisiert nach zulässigen, formellen Aufblasungen und

b) der Kategorie der quasikompakten, quasiseparierten, rigid analytischen $K$-Varietäten.

Eine *zulässige, formelle Aufblasung* ist dabei die Aufblasung eines zulässigen, formellen $R$-Schemas $X$ in einem Ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$, welches eine Potenz von $\pi$ enthält. Solch ein Ideal ist ein offenes Ideal bezüglich der $\pi$-adischen Topologie. Die Aufblasung wird erhalten als der Morphismus

$$X' \quad := \quad \varinjlim_n \operatorname{Proj} \bigoplus_{\nu \geq 0} (\mathcal{I}^\nu \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_n}) \quad \longrightarrow \quad X\,.$$

Für jede Aufblasung von $X$ gibt es ein größtes offenes Unterschema $U$, über dem die Aufblasung ein Isomorphismus ist. Das Komplement $X - U$ nennen wir in dieser Arbeit, abweichend von der üblichen Terminologie, das *Zentrum der Aufblasung.* Sein zugrundeliegender topologischer Raum ist in dem abgeschlossenen Unterschema $\mathrm{V}(\mathcal{I})$, das üblicherweise als das Zentrum bezeichnet wird, enthalten. Für eine ausführliche Darstellung, sowie einen Beweis des Satzes von Raynaud siehe [FRG, I].

**Definition 2.4.**

a) Ein *kohärenter* $\mathcal{O}_{X_K}$*-Modul* $\mathcal{F}_K$ auf einer rigid analytischen Varietät $X_K$ ist eine Garbe bezüglich der Grothendieck-Topologie auf $X_K$, so daß $\mathcal{F}_K(U_K)$ für alle zulässigen, offenen Teilmengen $U_K \subseteq X_K$ die Struktur eines endlichen $\mathcal{O}_{X_K}(U_K)$-Moduls besitzt (siehe [Ki 2]).

b) Ein *Geradenbündel* auf $X_K$ ist ein kohärenter $\mathcal{O}_{X_K}$-Modul, der lokal bezüglich einer zulässigen, offenen Überdeckung von $X_K$ trivial, das heißt isomorph zu $\mathcal{O}_{X_K}$ ist.

c) Ein *Geradenbündel* auf einem zulässigen, formellen $R$-Schema $X$ ist eine invertierbare Garbe auf $X$.

Aus jedem formellen Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $X$ erhalten wir durch Tensorieren mit $K$ ein rigid analytisches Geradenbündel $\mathcal{L} \otimes_R K$ auf $X_{\mathrm{rig}}$. Einen wesentlichen Bestandteil dieser Arbeit stellt die Umkehrung dieses Sachverhalts dar, das heißt die Ausdehnung von rigiden Geradenbündeln $\mathcal{L}_K$ auf $X_{\mathrm{rig}}$ zu formellen Geradenbündeln $\mathcal{L}$ auf $X$ mit $\mathcal{L}_K \cong \mathcal{L} \otimes_R K$. Unter bestimmten Bedingungen an $X$ und an $\mathcal{L}_K$ ist die Ausdehnung möglich (vergleiche die Abschnitte 4.2, 4.4 und Satz 4.15).

Desweiteren lassen sich für formelle und rigide Räume die üblichen Begriffe, wie Zusammenhang, Irreduzibilität, Reduziertheit, Regularität, Glattheit, usw. definieren. Wir verweisen dazu auf [FRG], [BGR] und [EGA, I, Section 10]. Wir wollen allerdings noch einige Lemmata erwähnen, die wir benötigen und für die wir keine geeignete Referenz gefunden haben.

**Lemma 2.5.**
*Sei* $\operatorname{Spf} A$ *ein affines, zulässiges, formelles* $R$*-Schema mit zugehöriger affinoider, rigid analytischer Varietät* $\operatorname{Sp} A_K$ *und spezieller Faser* $\operatorname{Spec} A_0$.

*Ist* $\operatorname{Spec} A_0$ *integer, so ist auch* $\operatorname{Sp} A_K$ *integer ist.*

Beweis:
Sei $\operatorname{Spec} A_0$ integer, $\operatorname{Sp} A_K$ jedoch nicht. Also gibt es $f, g \in A_K - \{0\}$ mit $f\,g = 0$. Da $A_0$ reduziert ist, ist $|A_K|_{\mathrm{sup}} = |K|$ und $A = \{a \in A_K : |a|_{\mathrm{sup}} \leq 1\}$ ([FRG, IV, Proposition 1.1]). Das heißt, es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $|\pi^\alpha f| = |\pi^\beta g| = 1$. Somit sind $\pi^\alpha f$ und $\pi^\beta g \in A$. Ihre Reduktionen sind ungleich $0$, das Produkt ihrer Reduktionen ist jedoch gleich $0$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Integrität von $\operatorname{Spec} A_0$. □

**Lemma 2.6.**
*Sei* $X_K$ *eine glatte, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über* $K$*. Dann ist die Dimension* $\dim \mathcal{O}_{X_K,x}$ *konstant gleich* $\dim X_K$ *für alle Punkte* $x \in X_K$*. Ist ferner* $X_K = \operatorname{Sp} A_K$ *affinoid, so ist* $\dim (A_K)_{\mathfrak{m}} = \dim X_K$ *für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m}$ *von* $A_K$.

Beweis:
Sei $x \in X_K$. Nach [FRG, III, Proposition 2.7] gibt es eine offene Umgebung von $x$ in $X_K$, die étale über $Y_K := \mathbb{D}^n_K$ ist. Nach [FRG, III, Proposition 2.9] ist sie flach über $Y_K$. Sei $y$ das Bild von $x$ in $Y_K$. Nach [FRG, III, Proposition 2.2] erzeugt das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{Y_K,y}$ dasjenige von $\mathcal{O}_{X_K,x}$. Folglich ist $\dim \mathcal{O}_{X_K,x} = \dim \mathcal{O}_{Y_K,y} = n$ ([Ei, Theorem 10.10]). Dies zeigt, daß $\dim \mathcal{O}_{X_K,x}$ lokal konstant auf den abgeschlossenen Punkten von $X$ und somit gleich $\dim X_K$ ist. Ist $X_K$ affinoid, so folgt die Behauptung mit [BGR, Proposition 7.3.2.8]. □

**Satz 2.7.**
*Sei* $f : X \longrightarrow S$ *ein formal glatter Morphismus formeller R-Schemata. Sei S regulär. Dann ist auch X regulär.*

Beweis:
Es genügt zu zeigen, daß für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X_0$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist.

Da $X$ formal glatt über $S$ ist, gibt es eine offene Umgebung $U$ von $x$ in $X$ und eine $S$-Einbettung

$$j : U \hookrightarrow \mathbb{D}^n_S =: Y .$$

Seien $y := j(x)$, sowie $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die zu $x$ beziehungsweise $y$ gehörenden maximalen Ideale. Lokal bei $y$ wird das $U$ beschreibende Ideal von $g_{r+1}, \ldots, g_n$ erzeugt, wobei die $dg_{r+1}, \ldots, dg_n$ linear unabhängig über $k(x) = k(y)$ sind. Für die lokalen Ringe gilt also

$$\mathcal{O}_{X,x} \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_{Y,y} / (g_{r+1}, \ldots, g_n) .$$

Folglich erhalten wir für die Kotangentialräume in $x$ beziehungsweise $y$

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \twoheadleftarrow \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \quad \text{mit} \quad \ker = k(y)\, dg_{r+1} \oplus \ldots \oplus k(y)\, dg_n .$$

Somit folgt für ihre Dimensionen

$$\dim_{k(x)} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{k(y)} \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 - (n-r)$$

Andererseits gilt für die Dimensionen der lokalen Ringe

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} \geq \dim \mathcal{O}_{Y,y} - (n-r)$$

Da $S$ regulär ist, ist auch $Y$ regulär und folglich $\dim_{k(y)} \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = \dim \mathcal{O}_{Y,y}$. Damit folgt die Behauptung. □

**Lemma 2.8.**
*Seien V ein zulässiges, formelles Schema über R mit reduzierter spezieller Faser* $V_0$ *und f und g zwei R-Morphismen von V in ein zulässiges, formelles R-Schema Y. Für alle Punkte* $v \in V(R')$, *wobei* $R'$ *alle Bewertungsringe endlicher Erweiterungen* $K'$ *von K durchläuft, sei* $f(v) = g(v)$ *in* $Y(R')$.

*Dann ist* $f = g$.

Beweis:
Ohne Einschränkung seien $\operatorname{Spf} A = V$ und $\operatorname{Spf} B = Y$ affin. Wir müssen zeigen, daß $f^*$ und $g^*$ als Morphismen von $B$ nach $A$ gleich sind. Sei $v \in V(R')$, das heißt es gibt ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $A$ mit

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p} \longrightarrow A \xrightarrow{v^*} R' \longrightarrow 0 .$$

Nun bedeutet $f(v) = g(v)$, daß für alle $b \in B$ gilt $f^*(b) - g^*(b) \in \mathfrak{p}$.

Angenommen, es gäbe ein $b \in B$ mit $a := f^*(b) - g^*(b) \neq 0$. Da $V_0$ reduziert ist, ist die Norm $|a|_{\sup} = |\pi^n|$ nach [FRG, IV, Proposition 1.1]. Es existiert also ein $K'$-wertiger Punkt $v_K$ in $V_K$ mit $|a(v_K)| = |\pi^n|$. Dieser dehnt sich aus zu einem $R'$-wertigen Punkt $v$ von $V$ und $\pi^{-n}a$ liegt nicht in dem zu $v$ gehörenden Primideal $\mathfrak{p}$. Da auch $\pi \notin \mathfrak{p}$ ist, gilt $a \notin \mathfrak{p}$ und somit $f(v) \neq g(v)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Auch der folgende Hilfssatz wird in der weiteren Arbeit benötigt.

**Lemma 2.9.**
*Sei $A$ ein noetherscher Ring und $I$ ein Ideal in $A$. Sei $\widehat{A}$ die Komplettierung von $A$ nach $I$. Dann gilt:*

a) *Die Abbildung $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}\widehat{A}$ ist eine Bijektion der Menge der maximale Ideale von $A$, welche $I$ enthalten auf die Menge der maximalen Ideale von $\widehat{A}$.*

b) *Sei $\mathfrak{m} \supseteq I$ ein maximales Ideal von $A$ und $\mathfrak{n} := \mathfrak{m}\widehat{A}$. Dann sind die Komplettierungen der lokalen Ringe $A_{\mathfrak{m}}$ und $\widehat{A}_{\mathfrak{n}}$ kanonisch isomorph.*

Beweis:
Aussage a) ist [Bo, Proposition III.3.4.8 ii].

Zu b) Der Homomorphismus $A \longrightarrow \widehat{A}$ liefert einen Homomorphismus der lokalen Ringe $A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \widehat{A}_{\mathfrak{n}}$, welcher nach [Bo, Proposition III.3.4.8 iii] injektiv ist. Weiter ist die $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$-adische Topologie auf $A_{\mathfrak{m}}$ von der $\mathfrak{n}\widehat{A}_{\mathfrak{n}}$-adischen Topologie auf $\widehat{A}_{\mathfrak{n}}$ induziert und $A_{\mathfrak{m}}$ ist dicht in $\widehat{A}_{\mathfrak{n}}$ unter der $\mathfrak{n}\widehat{A}_{\mathfrak{n}}$-adischen Topologie. Also sind die Komplettierungen der noetherschen, lokalen Ringe $A_{\mathfrak{m}}$ und $\widehat{A}_{\mathfrak{n}}$ kanonisch isomorph. $\square$

## 2.2 Normierte Geradenbündel

In diesem Abschnitt sei $X_K$ eine *geometrisch reduzierte*, rigid analytische Varietät mit formellem Modell $X$, welches *geometrisch reduzierte* spezielle Faser $X_0$ habe. Sei $\mathcal{L}$ ein formelles Geradenbündel auf $X$ und $\mathcal{L}_K := \mathcal{L} \otimes_R K$ das zugehörige rigide Geradenbündel auf $X_K$.

Für jede offene, affine Teilmenge $\operatorname{Spf} A \subseteq X$ bezeichne $A_K := A \otimes_R K$ die zugehörige affinoide Algebra und $|\,.\,|_{\sup}$ die Supremumsnorm auf $A_K$. Dann ist $\operatorname{Sp} A_K$ formell offen in $X_K$. Da $X_0$ geometrisch reduziert ist, gilt

$$A \;=\; \{\, a \in A_K \,:\, |a|_{\sup} \leq 1 \,\}$$

und $|A_K|_{\sup} = |K|$ (vergleiche [FRG, IV, Proposition 1.1 und die vorangehende Diskussion]).

Analog zu der Supremumsnorm auf $A_K = \mathcal{O}_{X_K}(\operatorname{Sp} A_K)$ wollen wir eine Norm auf $\mathcal{L}_K$ definieren. Dazu zunächst ein

**Lemma 2.10.**
*Seien* $x \in X_K$ *und* $\operatorname{Spf} A \subseteq \operatorname{Spf} B \subseteq X$ *offene, affine Teilmengen mit* $x \in \operatorname{Sp} A_K$, *sowie*

$$f : \mathcal{L}|_{\operatorname{Spf} A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Spf} A} \qquad \textit{und} \qquad g : \mathcal{L}|_{\operatorname{Spf} B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Spf} B}$$

*Trivialisierungen von* $\mathcal{L}$. *Sei* $l \in \mathcal{L}_x$. *Dann ist*

$$|f(l)(x)| \;=\; |g(l)(x)|\,.$$

*Bemerkung* 2.10.1.
Unter $f(l)$ ist dabei eigentlich $f_K(l)$ zu verstehen, wobei $f_K$ die zu $f$ gehörende Trivialisierung $f_K : \mathcal{L}_K|_{\operatorname{Sp} A_K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Sp} A_K}$ ist.

Beweis:
$g$ induziert einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} g|_{\operatorname{Spf} A} \circ f^{-1} : \; \mathcal{O}_{\operatorname{Spf} A} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{L}|_{\operatorname{Spf} A} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{\operatorname{Spf} A} \\ 1 & & \longmapsto & & u \quad \in A^{\times}\,. \end{array}$$

Also ist $|u(y)| = 1$ für alle $y \in \operatorname{Sp} A_K$. In $\mathcal{O}_{X_K,x}$ ist $f(l)(x) \cdot u(x) = g(l)(x)$ und somit also

$$|f(l)(x)| \;=\; |g(l)(x)|\,. \qquad \square$$

Dies ermöglicht folgende

**Definition 2.11.**

a) Für $x \in X_K$ und $l \in \mathcal{L}_x$ sei der *Betrag von* $l$ *in* $x$ definiert als

$$|l(x)| \;:=\; |f(l)(x)|\,,$$

wobei $f : \mathcal{L}|_{\operatorname{Spf} A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Spf} A}$ eine beliebige Trivialisierung auf einer formellen, affinen Umgebung $\operatorname{Spf} A$ von $x$ ist (vergleiche Bemerkung 2.10.1).

b) Für jede formell offene Teilmenge $V \subseteq X$ und jedes $l \in \mathcal{L}_K(V_K)$ sei die *Supremumsnorm von* $l$ *über* $V_K$ definiert als

$$|l|_{V_K} \;:=\; \sup\,\{\, |l(x)| \,:\, x \in V_K \,\}\,.$$

Die Supremumsnorm auf dem Geradenbündel $\mathcal{L}_K$ hat folgende Eigenschaften.

**Lemma 2.12.**
*Sei* $\operatorname{Spf} A$ *offen in* $X$ *und* $f : \mathcal{L}|_{\operatorname{Spf} A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Spf} A}$ *eine Trivialisierung von* $\mathcal{L}$ *. Sei ferner* $l \in \mathcal{L}_K(\operatorname{Sp} A_K)$ *. Dann ist*

$$|l|_{\operatorname{Sp} A_K} \;=\; |f(l)|_{\sup} \;\in\; |K|\,.$$

*Falls* $K$ *diskret bewertet, oder* $X$ *quasikompakt ist, gilt insbesondere:*

a) *Für jedes* $l \in \Gamma(X_K, \mathcal{L}_K)$ *ist* $|l|_{X_K} \in |K|$ *.*
b) *Die Supremumsorm erfüllt das Maximumprinzip, das heißt für jedes* $l \in \Gamma(X_K, \mathcal{L}_K)$ *gibt es ein* $x \in X_K$ *mit* $|l(x)| = |l|_{X_K}$ *.*

Beweis:
Die erste Aussage ist klar nach der Definition.
Ist $K$ diskret bewertet, oder $X$ quasikompakt, so ist $|l|_{X_K} = |l|_{\operatorname{Sp} A_K}$ für eine offene Teilmenge $\operatorname{Spf} A \subseteq X$, über der $\mathcal{L}$ trivial ist. Behauptung b) folgt dann aus [BGR, Proposition 6.2.1.4]. □

**Lemma 2.13.**
*Sei* $l \in \Gamma(X_K, \mathcal{L}_K)$ *. Dann ist die Menge*

$$U_K \;:=\; \{\, x \in X_K : |l(x)| = |l|_{X_K} \,\}$$

*formell offen in* $X_K$ *.*

Beweis:
Sei $x \in U_K$ und $\operatorname{Spf} A \subseteq X$ offen mit $x \in \operatorname{Sp} A_K$. Sei $f : \mathcal{L}|_{\operatorname{Spf} A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Spf} A}$ eine Trivialisierung. Dann ist $|f(l)(x)| = |f(l)|_{\sup}$ und es gibt ein $c \in K$, so daß für $a := c\, f(l)$ gilt $|a|_{\sup} = 1$. Damit ist auch $|a(x)| = 1$. Die Menge

$$W_K \;:=\; \{\, y \in \operatorname{Sp} A_K : |a(y)| = 1 \,\}$$

ist formal offen in $\operatorname{Sp} A_K$, also auch in $X_K$. Da $x \in W_K \subseteq U_K$ ist, ist $U_K$ formal offen in $X_K$. □

**Lemma 2.14.**
*Seien* $\mathcal{L}$ *und* $\mathcal{M}$ *Geradenbündel auf* $X$ *. Diese, sowie die Geradenbündel* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ *und* $\mathcal{L}^{\otimes n}$ *seien mit den Supremumsnormen versehen.*

a) *Sei* $x \in X_K$ *, sowie* $l \in \mathcal{L}_x$ *und* $m \in \mathcal{M}_x$ *. Dann ist*

$$|(l \otimes m)(x)| \;=\; |l(x)| \cdot |m(x)|\,.$$

b) *Seien* $l \in \Gamma(X_K, \mathcal{L}_K)$ *und* $m \in \Gamma(X_K, \mathcal{M}_K)$ *. Dann ist*

$$|l^{\otimes n}|_{X_K} \;=\; \big(|l|_{X_K}\big)^n \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \textit{und}$$
$$|l \otimes m|_{X_K} \;\le\; |l|_{X_K} \cdot |m|_{X_K}\,.$$

*Falls* $X$ *irreduzibel ist und die Supremumsnorm das Maximumprinzip erfüllt, so gilt Gleichheit.*

Beweis:
Zu a) Wähle Trivialisierungen $f : \mathcal{L}|_{\mathrm{Spf}\,A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathrm{Spf}\,A}$ und $g : \mathcal{M}|_{\mathrm{Spf}\,A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathrm{Spf}\,A}$ in einer Umgebung von $x$. Dann sind

$$f \otimes g : \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}\,|_{\mathrm{Spf}\,A} \;\xrightarrow{\sim}\; \mathcal{O}_{\mathrm{Spf}\,A} \qquad \text{und} \qquad f^{\otimes n} : \mathcal{L}^{\otimes n}|_{\mathrm{Spf}\,A} \;\xrightarrow{\sim}\; \mathcal{O}_{\mathrm{Spf}\,A}$$

ebenfalls Trivialisierungen und in $A_K$ gilt

$$(f \otimes g)(l \otimes m) \;=\; f(l) \cdot g(m) \qquad \text{und} \qquad f^{\otimes n}(l^{\otimes n}) \;=\; f(l)^n\,.$$

Daraus folgt

$$|(f \otimes g)(l \otimes m)(x)| \;=\; |f(l)(x) \cdot g(m)(x)| \;=\; |f(l)(x)| \cdot |g(m)(x)|\,.$$

Zu b) Nach a) gilt für alle $x \in X_K$

$$\begin{aligned} |(l \otimes m)(x)| \;&=\; |l(x)| \cdot |m(x)| \;\leq\; |l|_{X_K} \cdot |m|_{X_K} \qquad \text{und} \\ |l^{\otimes n}|_{X_K} \;\geq\; |l^{\otimes n}(x)| \;&=\; |l(x)|^n \;\leq\; \left(|l|_{X_K}\right)^n. \end{aligned}$$

Also folgt für die Suprema

$$|l \otimes m|_{X_K} \;\leq\; |l|_{X_K} \cdot |m|_{X_K} \qquad \text{und} \qquad |l^{\otimes n}|_{X_K} \;=\; \left(|l|_{X_K}\right)^n.$$

Nun sei $X$ irreduzibel und die Supremumsnorm erfülle das Maximumprinzip. Dann ist nach Lemma 2.13 für alle offenen Teilmengen $\mathrm{Spf}\,A \subseteq X$ der Durchschnitt

$$\{\, x \in X_K : |l(x)| = |l|_{X_K} \,\} \,\cap\, \mathrm{Sp}\,A_K \;\neq\; \emptyset$$

und folglich $|l|_{\mathrm{Sp}\,A_K} = |l|_{X_K}$. Das gleiche gilt für $m$ und $l \otimes m$. Da $X$ irreduzibel ist, ist auch jede offene, affine Teilmenge $\mathrm{Spf}\,A$ irreduzibel. Also ist nach [BGR, Proposition 6.2.3.5] die Supremumsnorm eine Bewertung auf $A_K$ und mit Lemma 2.12 folgt

$$\begin{aligned} |l \otimes m|_{\mathrm{Sp}\,A_K} \;&=\; |(f \otimes g)(l \otimes m)|_{\sup} \;=\; |f(l) \cdot g(m)|_{\sup} \\ &=\; |f(l)|_{\sup} \cdot |g(m)|_{\sup} \;=\; |l|_{\mathrm{Sp}\,A_K} \cdot |m|_{\mathrm{Sp}\,A_K}\,. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

**Lemma 2.15.**
*Sei $p : Y \longrightarrow X$ ein Morphismus formeller Schemata, $y \in Y$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $X$. Dann ist*

a) $|p^* l(y)| \;=\; |l(p(y))|$ *für alle* $l \in \mathcal{L}_{p(y)}$ *und*

b) $|p^* l|_{Y_K} \;\leq\; |l|_{X_K}$ *für alle* $l \in \Gamma(X_K, \mathcal{L}_K)$.

Beweis:
Zu a) Der Rücktransport einer Trivialisierung von $\mathcal{L}$ mittels $p$ ist eine Trivialisierung von $p^*\mathcal{L}$. Da $p$ eine isometrische Einbettung von $k(p(y))$ in $k(y)$ induziert, folgt die Behauptung aus der Definition der Norm.
Behauptung b) folgt aus a). □

**Lemma 2.16.**
*Sei* $l_K \in \Gamma(X_K, \mathcal{L}_K)$ . *Dann gilt*

$$|l_K|_{X_K} \;\leq\; 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \textit{es gibt ein} \;\; l \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \;\; \textit{mit} \;\; l_K = l \otimes_R K\,.$$

<u>Beweis:</u>
Sei $\operatorname{Spf} A^i$ eine offene Überdeckung von $X$ , auf der $\mathcal{L}$ trivialisiert ist

$$f^i : \mathcal{L}|_{\operatorname{Spf} A^i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Spf} A^i}\;, \qquad f^i_K : \mathcal{L}_K|_{\operatorname{Sp} A^i_K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Sp} A^i_K}\,.$$

Für $a_i := f^i_K(l_K|_{\operatorname{Sp} A^i_K}) \in A^i_K$ gilt

$$|a_i|_{\sup} \;\leq\; 1 \quad\Longleftrightarrow\quad a_i \;\in\; A^i$$

und die $(f^i)^{-1}(a_i) \in \mathcal{L}(\operatorname{Spf} A^i)$ setzen sich zu einem globalen Schnitt $l \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ zusammen, für den $l_K = l \otimes_R K$ ist. $\square$

## 2.3 Descent

Wir möchten hier kurz erklären, welches Problem die Descent-Theorie löst und dies von der algebraischen auf die formelle Situation übertragen. Für eine ausführliche Darstellung siehe [BLR, Kapitel 6]. Die Descent-Theorie beschäftigt sich mit folgendem Problem.

Sei $p : S' \longrightarrow S$ ein Morphismus von Schemata, und $p^* : \mathcal{F} \longmapsto p^*\mathcal{F}$ der Funktor, der jedem quasikohärenten $\mathcal{O}_S$-Modul $\mathcal{F}$ den Rücktransport unter $p$ zuordnet. Die Frage lautet nun, was das Bild dieses Funktors ist, das heißt unter welchen Bedingungen ein quasikohärenter $\mathcal{O}_{S'}$-Modul $\mathcal{F}'$ von einem quasikohärenten $\mathcal{O}_S$-Modul kommt. Wir betrachten $S'' := S' \times_S S'$ und $p_i : S'' \longrightarrow S'$ die Projektion auf den $i$-ten Faktor $(i = 1, 2)$. Für jeden quasikohärenten $\mathcal{O}_{S'}$-Modul $\mathcal{F}'$ nennen wir einen $S''$-Isomorphismus

$$\theta : \; p_1^*\mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} p_2^*\mathcal{F}'$$

ein *Überdeckungs-Datum* auf $\mathcal{F}'$. Jeder quasikohärente $\mathcal{O}_S$-Modul $\mathcal{F}$ liefert ein kanonisches Überdeckungs-Datum auf $p^*\mathcal{F}$, nämlich den natürlichen Isomorphismus

$$p_1^*(p^*\mathcal{F}) \;\cong\; (p \circ p_1)^*\mathcal{F} \;=\; (p \circ p_2)^*\mathcal{F} \;\cong\; p_2^*(p^*\mathcal{F})\,.$$

Sei $S''' := S' \times_S S' \times_S S'$ und seien $p_{ij} : S''' \longrightarrow S''$ die Projektionen auf die Faktoren mit Indizes $i$ und $j$ für $i < j,\; i, j = 1, 2, 3$. Damit ein quasikohärenter $\mathcal{O}_{S'}$-Modul $\mathcal{F}'$ mit Überdeckungs-Datum $\theta : p_1^*\mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} p_2^*\mathcal{F}'$ von einem quasikohärenten $\mathcal{O}_S$-Modul herkommt, ist es notwendig, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
p_{12}^*p_1^*\mathcal{F}' \arrow[r, "p_{12}^*\theta"] \arrow[d, equal] & p_{12}^*p_2^*\mathcal{F}' = p_{23}^*p_1^*\mathcal{F}' \arrow[r, "p_{23}^*\theta"] & p_{23}^*p_2^*\mathcal{F}' \arrow[d, equal] \\
p_{13}^*p_1^*\mathcal{F}' \arrow[rr, "p_{13}^*\theta"] & & p_{13}^*p_2^*\mathcal{F}'
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Falls nämlich $\mathcal{F}'$ der Rücktransport eines quasikohärenten $\mathcal{O}_S$-Moduls $\mathcal{F}$ und $\theta$ das natürliche Überdeckungs-Datum ist, so sind alle Isomorphismen in obigem Diagramm die kanonischen und das Diagramm folglich kommutativ. Die Kommutativität dieses Diagramms wird die *Kozykelbedingung* für $\theta$ genannt und kurz als

$$p_{13}^*\theta \;=\; p_{23}^*\theta \;\circ\; p_{12}^*\theta$$

geschrieben. Ein Überdeckungsdatum auf $\mathcal{F}'$, das die Kozykelbedingung erfüllt, heißt ein *Descent-Datum* auf $\mathcal{F}'$ bezüglich $p$. Die Paare $(\mathcal{F}', \theta)$ von quasikohärenten $\mathcal{O}_{S'}$-Moduln mit Descent-Datum bilden eine Kategorie. Ein Morphismus

$$\varphi : \;(\mathcal{F}', \theta) \;\longrightarrow\; (\mathcal{G}', \eta)$$

zweier solcher Objekte besteht aus einem $S'$-Morphismus $\varphi : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{G}'$, der kompatibel mit den Descent-Daten $\theta$ und $\eta$ ist. Dies bedeutet, daß folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
p_1^*\mathcal{F}' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "p_1^*\varphi"'] & p_2^*\mathcal{F}' \arrow[d, "p_2^*\varphi"] \\
p_1^*\mathcal{G}' \arrow[r, "\eta"] & p_2^*\mathcal{G}'
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Es gilt nun der folgende Satz.

**Satz 2.17.** (A. Grothendieck)
*Sei* $p : S' \longrightarrow S$ *ein treu-flacher, quasikompakter Morphismus von Schemata. Dann ist der Funktor* $p^* : \mathcal{F} \longmapsto p^*\mathcal{F}$ *von der Kategorie der quasikohärenten* $\mathcal{O}_S$*-Moduln in die Kategorie der quasikohärenten* $\mathcal{O}_{S'}$*-Moduln mit Descent-Datum eine Äquivalenz von Kategorien.*

Beweis: siehe [BLR, Theorem 6.1.4].

Analog zu der Descent-Theorie für (algebraische) Schemata wollen wir nun eine Descent-Theorie für zulässige, formelle $R$-Schemata entwickeln.

Sei also $p : S' \longrightarrow S$ ein Morphismus zulässiger, formeller $R$-Schemata. Ein *Descent-Datum* auf einem kohärenten $\mathcal{O}_{S'}$-Modul $\mathcal{F}'$ ist wie oben ein $S''$-Isomorphismus

$$\theta : \; p_1^*\mathcal{F}' \;\xrightarrow{\sim}\; p_2^*\mathcal{F}' \,,$$

der die Kozykelbedingung erfüllt. Es gilt folgender Satz.

**Satz 2.18.**
*Sei* $p : S' \longrightarrow S$ *ein treu-flacher, quasikompakter Morphismus zulässiger, formeller* $R$*-Schemata. Dann ist der Funktor* $p^* : \mathcal{F} \longmapsto p^*\mathcal{F}$ *von der Kategorie der kohärenten* $\mathcal{O}_S$*-Moduln in die Kategorie der kohärenten* $\mathcal{O}_{S'}$*-Moduln mit Descent-Datum eine Äquivalenz von Kategorien.*

Beweis:
1. Sei $\mathcal{F}'$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{S'}$-Modul und

$$\theta : \; p_1^*\mathcal{F}' \;\xrightarrow{\sim}\; p_2^*\mathcal{F}'$$

ein Descent-Datum auf $\mathcal{F}'$. Nach Basiswechsel mit $\operatorname{Spec} R_n \longrightarrow \operatorname{Spf} R$ ist

$$p_n : \; S'_n \;:=\; S' \times_R R_n \;\longrightarrow\; S_n \;:=\; S \times_R R_n$$

ein treu-flacher, quasikompakter Morphismus (algebraischer) Schemata, sowie $\mathcal{F}'_n := \mathcal{F}' \otimes_R R_n$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{S'_n}$-Modul und

$$\theta_n : \; p_1^*\mathcal{F}'_n \;\xrightarrow{\sim}\; p_2^*\mathcal{F}'_n$$

ein Descent-Datum auf $\mathcal{F}'_n$. Nach Satz 2.17 gibt es somit einen kohärenten $\mathcal{O}_{S_n}$-Modul $\mathcal{F}_n$ und einen $S'_n$-Isomorphismus

$$\varphi_n : \; p^*\mathcal{F}_n \;\xrightarrow{\sim}\; \mathcal{F}'_n$$

mit $\theta_n \;=\; (p_1^*\varphi_n) \circ (p_2^*\varphi_n)^{-1}$.

2. Wir betrachten nun den Morphismus $j : S_n \longrightarrow S_{n+1}$. Auf $S'_n$ gibt es einen Isomorphismus der beiden kohärenten Moduln mit Descent-Daten

$$(p_n^* j^* \mathcal{F}_{n+1}, \; \mathrm{id}) \;\xrightarrow{\sim}\; (p_n^*\mathcal{F}_n, \; \mathrm{id}) \,,$$

denn beide sind isomorph zu $(\mathcal{F}'_n, \theta_n)$. Nach Satz 2.17 gibt es somit einen Isomorphismus

$$j^*\mathcal{F}_{n+1} \;\xrightarrow{\sim}\; \mathcal{F}_n \,.$$

Zusammen mit dem kanonischen Morphismus

$$\mathcal{F}_{n+1} \;\longrightarrow\; \mathcal{F}_{n+1} \otimes_{R_{n+1}} R_n \;=\; j^*\mathcal{F}_{n+1}$$

erhalten wir ein inverses System von Garben auf dem topologischen Raum $S_0$. Somit existiert nach [Ha, Proposition II.9.6] ein kohärenter $\mathcal{O}_S$-Modul $\mathcal{F}$ und es ist $\mathcal{F}_n \cong \mathcal{F}/\pi^{n+1}\mathcal{F}$. Die Isomorphismen

$$p^*\mathcal{F}/\pi^{n+1}p^*\mathcal{F} \;\cong\; p^*\mathcal{F}_n \;\xrightarrow{\sim}\; \mathcal{F}'_n \;\cong\; \mathcal{F}'/\pi^{n+1}\mathcal{F}'$$

sind miteinander kompatibel und liefern einen Isomorphismus $\varphi : p^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'$. Da für jede Stufe gilt $\theta_n = (p_1^*\varphi_n) \circ (p_2^*\varphi_n)^{-1}$, gilt auch im Limes

$$\theta = (p_1^*\varphi) \circ (p_2^*\varphi)^{-1} .$$

Dies bedeutet, daß $\varphi$ auch ein Isomorphismus der Descent-Daten ist.

3. Es bleibt noch zu zeigen, daß für je zwei kohärente $\mathcal{O}_S$-Moduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ die Abbildung

$$p^* : \operatorname{Hom}_S(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S'}\big((p^*\mathcal{F}, \mathrm{id}), (p^*\mathcal{G}, \mathrm{id})\big)$$

bijektiv ist. Sie ist injektiv, da $p^*$ treu ist. Um zu zeigen, daß sie surjektiv ist, betrachten wir einen Morphismus

$$\psi : (p^*\mathcal{F}, \mathrm{id}) \longrightarrow (p^*\mathcal{G}, \mathrm{id})$$

von $\mathcal{O}_{S'}$-Moduln mit Descent-Daten. Dieser induziert Morphismen $\psi_n$ auf den Stufen. Nach Satz 2.17 gibt es eindeutig bestimmte Morphismen

$$\varphi_n : \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{G}_n$$

mit $\psi_n = p^*\varphi_n$. Wegen der Eindeutigkeit sind diese miteinander verträglich und liefern einen Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$. Da der Morphismus $p^*\varphi$ auf den Stufen ebenfalls die Morphismen $\psi_n$ induziert und nach [Ha, Proposition II.9.6]

$$p^*\mathcal{F} = \varprojlim p^*\mathcal{F}/\pi^{n+1}p^*\mathcal{F}$$

gilt, folgt wegen der universellen Eigenschaft des inversen Limes, daß $p^*\varphi = \psi$ ist. $\square$

# Kapitel 3

# Semistabile Modelle

Wir fordern in Satz 4.5, daß $X_K$ ein strikt semistabiles, formelles Modell besitzt. In diesem Kapitel wollen wir erläutern, was wir unter dem Begriff verstehen.

Wie zuvor sei $R$ ein vollständiger, diskreter Bewertungsring mit Uniformisierender $\pi$, Quotientenkörper $K$ und Restklassenkörper $k = R/(\pi)$, sowie $R_n := R/(\pi^{n+1})$.

## 3.1 Definition und erste Eigenschaften

In Anlehnung an A.J. de Jong [dJ, Definition 2.16] definieren wir:

**Definition 3.1.**
Sei $X$ ein zulässiges, formelles $R$-Schema. Seien $X_0^\nu, \nu \in N$ die irreduziblen Komponenten der speziellen Faser $X_0$ von $X$. Für $M \subseteq N$ definieren wir

$$X_0^M \ := \ \bigcap_{\nu \in M} X_0^\nu$$

als den schematheoretischen Durchschnitt. $X$ heißt *strikt semistabil über $R$*, falls gilt:

a) $X_{\mathrm{rig}}$ ist rigid glatt über $K$,
b) $X_0$ ist geometrisch reduziert,
c) für alle $\nu \in N$ ist $X_0^\nu$ ein Divisor auf $X$ und
d) für alle $M \subseteq N$ ist $X_0^M$ glatt über $k$ und equidimensional von der Dimension $\dim X - \#M$.

*Bemerkung* 3.1.1. In der Tat ist Bedingung a) eine Konsequenz der Bedingungen b) bis d) (vergleiche Satz 3.4).

*Bemerkung* 3.1.2. Wir werden später sehen, daß jedes strikt semistabile, zulässige, formelle $R$-Schema regulär ist (siehe Korollar 3.5).

Im folgenden wollen wir einige Eigenschaften beschreiben, die strikt semistabile, zulässige, formelle $R$-Schemata besitzen.

**Lemma 3.2.**
*Sei $X$ ein strikt semistabiles, zulässiges, formelles $R$-Schema und $x \in X_0$ ein abgeschlossener Punkt der speziellen Faser.*

*Dann ist* $\quad \dim \mathcal{O}_{X,x} \ = \ \dim X\,.$

Beweis:
Ohne Einschränkung liege $x$ auf $X_0^1$. Sei $t \in \mathcal{O}_{X,x}$ eine Erzeugende des zum Divisors $X_0^1$ gehörenden Ideals. Wegen $X_0^1 \subseteq X_0$ gilt $\pi \in (t)$ in $\mathcal{O}_{X,x}$. Da $X$ flach ist über $R$, ist $\pi$ Nichtnullteiler in $\mathcal{O}_{X,x}$ und folglich $t$ ebenso. Deshalb gilt

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} \;=\; \dim \mathcal{O}_{X,x}/(t) + 1$$

nach [AM, Corollary 11.18]. Da $X_0^1$ nach Bedingung d) von Definition 3.1 glatt über $k$ ist, gilt

$$\dim \mathcal{O}_{X,x}/(t) \;=\; \dim \mathcal{O}_{X_0^1,x} \;=\; \dim X_0^1 \;=\; \dim X - 1\,.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Es gilt die folgende lokale Beschreibung strikt semistabiler, zulässiger, formeller $R$-Schemata.

**Satz 3.3.**
*Sei $X$ ein strikt semistabiles, zulässiges, formelles $R$-Schema und $x \in X_0$ ein Punkt der speziellen Faser. $x$ liege auf den irreduziblen Komponenten $X_0^1, \dots, X_0^r$ und nicht auf den anderen Komponenten von $X_0$.*

*Dann gibt es eine offene, affine Umgebung $\operatorname{Spf} A$ von $x$, so daß die Komplettierung von $A$ nach dem zu $X_0^{\{1,\dots,r\}}$ gehörenden Ideal $I \subseteq A$ von der Form*

$$\widehat{A^I} \;\cong\; C\,[\![\xi_1, \dots, \xi_r]\!]/(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r - \pi)$$

*für eine glatte, zulässige, formelle $R$-Algebra $C$ ist.*

Beweis:
1. Nach Verkleinerung von $X$ zu einer affinen Umgebung $\operatorname{Spf} A$ von $x$ sei $\xi_\nu \in A$ ein Erzeuger des zum Divisors $X_0^\nu$ gehörenden Ideals.

Wir betrachten nun die Komplettierung $\widehat{X} := \widehat{X^{Z_0}}$ von $X$ nach dem abgeschlossenen Unterschema $Z_0 := X_0^{\{1,\dots,r\}}$. Gemäß Bedingung d) von Definition 3.1 ist $Z_0$ glatt über $k$. Somit läßt sich nach erneuter Verkleinerung von $X$ ein glattes, zulässiges, formelles $R$-Schema $Z$ finden,

$$\begin{tikzcd} Z_0 \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, dashed] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spf} R \end{tikzcd}$$

welches eine Ausdehnung von $Z_0$ ist ([FRG, II, Lemma 1.4 a]). Mit $X = \operatorname{Spf} A$ sind auch $Z_0 = \operatorname{Spec} C_0$ und $Z = \operatorname{Spf} C$ affin. Nach eventuell nochmaliger Verkleinerung von $X$ ist $C_0$ und damit auch $C$ integer (Lemma 2.5). Dabei ist $Z_0$ durch das Ideal $I := (\xi_1, \dots, \xi_r, \pi)$ gegeben. Seien jetzt $A_n := A/I^{n+1}$ und $C_n := C/(\pi^{n+1})$. Da $C$ über $R$ formal glatt ist in der $(\pi)$-adischen Topologe, sind die $C_n$ glatt über $R_n := R/(\pi^{n+1})$. Auf der Stufe 0 ist $C/(\pi) = C_0 = A/I$ und wir haben somit den Morphismus

$$\alpha_0 = \mathrm{id} : C/(\pi) \;\longrightarrow\; A/I\,.$$

In $A/I^2$ gilt für das Ideal $J := I/I^2$ die Gleichung $J^2 = 0$. Da $C_1$ über $R_1$ glatt ist, dehnt sich $\alpha_0$ aus zu einem Morphismus $\alpha_1$

$$\begin{tikzcd} R_0 \arrow[r] \arrow[d] & C_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d] & A_0 \arrow[d] \\ R_1 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, dashed, "\alpha_1"] & A_1 \end{tikzcd}$$

und analog zu Morphismen $\alpha_n : C_n \longrightarrow A_n$ ([BLR, Proposition 2.2.6]). Diese sind miteinander verträglich und liefern den Morphismus

$$\alpha : C \longrightarrow \widehat{A^I}.$$

2. In Divisoren-Schreibweise bedeutet Bedingung b) von Definition 3.1

$$\operatorname{div}(\pi) = \sum_{\nu \in N} X_0^\nu.$$

In einer geeigneten offenen Umgebung $\operatorname{Spf} A$ von $x$ gilt also

$$\operatorname{div}(\pi) = X_0^1 + \ldots + X_0^r,$$

das heißt $\pi = u\,\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r$ für eine Einheit $u \in A^\times$. Nachdem wir $u\,\xi_1$ durch $\xi_1$ ersetzen, gilt auf $X$ die Gleichung $\pi = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r$.

Der Produkt-Morphismus von $\alpha$ mit dem Morphismus $\beta : \xi_i \mapsto \xi_i$

$$(\alpha, \beta) : C\,[\![\xi_1, \ldots, \xi_r]\!] \longrightarrow \widehat{A^I}$$

faktorisiert folglich durch den Ring

$$\gamma : B := C\,[\![\xi_1, \ldots, \xi_r]\!]/(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r - \pi) \longrightarrow \widehat{A^I}.$$

3. Wir wollen zeigen, daß $\gamma$ ein Isomorphismus ist. Dazu zunächst die

Behauptung: $\gamma$ ist surjektiv.

Nach [AM, Lemma 10.23] genügt es zu zeigen, daß der Morphismus der assoziierten graduierten Ringe surjektiv ist. Die Topologie der beiden Ringe $B$ und $\widehat{A^I}$ ist dabei durch das Ideal $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ gegeben. Es ist nun $B/(\xi_1, \ldots, \xi_r) = C_0 = A/I$. Ferner wird $I^n/I^{n+1}$ von den Monomen vom Grade $n$ in den $\xi_1, \ldots, \xi_r$ erzeugt. Also ist der Morphismus der graduierten Ringe surjektiv und auch $\gamma$ surjektiv.

Da $C$ integer und $R\,[\![\xi_1, \ldots, \xi_r]\!]/(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r - \pi)$ geometrisch integer ist, ist auch $B$ integer. Also genügt es nun zu zeigen, daß die Dimensionen von $B$ und $\widehat{A^I}$ gleich sind. Es ist

$$\begin{aligned} \dim B &= \dim C + (r-1) = 1 + \dim C_0 + r - 1 \\ &= \dim C_0 + r = \dim Z_0 + r = \dim X = \dim A, \end{aligned}$$

denn $\dim C = 1 + \dim C_0$ nach [AM, Corollary 11.18], da $C$ flach über $R$ und folglich $\pi$ Nichtnullteiler in $C$ ist. Die vorletzte Gleichheit gilt wegen Bedingung d) von Definition 3.1.

4. Damit $\gamma$ ein Isomorphismus ist, bleibt nun noch zu zeigen, daß $\dim A = \dim \widehat{A^I}$ ist.

Dazu sei $\mathfrak{n} \in \widehat{A^I}$ ein maximales Ideal mit $\dim \widehat{A^I}_{\mathfrak{n}} = \dim \widehat{A^I}$. Nach Lemma 2.9 gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$, welches $I$ enthält, so daß $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}\widehat{A^I}$ ist und daß die Komplettierungen der lokalen Ringe $A_{\mathfrak{m}}$ und $\widehat{A^I}_{\mathfrak{n}}$ isomorph sind. Folglich ist

$$\dim \widehat{A^I} = \dim \widehat{A^I}_{\mathfrak{n}} = \dim A_{\mathfrak{m}},$$

denn die Dimension der noetherschen, lokalen Ringe ist gleich der Dimension ihrer Komplettierungen nach [AM, Corollary 11.19]. Diese ist aber gleich. Die Behauptung folgt nun mit Lemma 3.2. □

**Satz 3.4.**
*Sei $X$ ein zulässiges, formelles $R$-Schema. Dann sind äquivalent:*

a) *$X$ ist strikt semistabil.*

b) *Jeder abgeschlossene Punkt $x \in X_0$ der speziellen Faser besitzt eine offene Umgebung, welche für ein $r \in \mathbb{N}$ formal glatt über dem formellen Schema*

$$\operatorname{Spf} R\,\langle \xi_1, \ldots, \xi_r \rangle / (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r - \pi)$$

*ist und es gilt* $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim X$ .

Beweis:
1. Sei zunächst $X$ strikt semistabil und $x \in X_0$ . Die Aussage über die Dimension haben wir bereits in Lemma 3.2 gezeigt.

Ohne Einschränkung liege $x$ auf den irreduziblen Komponenten $X_0^1, \ldots, X_0^r$ und nicht auf den anderen Komponenten von $X_0$ . Nach Verkleinerung von $X$ zu einer offenen, affinen Umgebung $\operatorname{Spf} B$ von $x$ sei $\xi_\nu \in B$ ein Erzeuger des zum Divisors $X_0^\nu$ gehörenden Ideals. Wie im Beweis von Satz 3.3, Punkt 2. ausgeführt, gilt auf $X$ die Gleichung $\pi = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r$ . Folglich gibt es einen Morphismus

$$f : X \;=\; \operatorname{Spf} B \;\longrightarrow\; \operatorname{Spf} A \;=:\; V\,,$$

wobei $A := R\,\langle \xi_1, \ldots, \xi_r \rangle / (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r - \pi)$ ist.

Um zu zeigen, daß $f$ formal glatt in $x$ ist, müssen wir nach [FRG, II, Lemma 1.2] zeigen, daß $f$ in $x$ flach und die Faser

$$f_0 : X_0 \;\longrightarrow\; V_0 \;=\; \operatorname{Spec} k\,[\xi_1, \ldots, \xi_r] / (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r)$$

in $x$ glatt ist.

2. Wir zeigen zunächst, daß $f$ in $x$ flach ist. Zu dem Punkt $v := f(x)$ in $V$ gehört das maximale Ideal $I := (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ von $A$ . Wir betrachten die Komplettierung

$$\widehat{A^I} \;=\; R\,[\![\xi_1, \ldots, \xi_r]\!] / (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r - \pi)$$

von $A$ nach $I$ . Diese ist gleich der Komplettierung des lokalen Ringes $A_v$ nach Lemma 2.9 . Die $IB$-adische Komplettierung $\widehat{B}$ von $B$ ist nach Satz 3.3 flach über $\widehat{A^I}$ . Da Lokalisieren und Komplettieren flache Operationen sind, ist somit auch die maximal-adische Komplettierung $(\widehat{B}_x)^\wedge$ der Lokalisierung von $\widehat{B}$ nach dem zu $x$ gehörenden maximalen Ideal flach über $\widehat{A^I}$ . Nach Lemma 2.9 ist aber $(\widehat{B}_x)^\wedge$ gleich der Komplettierung des lokalen Ringes $B_x$ . Nun besagt [Bo, Proposition III.5.4.4] angewandt auf den $A_v$-Modul $B_x$ , daß $B_x$ flach über $A_v$ ist. Also ist $f$ in $x$ flach.

3. Um zu zeigen, daß $f_0$ in $x$ glatt ist, genügt es nach [BLR, Proposition 2.4.8] zu zeigen, daß $f_0$ in $x$ flach ist und daß die Faser $X_0 \times_{V_0} k(v)$ über $k(v) = k$ in $x$ glatt ist.

Da $f$ in $x$ flach ist, ist auch $f_0$ in $x$ flach.

Die Faser über $v$ ist gleich

$$\mathrm{V}(\xi_1, \ldots, \xi_r) \;=\; X_0^{\{1,\ldots,r\}} \;\longrightarrow\; \operatorname{Spec} k$$

und somit glatt nach Bedingung d) von Definition 3.1 . Alles zusammen zeigt, daß $f$ formal glatt in $x$ ist. Da der formal glatte Ort von $f$ offen ist, gibt es eine offene Umgebung von $x$ , auf der $f$ formal glatt ist. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung b) gezeigt.

4. Wir zeigen nun noch, daß b) auch hinreichend für a) ist. Sei also die Bedingung b) erfüllt.

Die vier Eigenschaften aus Definition 3.1 sind wegen $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim X$ lokal auf $X$ . Wir können also die Umgebung $U$ aus b) so verkleinern, daß $x$ auf jeder irreduziblen Komponente von $U$ liegt. $U$ ist formal glatt über $A := R\langle\xi_1, \ldots, \xi_r\rangle/(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r - \pi)$ von relativer Dimension $d$ .

Da $U_{\mathrm{rig}}$ glatt über $A \otimes_R K$ und $A \otimes_R K$ glatt über $K$ ist, ist auch $U_{\mathrm{rig}}$ glatt über $K$ .

Nach [FRG, II, Lemma 1.2] ist $U_0$ glatt von relativer Dimension $d$ über $A_0$ . Da ferner $A_0$ geometrisch reduziert ist, ist nach [BLR, Proposition 2.3.9] auch $U_0$ geometrisch reduziert.

Auf $U_0$ gilt $\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r = 0$ . Deshalb ist jede irreduzible Komponente von $U_0$ in einem $\mathrm{V}(\xi_i)$ enthalten. Da $U_0$ glatt über $A_0$ ist, hat $\mathrm{V}(\xi_i)$ dieselbe Dimension wie $U_0$. Die irreduziblen Komponenten von $\mathrm{V}(\xi_i)$ sind also irreduzible Komponenten von $U_0$ und schneiden sich somit in $x$ . Da $A_0/(\xi_i)$ regulär ist, ist nach [BLR, Proposition 2.3.9] auch $\mathrm{V}(\xi_i)$ regulär. Deshalb ist $\mathrm{V}(\xi_i)$ irreduzibel und die irreduziblen Komponenten von $U_0$ sind gerade die $\mathrm{V}(\xi_i)$ . Dies zeigt, daß die irreduziblen Komponenten von $X_0$ Divisoren auf $X$ sind.

Der Durchschnitt irreduzibler Komponenten ist von der Form $\mathrm{V}(\xi_i \,:\, i \in M)$ und somit glatt von relativer Dimension $d$ über $A_0/(\xi_i \,:\, i \in M)$ . Da $A_0/(\xi_i \,:\, i \in M)$ Dimension $\dim A - \#M$ hat, folgt die Behauptung mit $d + \dim A \;=\; \dim \mathcal{O}_{X,x} \;=\; \dim X$ . □

**Korollar 3.5.**
*Jedes strikt semistabile, zulässige, formelle $R$-Schema ist regulär.*

Beweis:
Nach Satz 3.4 besitzt jeder Punkt eine Umgebung, die formal glatt über dem regulären formellen Schema

$$\operatorname{Spf} R\,\langle\xi_1, \ldots, \xi_r\rangle/(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r - \pi)\,.$$

ist. Somit ist diese Umgebung regulär nach Satz 2.7 . □

**Korollar 3.6.**
*Sei $X$ ein strikt semistabiles, zulässiges, formelles $R$-Schema und $R \subseteq R'$ eine endliche Ringerweiterung.*

a) *Ist $R \subseteq R'$ unverzweigt, so ist $V \otimes_R R'$ strikt semistabil über $R'$ .*

b) *Ist $R \subseteq R'$ verzweigt, so gibt es eine zulässige, formelle Aufblasung von $V \otimes_R R'$ , welche strikt semistabil über $R'$ ist.*

Beweis:
Behauptung a) ist klar, da die Uniformisierende $\pi$ von $R$ auch Uniformisierende von $R'$ ist.

Behauptung b) folgt mit Lemma 3.10 . □

Während jede glatte, affinoide, rigid analytische Kurve ein strikt semistabiles, formelles Modell besitzt (verwende [BL 1, Theorem 7.1]), ist dies für höherdimensionale rigid analytische Varietäten eine offene Frage.

**Vermutung 3.7.**
*Sei $X_K$ eine glatte, quasikompakte, rigid analytische Varietät über $K$.*

*Dann existiert nach einer endlichen Körpererweiterung $K'$ von $K$ ein strikt semistabiles, formelles Modell von $X_K \otimes_K K'$.*

Heuristik:
Wir argumentieren induktiv über die Dimension von $X_K$. Da $X_K$ glatt von relativer Dimension $d$ über $K$ ist, können wir $X_K$ lokal als glatte Kurvenfaserung $f_K : X_K \longrightarrow \mathbb{D}_K^{d-1} =: S_K$ schreiben.

Nach [Lü 3, Theorem 5.9] besitzt $f_K$ étale-lokal auf $X_K$ ein formelles Modell $f : X \longrightarrow S$, so daß $f$ flach ist mit geometrisch reduzierten Fasern. Die Singularitäten von $f$ sind schlimmstenfalls gewöhnliche Mehrfachpunkte.

Wenn es gelänge, hierbei „étale lokal auf $X_K$“ zu streichen, so würde die Methode von A.J. de Jong [dJ] mit dem Modulraum der stabilen Kurven zum Ziel führen. Sie ergibt, daß die Singularitäten von $f$ schlimmstenfalls gewöhnliche Doppelpunkte sind. Auch bei dieser Methode müßte sich noch die Einschränkung „étale lokal“ streichen lassen. Es gibt jedoch derzeit keine Hinweise, wie sich dies erreichen ließe.

Da wir in der Lage sind einen treu-flachen, quasikompakten Abstieg durchzuführen (Satz 5.9) ist für unsere Zwecke in dieser Arbeit eine erheblich schwächere Vermutung ausreichend. Für sie besteht ein konkreter Ansatz.

**Vermutung 3.8.**
*Sei $X_K$ eine glatte, rigid analytische Varietät über $K$.*

*Dann existiert nach einer endlichen Körpererweiterung von $K$ ein étaler, surjektiver, quasikompakter Morphismus $X'_K \longrightarrow X_K$ für eine rigid analytische Varietät $X'_K$, welche ein strikt semistabiles, formelles Modell besitzt.*

Heuristik:
Auch hier argumentieren wir induktiv über die Dimension von $X_K$ und schreiben $X_K$ lokal als glatte Kurvenfaserung $f_K : X_K \longrightarrow \mathbb{D}_K^{d-1} =: S_K$. Nach [Lü 3, Theorem 5.9] besitzt $f_K$ erneut étale-lokal auf $X_K$ ein formelles Modell $f : X \longrightarrow S$, so daß $f$ flach ist mit geometrisch reduzierten Fasern. Die Singularitäten von $f$ sind wieder schlimmstenfalls gewöhnliche Mehrfachpunkte.

Nun genügt es aber, diesen Satz dahingehend zu verbessern, daß $f$ eine split semistabile Kurve ist. Dann könnten wir den Beweis der Vermutung analog zu [dJ, 6.16] erbringen. Wir führen dies genauer aus. Nach Induktionsannahme besitzt $S_K$ étale lokal ein strikt semistabiles, formelles Modell $S'$. Wir führen einen Basiswechsel mit $S'$ durch. Dann hat $X$ lokal in einem singulären Punkt $x$ die Gestalt

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \;\cong\; C[\![\xi_1, \dots \xi_r]\!][\![u,v]\!]/(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_r - \pi,\; uv - \xi_1^{n_1} \cdot \dots \cdot \xi_r^{n_r})$$

(vergleiche [dJ, 3.4] und Satz 3.3). Durch Aufblasen der Ideale $(u, v, \xi_i)$ in $X$ verringern wir die Exponenten $n_i$ jeweils um $2$, so daß schließlich $n_i \in \{0, 1\}$ ist. Nun führen wir die restliche Desingularisierung durch wie in Lemma 3.9 beschrieben. Wir erhalten so ein strikt semistabiles Modell $X'$ von $X_{_K}$ (vergleiche [dJ, 3.6]).

Warum besteht nun Grund zu der Annahme daß sich [Lü 3, Theorem 5.9] wie beschrieben verbessern läßt? Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, zunächst $X_{_K}$ in eine glatte, projektive Kurve $\overline{f}_{_K} : \overline{X}_{_K} \longrightarrow S_{_K}$ einzubetten. Dies ist étale-lokal auf $S_{_K}$ und $X_{_K}$ möglich ([Lü 3, Theorem 5.3]). Diese besitzt eine semistabile Kurve $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow S$ als formelles Modell ([Lü 3, Theorem 5.2]). Die Schwierigkeit in [Lü 3, Theorem 5.9] ist nun, $X_{_K}$ als formell offenen Teil von $\overline{X}$ zu realisieren. Dabei geht die Semistabilität von $\overline{f}$ verloren.

Die Methoden von [dJ] sollten es jedoch ermöglichen, ausgehend von $\overline{f}$ eine split semistabile, projektive Kurve $\overline{X}'$ über $S'$ mit $S'_{_K}$ étale über $S_{_K}$ zu finden, die eine formell offene Teilmenge $X'_{_K}$ enthält, welche étale über $X_{_K}$ ist.

Die vollständige Ausführung dieses Ansatzes würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Deshalb wollen wir die Vermutung hier als richtig annehmen. Wir benützen sie im Beweis der universellen Eigenschaft der Picard-Varietäten (Sätze 5.11 und 5.12).

Die Vermutung 3.7 ist aber eine aktuelle Frage von allgemeinem Interesse, die aufgegriffen werden sollte.

## 3.2 Desingularisierung

Sowohl im Studium strikt semistabiler Modelle, als auch bei der Ausdehnung von rigiden zu formellen Geradenbündeln benötigen wir gewisse Desingularisierungsprozeduren. Wir wollen diese hier darstellen. Damit reichen wir auch noch fehlende Argumente im Beweis von Korollar 3.6 und in der Heuristik zu Vermutung 3.8 nach.

Seien nun $X_K$ und $V_K$ glatte, rigid analytische Varietäten über $K$ mit strikt semistabilen, formellen Modellen $X$ beziehungsweise $V$.

Sei ferner $R \subseteq R'$ eine verzweigte Erweiterung diskreter Bewertungsringe. Der Quotientenkörper von $R'$ sei $K'$. Die Uniformisierende von $R'$ sei $\pi'$, so daß $\pi = u' \cdot (\pi')^e$ für eine Einheit $u'$ in $R'$ ist. Dabei ist $e \in \mathbb{N}$ der Verzweigungsindex.

Bei der Ausdehnung von Geradenbündeln handelt es sich um folgende Fragestellungen.

1. Sei $\mathcal{L}_K$ ein Geradenbündel auf $X_K \times_K V_K$. Läßt sich $\mathcal{L}_K$ zu einem Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $X \times_R V$ ausdehnen?
2. Sei $\mathcal{L}_K$ ein Geradenbündel auf $X_K \times_K K'$. Läßt sich $\mathcal{L}_K$ zu einem Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $X \times_R R'$ ausdehnen?

Wir wollen zeigen (Satz 4.14), daß beides lokal auf $X$ möglich ist, falls im ersten Fall das rigide Testschema $V_K$ folgende Bedingung erfüllt:

(∗) $V_K$ sei eine glatte, rigid analytische Varietät über $K$, welche ein strikt semistabiles, formelles Modell $V$ habe. $V$ sei formal glatt über dem formellen Schema

$$\operatorname{Spf} R\langle\zeta_1, \dots, \zeta_n\rangle/(\zeta_1 \cdot \ldots \cdot \zeta_n - \pi).$$

Die Strata $V_0^M$ (siehe Definition 3.1) seien geometrisch irreduzibel für alle $M$. Der Durchschnitt aller dieser Strata sei nicht leer.

Zunächst wollen wir erklären, wie wir eine Desingularisierung von $X \times_R V$ beziehungsweise $X \times_R R'$ erhalten können. Dies führt zu Desingularisierungen von Objekten der folgenden Form.

**Lemma 3.9.**
*Für $m \geq 1$ und $n \geq 1$ seien $A$ und $B$ die folgenden formellen $R$-Algebren*

$$\begin{aligned} A &= R\langle\xi_1, \dots, \xi_m\rangle \,/\, (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_m - \pi)\,, \\ B &= R\langle\zeta_1, \dots, \zeta_n\rangle \,/\, (\zeta_1 \cdot \ldots \cdot \zeta_n - \pi)\,. \end{aligned}$$

*Es gibt es eine Desingularisierung von $A \widehat{\otimes}_R B$, welche erhalten wird als Sequenz*

$$\operatorname{Spf}\left(A \widehat{\otimes}_R B\right) = Y^0 \longleftarrow Y^1 \longleftarrow \ldots \longleftarrow Y^r$$

*von Aufblasungen in offenen Idealen*

$$\mathcal{I}^\rho \subseteq \mathcal{O}_{Y^\rho} \qquad \text{für} \quad \rho = 0, \dots, r-1$$

*die lokal von zwei Elementen erzeugt werden. Es gilt:*

a) *Die $Y^\rho$ sind normal für $\rho = 0, \dots, r$.*

b) $Y^r$ *ist strikt semistabil, also insbesondere regulär.*

c) *Bei jeder Aufblasung haben die irreduziblen Komponenten des Zentrums* $Z^\rho$ *die Form*

$$\mathrm{V}(\xi_i,\, i \in M) \times_k \mathrm{V}(\zeta_j,\, j \in N) \times_k \left(\mathbb{P}^1_k\right)^\alpha, \quad M \subseteq \{1, \ldots, m\}\,,\, N \subseteq \{1, \ldots, n\}\,.$$

*Sie besitzen alle einen gemeinsamen Punkt oberhalb* $(\xi_1, \ldots, \xi_m,\, \zeta_1, \ldots, \zeta_n,\, \pi)$ *. Insbesondere ist* $Z^\rho$ *zusammenhängend.*

d) *Die zurückgezogene Garbe* $\mathcal{I}^\rho \cdot \mathcal{O}_{Y^{\rho+1}}$ *induziert das Geradenbündel* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ *auf den Fasern über allen Punkten von* $Z^\rho$ *.*

Beweis:
Für $1 \leq \mu \leq m$ und $1 \leq \nu \leq n$ sei $C$ die formelle $R$-Algebra

$$R\,\langle \xi_1^{(r_1)}, \ldots, \xi_m^{(r_m)},\, \zeta_1^{(s_1)}, \ldots, \zeta_n^{(s_n)} \rangle$$

in den Unbestimmten $\xi_1^{(r_1)}, \ldots, \xi_m^{(r_m)},\, \zeta_1^{(s_1)}, \ldots, \zeta_n^{(s_n)}$ modulo der Relationen

$$\begin{aligned} \xi_\mu^{(r_\mu)} \cdot \ldots \cdot \xi_m^{(r_m)} - \zeta_\nu^{(s_\nu)} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{(s_n)} \qquad &= \quad 0 \qquad \text{und} \\ \xi_1^{(r_1)} \cdot \ldots \cdot \xi_m^{(r_m)} \cdot \zeta_1^{(s_1)} \cdot \ldots \cdot \zeta_{\nu-1}^{(s_{\nu-1})} - \pi \quad &= \quad 0\,. \end{aligned}$$

Um die Zentren der Aufblasungen kontrollieren zu können, die wir bei der Desingularisierung von $A \widehat{\otimes}_R B$ verwenden, bezeichnen wir die Unbestimmten hier mit $\xi_i^{(r_i)}$ und $\zeta_j^{(s_j)}$. Die ursprünglichen Variablen $\xi_i$ und $\zeta_j$ sind Vielfache der $\xi_i^{(r_i)}$ und $\zeta_j^{(s_j)}$. Die bei den Aufblasungen neu hinzukommenden Unbestimmten heißen entsprechend $\xi_i^{(1+r_i)}$ und $\zeta_j^{(1+s_j)}$. Beginnend mit $\mu = \nu = 1$ und $r_i = s_j = 0$ für alle $i$ und $j$ konstruieren wir nun schrittweise eine Desingularisierung von $C$ .

Nach [Ei, Propositionen 18.2 und 18.13] ist $C$ Cohen-Macaulay, da die beiden Relationen, die $C$ beschreiben, eine reguläre Sequenz auf

$$R\,\langle \xi_1^{(r_1)}, \ldots, \xi_m^{(r_m)},\, \zeta_1^{(s_1)}, \ldots, \zeta_n^{(s_n)} \rangle$$

bilden. Ferner ist $C$ regulär in allen Primidealen, die nur eines der $\xi_\mu^{(r_\mu)}, \ldots, \xi_m^{(r_m)}$ enthalten. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, in dem $C$ nicht regulär ist. Dann enthält $\mathfrak{p}$ zwei verschiedene $\xi_i^{(r_i)}$ und $\xi_j^{(r_j)}$ mit $i, j \geq \mu$. Da $\left(\xi_i^{(r_i)}, \xi_j^{(r_j)}\right)$ eine reguläre Sequenz auf $C$ ist, hat $\mathfrak{p}$ Tiefe $\geq 2$ und somit auch Kodimension $\geq 2$ nach [Ei, Proposition 18.2]. Das heißt, $C$ ist regulär in Kodimension eins und folglich normal nach dem Kriterium von Serre ([Ei, Theorem 11.5]).

Ferner folgt, falls $\mu = m$ oder $\nu = n$ ist, daß $C$ strikt semistabil ist.

Seien nun $\mu < m$ und $\nu < n$. Wir führen Induktion nach $\max\{\, m - \mu,\, n - \nu \,\}$. Wir blasen das offene Ideal $\left(\xi_\mu^{(r_\mu)}, \zeta_\nu^{(s_\nu)}\right)$ auf. Das Zentrum $Z$ der Aufblasung zerfällt wie folgt in irreduzible Komponenten:

$$\begin{aligned} Z \quad &= \quad \mathrm{V}\left(\xi_\mu^{(r_\mu)},\, \xi_{\mu+1}^{(r_{\mu+1})} \cdot \ldots \cdot \xi_m^{(r_m)},\, \zeta_\nu^{(s_\nu)},\, \zeta_{\nu+1}^{(s_{\nu+1})} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{(s_n)},\, \pi\right) \\ &= \quad \bigcup_{\kappa=\mu+1}^{m} \; \bigcup_{\lambda=\nu+1}^{n} \mathrm{V}\left(\xi_\mu^{(r_\mu)},\, \xi_\kappa^{(r_\kappa)},\, \zeta_\nu^{(s_\nu)},\, \zeta_\lambda^{(s_\lambda)},\, \pi\right). \end{aligned}$$

Die irreduziblen Komponenten sind von der Form

$$\mathrm{V}(\pi,\, \xi_i,\, i \in M) \times_k \mathrm{V}(\pi,\, \zeta_j,\, j \in N) \times_k \left(\mathbb{P}^1_k\right)^\alpha,$$

wobei $M$ die Menge der $i$ und $N$ die Menge der $j$ ist, für die $\xi_i$ beziehungsweise $\zeta_j$ in $\left(\xi_\mu^{(r_\mu)}, \xi_\kappa^{(r_\kappa)}, \zeta_\nu^{(s_\nu)}, \zeta_\lambda^{(s_\lambda)}\right)$ liegt. Die zugehörigen $\xi_i^{(r_i)}$ und $\zeta_j^{(s_j)}$ bilden die freien Koordinaten der $\mathbb{P}^1_k$. Die Komponenten schneiden sich alle in

$$\mathrm{V}\left(\xi_\mu^{(r_\mu)}, \ldots, \xi_m^{(r_m)}, \zeta_\nu^{(s_\nu)}, \ldots, \zeta_n^{(s_n)}, \pi\right)$$

und enthalten somit alle den Punkt

$$\mathrm{V}\left(\xi_1^{(r_1)}, \ldots, \xi_m^{(r_m)}, \zeta_1^{(s_1)}, \ldots, \zeta_n^{(s_n)}, \pi\right) \cong \operatorname{Spec} k$$

oberhalb des Punktes $(\xi_1, \ldots, \xi_m, \zeta_1, \ldots, \zeta_n, \pi)$.

Wir erhalten zwei Karten der Aufblasung $Y'$:

- $\xi_\mu^{(r_\mu)} = \zeta_\nu^{(s_\nu)} \cdot \xi_\mu^{(1+r_\mu)}$: Die Relationen sind dort äquivalent zu

$$\begin{aligned} \xi_\mu^{(1+r_\mu)} \cdot \ldots \cdot \xi_m^{(r_m)} - \zeta_{\nu+1}^{(s_{\nu+1})} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{(s_n)} &= 0 \qquad \text{und} \\ \xi_1^{(r_1)} \cdot \ldots \cdot \xi_\mu^{(1+r_\mu)} \cdot \ldots \cdot \xi_m^{(r_m)} \cdot \zeta_1^{(s_1)} \cdot \ldots \cdot \zeta_\nu^{(s_\nu)} - \pi &= 0\,. \end{aligned}$$

  Somit wurde die Zahl $\nu$ um 1 erhöht, während $\mu$ gleich blieb und die Induktionshypothese läßt sich anwenden. Die Zahl $r_\mu$ wurde dabei ebenfalls um 1 erhöht.

- $\zeta_\nu^{(s_\nu)} = \xi_\mu^{(r_\mu)} \cdot \zeta_\nu^{(1+s_\nu)}$: Die Relationen sind dort äquivalent zu

$$\begin{aligned} \xi_{\mu+1}^{(r_{\mu+1})} \cdot \ldots \cdot \xi_m^{(r_m)} - \zeta_\nu^{(1+s_\nu)} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{(s_n)} &= 0 \qquad \text{und} \\ \xi_1^{(r_1)} \cdot \ldots \cdot \xi_m^{(r_m)} \cdot \zeta_1^{(s_1)} \cdot \ldots \cdot \zeta_{\nu-1}^{(s_{\nu-1})} - \pi &= 0\,. \end{aligned}$$

  Somit wurde die Zahl $\mu$ um 1 erhöht, während $\nu$ gleich blieb und die Induktionshypothese läßt sich anwenden. Die Zahl $s_\nu$ wurde dabei ebenfalls um 1 erhöht.

Die zurückgezogene Garbe $\left(\xi_\mu^{(r_\mu)}, \zeta_\nu^{(s_\nu)}\right) \cdot \mathcal{O}_{Y'}$ induziert das Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ auf den Fasern über allen Punkten des Zentrums. $\square$

**Lemma 3.10.**
*Für* $m \geq 1$ *und* $e \geq 1$ *sei* $A$ *die folgende formelle* $R$*-Algebra*

$$A = R\langle \eta_1, \ldots, \eta_m \rangle \,/\, (\eta_1 \cdot \ldots \cdot \eta_m - \pi^e)\,.$$

*Falls* $e = 1$ *ist, so ist* $A$ *regulär.*
*Falls* $e \geq 2$ *ist, so gibt es eine Desingularisierung von* $A$*, welche erhalten wird als Sequenz*

$$\operatorname{Spf} A = Y^0 \longleftarrow Y^1 \longleftarrow \ldots \longleftarrow Y^r$$

*von Aufblasungen in offenen Idealen*

$$\mathcal{I}^\rho \subseteq \mathcal{O}_{Y^\rho} \qquad \textit{für} \quad \rho = 0, \ldots, r-1$$

*die lokal von zwei Elementen erzeugt werden. Es gilt:*

a) *Die* $Y^\rho$ *sind normal für* $\rho = 0, \ldots, r$.

b) $Y^r$ *ist strikt semistabil, also insbesondere regulär.*

c) *Bei jeder Aufblasung haben die irreduziblen Komponenten des Zentrums* $Z^\rho$ *die Form*

$$\mathrm{V}(\pi,\, \eta_i,\, i\in M) \times_k \left(\mathbb{P}^1_k\right)^\alpha, \qquad M \subseteq \{1,\ldots,m\}.$$

*Sie besitzen alle einen gemeinsamen Punkt oberhalb* $(\eta_1,\ldots,\eta_m,\,\pi)$. *Insbesondere ist* $Z^\rho$ *zusammenhängend.*

d) *Die zurückgezogene Garbe* $\mathcal{I}^\rho \cdot \mathcal{O}_{Y^{\rho+1}}$ *induziert das Geradenbündel* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ *auf den Fasern über allen Punkten von* $Z^\rho$.

Beweis: Induktion nach $e$.
Beginnend mit $\nu = 0$ desingularisieren wir schrittweise die formelle $R$-Algebra

$$C \;:=\; R\,\langle\eta_1^{(\nu)},\,\eta_2,\ldots,\eta_m\rangle \,/\, \left(\eta_1^{(\nu)}\cdot\eta_2\cdot\ldots\cdot\eta_m - \pi^{e-\nu}\right)$$

mit $\eta_1 = \pi^\nu\,\eta_1^{(\nu)}$. Diese ist Cohen-Macaulay nach [Ei, Propositionen 18.2 und 18.13], da die Relation, die $C$ beschreibt, Nichtnullteiler in

$$R\,\langle\eta_1^{(\nu)},\,\eta_2,\ldots,\eta_m\rangle$$

ist. Ferner ist $C$ regulär in allen Primidealen, die nur eines der $\eta_1^{(\nu)},\,\eta_2,\ldots,\eta_m$ enthalten. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, in dem $C$ nicht regulär ist. Dann gibt es zwei verschiedene $\eta_i$ und $\eta_j$ in $\mathfrak{p}$. Da $(\eta_i,\,\eta_j)$ eine reguläre Sequenz auf $C$ ist, hat $\mathfrak{p}$ Tiefe $\geq 2$ und somit auch Kodimension $\geq 2$ nach [Ei, Proposition 18.2]. Das heißt, $C$ ist regulär in Kodimension eins und folglich normal nach dem Kriterium von Serre ([Ei, Theorem 11.5]).

Ferner folgt, falls $e-\nu = 1$ ist, daß $C$ strikt semistabil ist.

Sei nun $e-\nu \geq 2$. Wir blasen das offene Ideal $\left(\eta_1^{(\nu)},\pi\right)$ auf. Das Zentrum $Z$ der Aufblasung zerfällt wie folgt in irreduzible Komponenten:

$$Z \;=\; \mathrm{V}\left(\eta_1^{(\nu)},\,\eta_2\cdot\ldots\cdot\eta_m,\,\pi\right) \;=\; \bigcup_{i=2}^{m}\mathrm{V}\left(\eta_1^{(\nu)},\,\eta_i,\,\pi\right).$$

Die irreduziblen Komponenten sind wegen $\eta_1 = \pi^\nu\,\eta_1^{(\nu)}$ von der Form $\mathrm{V}\,(\eta_1,\,\eta_i,\,\pi) \subseteq \operatorname{Spf} A$ und schneiden sich alle in dem Punkt

$$\mathrm{V}\,(\eta_1,\,\eta_2,\ldots,\,\eta_m,\,\pi) \;\cong\; \operatorname{Spec} k \;\neq\; \emptyset.$$

Wir erhalten zwei Karten der Aufblasung $Y'$:

- $\eta_1^{(\nu)} = \pi\cdot\eta_1^{(\nu+1)}$: Die Relation ist dort äquivalent zu

  $$\eta_1^{(\nu+1)}\cdot\eta_2\cdot\ldots\cdot\eta_m - \pi^{e-(\nu+1)} \;=\; 0.$$

  Somit wurde der Exponent von $\pi$ um 1 verringert und die Induktionshypothese läßt sich anwenden.

- $\pi \;=\; \eta_1^{(\nu)}\cdot\pi'$: In diesem Fall benötigen wir zwei Gleichungen um die Relationen zu beschreiben:

  $$\eta_2\cdot\ldots\cdot\eta_m \;-\; \pi^{e-(\nu+1)}\pi' \quad=\quad \pi'\cdot\eta_1^{(\nu)} \;-\; \pi \quad=\quad 0.$$

  Dieser Fall wird von dem folgenden Lemma 3.11 für $\mu = 2$ und $\eta_0^{(s_0)} = \pi'$ behandelt.

Die zurückgezogene Garbe $\left(\eta_1^{(\nu)}, \pi\right) \cdot \mathcal{O}_{Y'}$ induziert das Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ auf den Fasern über allen Punkten des Zentrums. □

**Lemma 3.11.**
*Seien* $1 \le \mu \le m,\ e \ge 1$ *und* $s_j \ge 0$ *für alle* $j$ *. Für ein* $J \subseteq \{0, \dots, \mu - 1\}$ *sei* $A$ *die formelle* $R$*-Algebra*

$$R\,\langle \eta_0^{(s_0)}, \dots, \eta_\mu^{(s_\mu)},\ \eta_{\mu+1}, \dots, \eta_m \rangle$$

*modulo der Relationen*

$$\eta_\mu^{(s_\mu)} \cdot \eta_{\mu+1} \cdot \ldots \cdot \eta_m \;-\; \pi^e \cdot \prod_{i \in J} \eta_i^{(s_i)} \quad = \quad \eta_0^{(s_0)} \cdot \ldots \cdot \eta_{\mu-1}^{(s_{\mu-1})} - \pi \quad = \quad 0\,.$$

*Dann läßt sich eine Desingularisierung von* $A$ *konstruieren, wie in Lemma 3.10 behauptet.*

<u>Beweis:</u>
<u>1.</u> Induktion nach $e$.
Nach [Ei, Propositionen 18.2 und 18.13] ist $A$ Cohen-Macaulay, da die beiden Relationen, die $A$ beschreiben, eine reguläre Sequenz auf

$$R\,\langle \eta_0^{(s_0)}, \dots, \eta_\mu^{(s_\mu)},\ \eta_{\mu+1}, \dots, \eta_m \rangle$$

bilden. Ferner ist $A$ regulär in allen Primidealen, die nur eines der $\eta_\mu^{(s_\mu)},\ \eta_{\mu+1}, \dots, \eta_m$ enthalten. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, in dem $A$ nicht regulär ist. Dann gibt es zwei verschiedene $\eta_i^{(s_i)}$ und $\eta_j^{(s_j)}$ mit $i, j \ge \mu$ in $\mathfrak{p}$. Da $\left(\eta_i^{(s_i)},\ \eta_j^{(s_j)}\right)$ eine reguläre Sequenz auf $A$ ist, hat $\mathfrak{p}$ Tiefe $\ge 2$ und somit auch Kodimension $\ge 2$ nach [Ei, Proposition 18.2]. Das heißt, $A$ ist regulär in Kodimension eins und folglich normal nach dem Kriterium von Serre ([Ei, Theorem 11.5]).

Ferner folgt, falls $\mu = m$ ist, daß $A$ strikt semistabil ist.

Falls $J = \emptyset$ ist, so sind die Relationen äquivalent zu

$$\eta_\mu^{(s_\mu)} \cdot \eta_{\mu+1} \cdot \ldots \cdot \eta_m \;-\; \pi^{e-1} \cdot \eta_0^{(s_0)} \cdot \ldots \cdot \eta_{\mu-1}^{(s_{\mu-1})} \quad = \quad \eta_0^{(s_0)} \cdot \ldots \cdot \eta_{\mu-1}^{(s_{\mu-1})} - \pi \quad = \quad 0\,.$$

Somit wurde $e$ um 1 reduziert und der Fall ist für $e - 1 \ge 1$ auf die Induktionshypothese zurückgeführt. Für den Induktionsanfang $e - 1 = 0$ läßt sich die restliche Desingularisierung gemäß Lemma 3.9 konstruieren. Mit den Bezeichnungen von Lemma 3.9 setzen wir dabei $\xi_1, \dots, \xi_m = \eta_\mu^{(s_\mu)},\ \eta_{\mu+1}, \dots, \eta_m$ und $\zeta_1, \dots, \zeta_n = \eta_0^{(s_0)}, \dots, \eta_{\mu-1}^{(s_{\mu-1})}$. Für jede der weiteren Aufblasungen haben dann nach Lemma 3.9 die irreduziblen Komponenten des Zentrums die Form

$$\mathrm{V}\left(\pi,\ \eta_j^{(s_j)},\ j \in N\right) \times_k \left(\mathbb{P}_k^1\right)^\alpha\,, \qquad N \subseteq \{0, \dots, m\}\,.$$

Diese sind von der Form

$$\mathrm{V}(\pi,\ \eta_i,\ i \in M) \times_k \left(\mathbb{P}_k^1\right)^\beta\,, \qquad M \subseteq \{0, \dots, m\}\,,$$

wobei $M \supseteq N$ die Menge der $i$ ist, für die $\eta_i \in \left(\eta_j^{(s_j)},\ j \in N\right)$ ist. Die zugehörigen $\eta_i^{(s_i)}$ für $i \in M - N$ bilden die freien Koordinaten der $\mathbb{P}_k^1$. Die restlichen Behauptungen ergeben sich ebenfalls aus Lemma 3.9.

<u>2.</u> Durch Induktion nach $\min\{m - \mu,\ \#J\}$ reduzieren wir nun für festes $e$ die Situation des Lemmas auf den Fall $\mu = m$ oder $J = \emptyset$. Sei also $\mu < m$ und $j \in J \ne \emptyset$. Wir blasen das

offene Ideal $\left(\eta_\mu^{(s_\mu)}, \eta_j^{(s_j)}\right)$ auf. Das Zentrum $Z$ der Aufblasung zerfällt wie folgt in irreduzible Komponenten:

$$Z \;=\; \mathrm{V}\left(\eta_j^{(s_j)},\, \eta_\mu^{(s_\mu)},\, \eta_{\mu+1}\cdot\ldots\cdot\eta_m,\, \pi\right) \;=\; \bigcup_{\nu=\mu+1}^{m} \mathrm{V}\left(\eta_j^{(s_j)},\, \eta_\mu^{(s_\mu)},\, \eta_\nu,\, \pi\right).$$

Die irreduziblen Komponenten sind von der Form $\mathrm{V}(\pi,\, \eta_\nu,\, \eta_i,\, i \in M) \times_k \left(\mathbb{P}_k^1\right)^\alpha$, wobei $M$ die Menge der $i$ ist, für die $\eta_i \in \left(\eta_\mu^{(s_\mu)},\, \eta_j^{(s_j)}\right)$ ist. Die zugehörigen $\eta_i^{(s_i)}$ bilden die freien Koordinaten der $\mathbb{P}_k^1$. Die Komponenten schneiden sich alle in

$$\mathrm{V}\left(\eta_j^{(s_j)},\, \eta_\mu^{(s_\mu)},\, \eta_{\mu+1}, \ldots, \eta_m,\, \pi\right)$$

und enthalten somit alle den Punkt

$$\mathrm{V}\left(\eta_0^{(s_0)}, \ldots, \eta_\mu^{(s_\mu)},\, \eta_{\mu+1}, \ldots, \eta_m,\, \pi\right) \;\cong\; \operatorname{Spec} k$$

oberhalb des Punktes $(\eta_1, \ldots, \eta_m,\, \pi)$.

Wir erhalten zwei Karten der Aufblasung $Y'$:

- $\eta_\mu^{(s_\mu)} = \eta_j^{(s_j)} \cdot \eta_\mu^{(1+s_\mu)}$: Die Relationen sind dort äquivalent zu

$$\eta_\mu^{(1+s_\mu)} \cdot \eta_{\mu+1} \cdot \ldots \cdot \eta_m \,-\, \pi^e \cdot \prod_{i \in J-\{j\}} \eta_i^{(s_i)} \;=\; \eta_0^{(s_0)} \cdot \ldots \cdot \eta_{\mu-1}^{(s_{\mu-1})} - \pi \;=\; 0\,.$$

  Somit wurde die Menge $J$ um ein Element vermindert, während $\mu$ und $e$ gleich blieben und die Induktionshypothese läßt sich anwenden. Die Zahl $s_\mu$ wurde dabei um 1 erhöht.

- $\eta_j^{(s_j)} = \eta_\mu^{(s_\mu)} \cdot \eta_j^{(1+s_j)}$: Die Relationen sind dort äquivalent zu

$$\begin{aligned} \eta_{\mu+1} \cdot \ldots \cdot \eta_m \,-\, \pi^e \cdot \left(\eta_j^{(1+s_j)} \cdot \prod_{i \in J-\{j\}} \eta_i^{(s_i)}\right) &= 0 \qquad \text{und} \\ \eta_0^{(s_0)} \cdot \ldots \cdot \eta_j^{(1+s_j)} \cdot \ldots \cdot \eta_\mu^{(s_\mu)} - \pi &= 0\,. \end{aligned}$$

  Somit wurde die Zahl $\mu$ um 1 erhöht, während $e$ und $J$ gleich blieben und die Induktionshypothese läßt sich anwenden. Die Zahl $s_j$ wurde dabei ebenfalls um 1 erhöht.

Die zurückgezogene Garbe $\left(\eta_\mu^{(s_\mu)}, \eta_j^{(s_j)}\right) \cdot \mathcal{O}_{Y'}$ induziert das Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ auf den Fasern über allen Punkten des Zentrums. □

## 3.3 Einheitengruppen

Bei der Verklebung von Geradenbündeln, die auf offenen Teilmengen strikt semistabiler Modelle gegeben sind, benötigen wir die Kenntnis der Einheitengruppen auf diesen Modellen. Wir wollen diese hier untersuchen.

Zunächst gilt analog zum eindimensionalen Fall ([BGR, Lemma 9.7.1.1]) auch im höherdimensionalen folgende Beschreibung.

**Lemma 3.12.**
*Sei* $\operatorname{Sp} A_K$ *eine affinoide, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über* $K$ *. Seien* $\zeta_1, \ldots, \zeta_{r+1}$ *Unbestimmte über* $A_K$ *und* $c \in A_K^\times$ *mit* $|c| \leq 1$ *. Sei*

$$f \;=\; \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^r} a_{\underline{n}} \cdot \zeta_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \zeta_r^{n_r} \;\in\; B_K \;:=\; A_K\langle \zeta_1, \ldots, \zeta_{r+1}\rangle / (\zeta_1 \cdot \ldots \cdot \zeta_{r+1} - c)\,.$$

*Genau dann ist* $f \in B_K^\times$ *eine Einheit, wenn es einen Multiindex* $\underline{n}_0 \in \mathbb{Z}^r$ *gibt, so daß der Term* $a_{\underline{n}_0}\zeta^{\underline{n}_0}$ *in der Entwicklung von* $f$ *dominant auf* $\operatorname{Sp} B_K$ *ist, wenn also* $a_{\underline{n}_0} \in A_K^\times$ *eine Einheit ist und für alle* $\underline{n} \neq \underline{n}_0$ *gilt*

$$|a_{\underline{n}} \cdot a_{\underline{n}_0}^{-1} \cdot \zeta^{\underline{n} - \underline{n}_0}|_{B_K} \;<\; 1\,.$$

Beweis:
Es ist klar, daß die Bedingung hinreichend ist. Wir zeigen ihre Notwendigkeit. Sei also $f$ eine Einheit in $B_K^\times$ und seien $y \in \operatorname{Sp} B_K$ und $\operatorname{Sp} A'_{K'}$ die Zusammenhangskomponente von $A_K \otimes_K k(y)$ , die das Bild von $y$ enthält. Wir betrachten den affinoiden Teilbereich

$$y \;\in\; U_y \;:=\; \operatorname{Sp} A'_{K'}\langle \xi_1, \xi_1^{-1}, \ldots, \xi_r, \xi_r^{-1}\rangle\,,$$

von $\operatorname{Sp} B_K$ mit $\xi_i = \zeta_i(y)^{-1}\zeta_i$ . Nach [BGR, Lemma 9.7.1.1] besitzt dann $f|_{U_y}$ einen auf ganz $U_y$ dominantan Term. Sein Index $\underline{n}(y) \in \mathbb{Z}^r$ ist eine Funktion von $y \in \operatorname{Sp} B_K$ . Es ist also $|a_{\underline{m}}\zeta^{\underline{m}}(y)| < |a_{\underline{n}(y)}\zeta^{\underline{n}(y)}(y)|$ für alle $\underline{m} \neq \underline{n}(y)$ .

Die $a_{\underline{n}}\zeta^{\underline{n}}$ besitzen keine gemeinsame Nullstelle und somit erzeugen endlich viele von ihnen das Einsideal von $B_K$ . Da ferner $\lim_{|\underline{n}| \to \infty} |a_{\underline{n}}\zeta^{\underline{n}}|_{B_K} = 0$ ist, nimmt die Funktion $\underline{n}(y)$ nur endlich viele Werte an. Aus dem gleichen Grund ist

$$Y_{\underline{n}_0} \;:=\; \{\, y \in \operatorname{Sp} B_K :\; |a_{\underline{n}}\zeta^{\underline{n}}(y)| \;\leq\; |a_{\underline{n}_0}\zeta^{\underline{n}_0}(y)| \;\text{ für alle }\; \underline{n} \neq \underline{n}_0 \,\}$$

ein affinoider Teilbereich von $\operatorname{Sp} B_K$ . Ferner können wir aufgrund obiger Überlegung $\leq$ durch $<$ ersetzen und erhalten $Y_{\underline{n}_0} = \{\, y \in \operatorname{Sp} B_K : \underline{n}(y) = \underline{n}_0 \,\}$ . Es ist $Y_{\underline{n}_0} = \emptyset$ für alle außer endlich vieler $\underline{n}_0$ . Also ist

$$\operatorname{Sp} B_K \;=\; \bigcup_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^r} Y_{\underline{n}}$$

eine zulässige Überdeckung durch endlich viele paarweise disjunkte rationale Teilbereiche.

$\operatorname{Sp} B_K$ enthält andererseits $\operatorname{Sp} A_K\langle \zeta_1, \zeta_1^{-1}, \ldots, \zeta_r, \zeta_r^{-1}\rangle$ als Zariski-dichten affinoiden Teilbereich, welcher zusammenhängend ist, da $\operatorname{Sp} A_K$ zusammenhängend ist. Dies zeigt, daß $\operatorname{Sp} B_K$ zusammenhängend und die Funktion $\underline{n}(y)$ konstant auf $\operatorname{Sp} B_K$ ist. Somit ist die Behauptung bewiesen. □

Daraus erhalten wir folgende Beschreibung der Isomorphismen zwischen zwei Geradenbündeln.

**Lemma 3.13.**
*Sei $X_K$ eine glatte, rigid analytische Varietät über $K$ mit formellem Modell $X$, welches formal glatt über $R\langle\xi_1,\dots,\xi_{r+1}\rangle/(\xi_1\cdot\ldots\cdot\xi_{r+1}-\pi)$ sei. Die irreduziblen Komponenten von $X_0$ enthalten alle die Faser $\mathrm{V}(\xi_1,\dots,\xi_{r+1})$, welche selbst irreduzibel und nicht leer sei. Sei ebenso $V_K$ eine glatte, rigid analytische Varietät über $K$ mit formellem Modell $V$, welches formal glatt über $R\langle\zeta_1,\dots,\zeta_{s+1}\rangle/(\zeta_1\cdot\ldots\cdot\zeta_{s+1}-\pi)$ sei. Die irreduziblen Komponenten von $V_0$ enthalten alle die Faser $\mathrm{V}(\zeta_1,\dots,\zeta_{s+1})$, welche geometrisch irreduzibel und nicht leer sei. Seien $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ Geradenbündel auf $X\times_R V$. Dann ist*

$$\begin{aligned}\mathrm{Isom}_{X_K\times_K V_K}(\mathcal{L}_{\mathrm{rig}},\mathcal{M}_{\mathrm{rig}}) &= \mathrm{Isom}_{X\times_R V}(\mathcal{L},\mathcal{M})\oplus\pi^{\mathbb{Z}}\oplus\xi_1^{\mathbb{Z}}\oplus\ldots\oplus\xi_r^{\mathbb{Z}}\oplus\zeta_1^{\mathbb{Z}}\oplus\ldots\oplus\zeta_s^{\mathbb{Z}}\\ &= \Big(\mathcal{O}_{X_K}(X_K)^{\times}\cdot\mathrm{Isom}_{X\times_R V}(\mathcal{L},\mathcal{M})\Big)\oplus\zeta_1^{\mathbb{Z}}\oplus\ldots\oplus\zeta_s^{\mathbb{Z}}\,.\end{aligned}$$

<ins>Beweis:</ins>
<ins>1.</ins> Sei $Y_+$ die Komplettierung von $X\times_R V$ nach dem abgeschlossenen Unterschema

$$Y_0 \;:=\; \mathrm{V}(\xi_1,\dots,\xi_{r+1},\zeta_1,\dots,\zeta_{s+1})\,.$$

Dann sehen wir wie in Satz 3.3, daß $Y_+$ lokal durch die $R$-Algebra

$$C[\![\xi_1,\dots,\xi_{r+1}]\!]/(\xi_1\cdot\ldots\cdot\xi_{r+1}-\pi)\,\widehat{\otimes}_R\,D[\![\zeta_1,\dots,\zeta_{s+1}]\!]/(\zeta_1\cdot\ldots\cdot\zeta_{s+1}-\pi)$$

gegeben ist, für glatte, zulässige, formelle $R$-Algebren $C$ und $D$. Nach Voraussetzung sind die speziellen Fasern $\operatorname{Spec} C_0$ und $\operatorname{Spec} D_0$ integer beziehungsweise geometrisch integer. Somit ist auch $Y_0$ integer.

Sei $U^i$ eine offene, affine Überdeckung von $X\times_R V$, über der es Trivialisierungen

$$\lambda^i:\mathcal{L}|_{U^i}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{U^i}\qquad\text{und}\qquad\mu^i:\mathcal{M}|_{U^i}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{U^i}$$

gibt und die zusätzlich mit dieser lokalen Beschreibung von $Y_+$ verträglich ist.

Sei nun $\varphi_K\in\mathrm{Isom}_{X_K\times_K V_K}(\mathcal{L}_{\mathrm{rig}},\mathcal{M}_{\mathrm{rig}})$. Dies liefert auf $U^i$

$$\mu^i\circ\varphi_K|_{U^i_K}\circ(\lambda^i)^{-1}\;=:\;f^i\;\in\;\mathcal{O}(U^i_K)^{\times}\,.$$

Die Übergänge auf $U^{ij}:=U^i\cap U^j$ erfolgen durch $\mu^{ij}\cdot f^j\cdot\lambda^{ji}=f^i$, wobei $\mu^{ij}:=\mu^i\circ(\mu^j)^{-1}$ und $\lambda^{ji}:=\lambda^j\circ(\lambda^i)^{-1}$ Einheiten in $\mathcal{O}(U^{ij})^{\times}$ sind.

Betrachten wir das Geradenbündel $\mathcal{H}:=\mathcal{H}om_{X\times_R V}(\mathcal{L},\mathcal{M})$ auf $X\times_R V$, so ist

$$\varphi_K\;\in\;\Gamma\big(X_K\times_K V_K,\mathcal{H}_{\mathrm{rig}}\big)\qquad\text{und}\qquad\varphi_K^{-1}\;\in\;\Gamma\big(X_K\times_K V_K,\mathcal{H}^{\vee}_{\mathrm{rig}}\big)$$

mit $\varphi_K\otimes\varphi_K^{-1}=1\in\Gamma\big(X_K\times_K V_K,\mathcal{H}_{\mathrm{rig}}\otimes\mathcal{H}^{\vee}_{\mathrm{rig}}\big)=\Gamma\big(X_K\times_K V_K,\mathcal{O}_{X_K\times_K V_K}\big)$. Durch $\lambda^i$ und $\mu^i$ sind auch Trivialisierungen von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^{\vee}$ gegeben, welche $\varphi_K$ gerade auf $f^i$ abbilden. Wie in Abschnitt 2.2 erklärt, ist $|\varphi_K|_{U^i_K}=|f^i|_{U^i_K}$.

<ins>2.</ins> Wir betrachten zunächst diejenigen $U^i$, für die $Y^i_+\;:=\;Y_+\cap U^i\;\neq\;\emptyset$ ist. Dann ist $Y^i_+$ affin. Der zugehörige Ring ist

$$A^i[\![\xi_1,\dots,\xi_{r+1},\zeta_1,\dots,\zeta_{s+1}]\!]/(\xi_1\cdot\ldots\cdot\xi_{r+1}-\pi\,,\,\zeta_1\cdot\ldots\cdot\zeta_{s+1}-\pi)\,.$$

Sei $K'$ eine endliche Erweiterung von $K$ mit trivialer Restklassenkörpererweiterung, so daß es $\epsilon, c, d \in K'$ gibt mit $\epsilon^{r+1}c = \epsilon^{s+1}d = \pi$ und $|\epsilon|, |c|, |d| < 1$. Sei ferner $A^i_{K'} := A^i \otimes_R K'$. Durch $\xi_\rho = \epsilon\,\widetilde{\xi}_\rho$ und $\zeta_\sigma = \epsilon\,\widetilde{\zeta}_\sigma$ ist der folgende $K'$-Morphismus gegeben.

$$\alpha: \;\operatorname{Sp} A^i_{K'}\langle\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_{r+1},\widetilde{\zeta}_1,\ldots,\widetilde{\zeta}_{s+1}\rangle/(\widetilde{\xi}_1\cdot\ldots\cdot\widetilde{\xi}_{r+1}-c\,,\,\widetilde{\zeta}_1\cdot\ldots\cdot\widetilde{\zeta}_{s+1}-d) \;\hookrightarrow\; U^i_K\,,$$

Dieser liefert einen Morphismus der globalen Einheiten, welcher wie folgt faktorisiert.

$$\mathcal{O}(U^i_K)^\times \;\longrightarrow\; \Big(K\otimes_R A^i[\![\xi_1,\ldots,\xi_{r+1},\zeta_1,\ldots,\zeta_{s+1}]\!]/(\xi_1\cdot\ldots\cdot\xi_{r+1}-\pi\,,\,\zeta_1\cdot\ldots\cdot\zeta_{s+1}-\pi)\Big)^\times$$

$$\hookrightarrow\; \Big(A^i_{K'}\langle\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_{r+1},\widetilde{\zeta}_1,\ldots,\widetilde{\zeta}_{s+1}\rangle/(\widetilde{\xi}_1\cdot\ldots\cdot\widetilde{\xi}_{r+1}-c\,,\,\widetilde{\zeta}_1\cdot\ldots\cdot\widetilde{\zeta}_{s+1}-d)\Big)^\times .$$

Der mittlere Term ist hierbei die Gruppe der Einheiten auf der Vereinigung für $\epsilon\to 1$.

Mit $Y_0$ ist auch $A^i_0$ integer und somit sind $A^i_{K'}\langle\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_{r+1}\rangle/(\widetilde{\xi}_1\cdot\ldots\cdot\widetilde{\xi}_{r+1}-c)$ und $A^i_{K'}$ zusammenhängend (Lemma 2.5). Also läßt sich $\alpha^*f^i$ nach Lemma 3.12 schreiben als

$$\alpha^*f^i \;=\; (\epsilon^N a_i)\,\widetilde{\xi}^{\underline{m}}\,\widetilde{\zeta}^{\underline{n}}\,(1+h_i) \;=\; a_i\,(\epsilon\,\widetilde{\xi})^{\underline{m}}\,(\epsilon\,\widetilde{\zeta})^{\underline{n}}\,(1+h_i)$$

mit dominantem Term $(\epsilon^N a_i)\,\widetilde{\xi}^{\underline{m}}\,\widetilde{\zeta}^{\underline{n}}$ und $N := m_1+\ldots+m_r+n_1+\ldots+n_s$. Diese Darstellung ist verträglich mit weiteren Einschränkungen

$$\operatorname{Sp} A^i_{K''}\langle\widetilde{\xi}',\widetilde{\zeta}'\rangle/(\Pi\widetilde{\xi}'-c'\,,\,\Pi\widetilde{\zeta}'-d') \;\hookrightarrow\; \operatorname{Sp} A^i_{K'}\langle\widetilde{\xi},\widetilde{\zeta}\rangle/(\Pi\widetilde{\xi}-c\,,\,\Pi\widetilde{\zeta}-d)\,.$$

Somit ist in allen rigiden Punkten $y$ der formellen Faser $Y^i_+$ der Term $a_i\,\xi^{\underline{m}}\zeta^{\underline{n}}$ dominant und $|h_i(y)| < 1$. Die Exponenten $\underline{m}$ und $\underline{n}$ dieses Terms sind durch $f^i$ eindeutig bestimmt. Sein Koeffizient $a_i$ ist bereits über $K$ definiert, da $\alpha$ wie oben erwähnt faktorisiert, das heißt also $a_i \in \big(A^i_K\big)^\times$. Da $A^i_0$ irreduzibel und geometrisch reduziert ist, ist $a_i = \pi^{\nu_i}\,b_i$ für eine Einheit $b_i \in (A^i)^\times$ nach Lemma 2.12.

Auf $U^{ij}$ ist $f^i(f^j)^{-1} = \mu^{ij}\lambda^{ji} \in \mathcal{O}(U^{ij})^\times$, also in jedem Punkt vom Betrag $1$. Da die $\xi,\zeta$ auf $Y^i_+\cap Y^j_+$ vom Betrag kleiner als 1 sind, sind die Exponenten $\underline{m}$ und $\underline{n}$ des dominanten Terms unabhängig von $i$. Ebenso folgt, daß $\nu = \nu_i$ unabhängig von $i$ ist.

Ersetze nun $\varphi_K$ durch $\psi_K := \varphi_K\,a^{-1}\zeta_1^{-n_1}\cdot\ldots\cdot\zeta_s^{-n_s}$ mit $a := \pi^\nu\,\xi_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot\xi_r^{m_r} \in \mathcal{O}(X_K)^\times$. Dann ist $\alpha^*f^i = b_i(1+h_i)$ und nach Lemma 2.15 gilt $|\psi_K(y)| = |f^i(y)| = 1$ für alle rigiden Punkte $y$ der formellen Faser $Y^i_+$. Der affinoide Teilbereich

$$\{\,y\in U^i_K:\;|f^i(y)|=1\,\} \;=\; \{\,y\in U^i_K:\;|\psi_K(y)|=1\,\}$$

enthält somit diese formelle Faser. Damit enthält er aber sogar eine formell offene Umgebung dieser formellen Faser.

Jede irreduzible Komponente von $X\times_R V$ trifft ein $Y^i_0$ und damit auch die eben erwähnte Umgebung in einem formell offenen Teil $W$. Somit gilt $|\psi_K(y)|=1$ für alle $y\in W_K$ und damit $|\psi_K(y)|=1$ für alle $y\in X_K\times_k V_K$ nach Lemma 2.13.

Aufgrund von Lemma 2.16 sind folglich $\psi_K \in \Gamma(X\times_R V,\mathcal{H})$ und $\psi_K^{-1}\in\Gamma(X\times_R V,\mathcal{H}^\vee)$, also $\psi_K \in \operatorname{Isom}_{X\times_R V}(\mathcal{L},\mathcal{M})$ und somit wie behauptet

$$\varphi_K \;=\; \psi_K\,a\,\zeta_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot\zeta_s^{n_s} \;\in\; \Big(\mathcal{O}_{X_K}(X_K)^\times\cdot\operatorname{Isom}_{X\times_R V}(\mathcal{L},\mathcal{M})\Big)\oplus\zeta_1^{\mathbb{Z}}\oplus\ldots\oplus\zeta_s^{\mathbb{Z}}\,. \qquad\square$$

# Kapitel 4

# Geradenbündel

## 4.1 Der Picard-Funktor

Ziel dieser Arbeit ist es, zu zeigen daß für jede eigentliche, glatte, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über $K$, welche ein strikt semistabiles, formelles Modell besitzt, der Picard-Funktor darstellbar ist. Dieses Resultat ist Satz 4.5 auf Seite 37. Wir wollen zunächst erklären, was der Picard-Funktor ist.

Wir beginnen mit der algebraischen Situation. Dort läßt sich der Picard-Funktor folgendermaßen definieren. (Für eine ausführliche Darstellung des algebraischen Falles verweisen wir auf [BLR, Kapitel 8].)

Sei $S$ ein Basisschema und $f : X \longrightarrow S$ ein Morphismus von Schemata. Wir betrachten den kontravarianten Funktor von der Kategorie der $S$-Schemata in die Kategorie der abelschen Gruppen

$$P_{X/S} : (\mathrm{Sch}/S) \longrightarrow (\mathrm{Ab}), \qquad S' \longmapsto \mathrm{Pic}(X \times_S S') = \mathrm{H}^1(X \times_S S', \mathcal{O}^{\times}_{X \times_S S'}),$$

der jedem $S$-Schema $S'$ die Gruppe der Geradenbündel auf $X \times_S S'$ zuordnet.

Der *relative Picard-Funktor* ist die zu $P_{X/S}$ assoziierte (fppf)-Garbe

$$\mathrm{Pic}_{X/S} = \mathrm{R}^1 f_* \mathbb{G}_m \qquad \text{als (fppf)-Garben auf } S.$$

Dies bedeutet $\mathrm{Pic}_{X/S}$ ist ein kontravarianter Funktor von $(\mathrm{Sch}/S)$ nach $(\mathrm{Ab})$, so daß für jedes $S$-Schema $T$ und für jeden Morphismus $T' \longrightarrow T$, der treu-flach und quasikompakt, also (fppf), oder eine Zariski-Überdeckung ist, die folgende Sequenz exakt ist

$$\mathrm{Pic}_{X/S}(T) \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}(T') \rightrightarrows \mathrm{Pic}_{X/S}(T' \times_T T').$$

Jedes Element von $\mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ für ein quasikompaktes $S$-Schema $T$ kann durch ein Geradenbündel $\mathcal{L}'$ auf $X \times_S T'$ für ein Schema $T'$ gegeben werden, welches (fppf) über $T$ ist. Ferner existiert ein (fppf)-Morphismus $\widetilde{T} \longrightarrow T' \times_T T'$, so daß die Rücktransporte vermöge der beiden Projektionen $\widetilde{T} \longrightarrow T'$ isomorph sind.

Wir betrachten nun den Fall:

(∗) Sei $f$ quasikompakt und quasisepariert mit einem Schnitt $x : S \longrightarrow X$ und gelte $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ universell, das heißt auch noch nach beliebiger Basiserweiterung. Diese Bedingung ist zum Beispiel erfüllt, wenn $f$ eigentlich und flach mit reduzierten und irreduziblen geometrischen Fasern ist.

Dann können wir $\operatorname{Pic}_{X/S}$ beschreiben als den kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned} \operatorname{Pic}_{X/S} :\ (\mathrm{Sch}/S) &\longrightarrow (\mathrm{Ab}) \\ S' &\longmapsto \Big\{ \text{Isomorphieklassen von } (\mathcal{L},\lambda) : \mathcal{L} \text{ Geradenbündel auf } X \times_S S', \\ &\qquad \lambda : \mathcal{O}_{S'} \xrightarrow{\sim} (x \times \mathrm{id}_{S'})^* \mathcal{L} \ \text{ Rigidifizierung} \Big\} \\ &= \operatorname{Pic}(X \times_S S') / \operatorname{Pic}(S') . \end{aligned}$$

Die Rigidifizierung hat zwei Effekte. Sie unterdrückt alle Geradenbündel, die von $S'$ kommen und sie bewirkt, daß die Automorphismengruppe von $(\mathcal{L},\lambda)$ trivial ist.

Wir wenden uns nun der Frage der Darstellbarkeit zu.

Der Funktor $\operatorname{Pic}_{X/S}$ heißt *darstellbar*, falls ein $S$-Schema $P$ und ein Isomorphismus von Funktoren existiert

$$\operatorname{Pic}_{X/S} \cong \operatorname{Hom}_{(\mathrm{Sch}/S)}(\,\bullet\,, P) =: P(\,\bullet\,) .$$

Im Fall $(*)$ bedeutet dies, daß es ein rigidifiziertes Geradenbündel $(\mathcal{P},\rho) \in \operatorname{Pic}_{X/S}(P)$ gibt. Dieses heißt das *Poincaré-Bündel* und besitzt folgende, durch das Yoneda-Lemma gegebene, universelle Eigenschaft:

Für alle $S$-Schemata $S'$ und für alle Geradenbündel $(\mathcal{L},\lambda) \in \operatorname{Pic}_{X/S}(S')$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $g : S' \longrightarrow P$ mit

$$(\mathcal{L},\lambda) \cong (\mathrm{id}_X \times g)^* (\mathcal{P},\rho) .$$

Bezüglich der Darstellbarkeit gilt folgender

**Satz 4.1.** (A. Grothendieck)
*Sei $f : X \longrightarrow S$ projektiv, flach und von endlicher Darstellung mit reduzierten und irreduziblen geometrischen Fasern. Dann ist $\operatorname{Pic}_{X/S}$ darstellbar durch ein separiertes $S$-Schema, lokal von endlicher Darstellung über $S$.*

Für den Beweis siehe [FGA, n° 232, Thm. 3.1], oder [BLR, Thm. 8.2.1].

Falls $S$ das Spektrum eines Körpers ist, lassen sich die Voraussetzungen abschwächen.

**Satz 4.2.** (J.P. Murre und F. Oort)
*Sei $X$ ein eigentliches Schema über einem Körper $K$. Dann ist $\operatorname{Pic}_{X/k}$ darstellbar durch ein Schema, lokal von endlichem Typ über $K$.*

Der Beweis dieses Satzes wird auf den projektiven Fall zurückgeführt, der von Grothendieck [FGA, n° 232,Section 6] behandelt wurde. Siehe [Mu] und [Oo].

Falls nun $X$ eigentlich über $K$ ist, so definieren wir $\operatorname{Pic}^0_{X/K}$ als die Zusammenhangskomponente von $\operatorname{Pic}_{X/K}$, die das neutrale Element enthält. Sie ist ein Gruppenschema von endlichem Typ über $K$. Im Fall $(*)$ stellt sie den Funktor

$$\begin{aligned} \operatorname{Pic}^0_{X/K}(V) := \Big\{ &\text{Isomorphieklassen von } (\mathcal{L},\lambda) : \mathcal{L} \text{ Geradenbündel auf } X \times_K V, \\ &(\mathrm{id}_X \times v)^* \mathcal{L} \ \text{ trivial und } \ \lambda : \mathcal{O}_V \xrightarrow{\sim} (x \times \mathrm{id}_V)^* \mathcal{L} \Big\} \end{aligned}$$

auf der Kategorie der zusammenhängenden $K$-Schemata mit $K$-rationalem Punkt $v$ dar.

**Lemma 4.3.**
*Sei $X$ ein Schema über $S$ und sei $\mathrm{Pic}_{X/S}$ darstellbar durch ein $S$-Schema $P$. Sei ferner $S'$ ein $S$-Schema und $X' := X \times_S S'$.*

*Dann ist $\mathrm{Pic}_{X'/S'}$ darstellbar durch das $S'$-Schema $P \times_S S'$.*

Beweis:
Nach Definition ist $\mathrm{Pic}_{X'/S'}$ gleich der Einschränkung des Funktors $\mathrm{Pic}_{X/S}$ auf die Kategorie der $S'$-Schemata, also $\mathrm{Pic}_{X'/S'} = \mathrm{Pic}_{X/S}|_{(\mathrm{Sch}/S')}$. Da ferner

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Sch}/S')}(\,\bullet\,, P \times_S S') \;=\; \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Sch}/S)}(\,\bullet\,, P)\,|_{(\mathrm{Sch}/S')}$$

ist, folgt die Behauptung. □

Dieses sind die wichtigsten Definitionen und Sätze im algebraischen Fall. Wir wollen dies nun auf die rigid analytische Situation übertragen und betrachten dazu die folgenden Kategorien:

Sei $\mathfrak{C}$ die Kategorie der Paare $(V_K, v_K)$, wobei $V_K$ eine glatte, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über $K$ und $v_K \in V_K(K)$ ist. Die Morphismen

$$f \;\in\; \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}\big((V_K, v_K), (W_K, w_K)\big)$$

sind die $K$-Morphismen $f : V_K \longrightarrow W_K$ mit $f(v_K) = w_K$.

Sei $\overline{\mathfrak{C}}$ die volle Unterkategorie von $\mathfrak{C}$, in der $V_K$ ein glattes, formelles Modell $V$ über $\mathrm{Spf}\, R$ besitzt. Mit $V_K$ ist dann auch $V$ zusammenhängend.

Sei $\widehat{\mathfrak{C}}$ die volle Unterkategorie von $\mathfrak{C}$, in der $V_K$ quasikompakt und $\mathrm{H}^1(V_K \widehat{\otimes}_K \overline{K}, \mathbb{Z}) = (0)$ ist, für einen topologisch, algebraischen Abschluß $\overline{K}$ von $K$.

Wir fixieren nun ein $(X_K, x_K) \in \mathfrak{C}$, welches zusätzlich eigentlich über $K$ ist. Wir wollen die Geradenbündel auf $X_K$ studieren und betrachten, analog zu $(*)$ im algebraischen Fall, den kontravarianten Funktor

$$\mathrm{Pic}^0_{X_K/K} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{Mengen}$$

$$(V_K, v_K) \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen von } (\mathcal{L}_K, \lambda_K) : \mathcal{L}_K \text{ Geradenbündel auf } X_K \times_K V_K \\ (\mathrm{id}_{X_K} \times v_K)^* \mathcal{L}_K \text{ trivial und } \lambda_K : \mathcal{O}_{V_K} \xrightarrow{\sim} (x_K \times \mathrm{id}_{V_K})^* \mathcal{L}_K \end{array} \right\}$$

Die Rigidifizierung $\lambda_K$ ist nötig, da sie die Geradenbündel auf $X_K \times_K V_K$ ausschließt, welche von Bündeln auf $V_K$ kommen. Ferner verhindert sie das Auftreten von nicht-trivialen Automorphismen, denn es gilt folgendes

**Lemma 4.4.**
*Sei $X_K$ eine eigentliche, glatte, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über $K$ und $x_K \in X_K(K)$, sowie $V_K$ eine rigid analytische Varietät über $K$. Sei ferner $(\mathcal{L}_K, \lambda_K)$ ein Geradenbündel auf $X_K \times_K V_K$ mit Rigidifizierung*

$$\lambda_K : \mathcal{O}_{V_K} \xrightarrow{\sim} (x_K \times \mathrm{id}_{V_K})^* \mathcal{L}_K .$$

*Dann ist $\mathrm{id}_{\mathcal{L}_K}$ der einzige Automorphismus von $\mathcal{L}_K$, der $\lambda_K$ fest läßt.*

Beweis:
Sei $\alpha : \mathcal{L}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_K$ ein Automorphismus von $\mathcal{L}_K$, der $\lambda_K$ fest läßt. Weil $\mathcal{L}_K$ ein Geradenbündel ist, gilt

$$\mathrm{Aut}_{X_K \times_K V_K}(\mathcal{L}_K) = \Gamma\big(X_K \times_K V_K, \mathcal{O}_{X_K \times_K V_K}\big)^{\times}.$$

Da $X_K$ zusammenhängend, eigentlich und glatt über $K$ ist und den $K$-wertigen Punkt $x_K$ enthält, gilt $\Gamma(X_K, \mathcal{O}_{X_K}) = K$ universell und somit ist

$$\alpha \in \Gamma\big(X_K \times_K V_K, \mathcal{O}_{X_K \times_K V_K}\big)^{\times} = \Gamma(V_K, \mathcal{O}_{V_K})^{\times}.$$

Nachdem $\alpha$ die Rigidifizierung $\lambda_K$ fest läßt, ist $\alpha = (x_K \times \mathrm{id}_{V_K})^*\alpha = 1 = \mathrm{id}_{\mathcal{L}_K}$. □

Die Einschränkung von $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ auf die Kategorie $\overline{\mathfrak{C}}$ ergibt einen Funktor $\overline{\mathrm{Pic}}^0_{X_K/K}$.

Die Einschränkung von $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ auf die Kategorie $\widehat{\mathfrak{C}}$ ergibt einen Funktor $\widehat{\mathrm{Pic}}^0_{X_K/K}$.

Wir fragen nun wieder, ob diese Funktoren darstellbar sind. Für $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ bedeutet dies, daß ein Objekt $(P_K, 1) \in \mathfrak{C}$ existiert mit

$$\mathrm{Pic}^0_{X_K/K} \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}\big(\,\bullet\,, (P_K, 1)\big).$$

Nach dem Lemma von Yoneda gibt es dann ein Geradenbündel $\mathcal{P}_K$ auf $X_K \times_K P_K$, welches trivial entlang $X_K \times \{1\}$ ist, eine Rigidifizierung $\rho_K : \mathcal{O}_{P_K} \xrightarrow{\sim} (x_K \times \mathrm{id}_{P_K})^*\mathcal{P}_K$ besitzt und das folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Für alle $(V_K, v_K) \in \mathfrak{C}$ und für alle Geradenbündel $(\mathcal{L}_K, \lambda_K) \in \mathrm{Pic}^0_{X_K/K}(V_K, v_K)$ gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$f : (V_K, v_K) \longrightarrow (P_K, 1)$$

und einen Isomorphismus $\mathcal{L}_K \cong (\mathrm{id}_{X_K} \times f)^* \mathcal{P}_K$, der kompatibel mit den Rigidifizierungen $\lambda_K$ und $\rho_K$ ist. Nach Lemma 4.4 ist dieser Isomorphismus ebenfalls eindeutig bestimmt.

Das Geradenbündel $\mathcal{P}_K$ heißt das *Poincaré-Bündel* auf $X_K \times_K P_K$.

Ziel dieser Arbeit ist es die Darstellbarkeit des Funktors $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ zu zeigen, das heißt folgenden

**Satz 4.5.**
*Sei $X_K$ eine eigentliche, glatte, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über $K$, welche ein strikt semistabiles, formelles Modell $X$ über $R$ besitzt, sowie $x_K \in X_K(K)$.*

*Dann ist der Picard-Funktor $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ nach einer endlichen, separablen Körpererweiterung darstellbar durch eine glatte, rigid analytische Gruppe $P_K$. Diese ist eine Erweiterung*

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}^r_{m,K} \longrightarrow P_K \longrightarrow Q_K \longrightarrow 1$$

*einer eigentlichen, glatten, rigid analytischen Gruppe $Q_K$ durch einen affinen Torus $\mathbb{G}^r_{m,K}$.*

*Bemerkung* 4.5.1.
Es ist möglich, daß $P_K$ nicht eigentlich über $K$ ist, das heißt daß der Rang $r$ des Torus echt positiv ist. Siehe dazu Beispiel 5.13.2.

*Bemerkung* 4.5.2.
Wir zeigen den Satz in dieser Arbeit unter der Voraussetzung $\operatorname{char} K = 0$. Diese wird jedoch nur an einer Stelle benötigt, nämlich um bei der Konstruktion der formal glatten Untervarietät $\overline{P}_{K}$ von $P_{K}$ zunächst $\overline{P}_{K}$ geometrisch reduziert zu erhalten (siehe Seite 57).

Der Beweis dieses Satzes nimmt den Rest der Arbeit ein. In diesem Kapitel stellen wir zunächst Eigenschaften von Geradenbündeln zusammen, die wir später benötigen. Die Konstruktion von $P_{K}$ beschreiben wir dann in Kapitel 5 (siehe Satz 5.12). Dabei konstruieren wir schrittweise rigid analytische Varietäten, welche die Funktoren $\overline{\mathrm{Pic}}^{0}_{X_K/K}$ (Satz 5.2) und $\widehat{\mathrm{Pic}}^{0}_{X_K/K}$ (Satz 5.11) darstellen. Die Aussage über die Struktur von $P_{K}$ wird in Satz 5.13 bewiesen.

## 4.2 Ausdehnung von Geradenbündeln

Ein Kernproblem in unserem Beweis der Darstellbarkeit von $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ ist die Ausdehnung von rigiden Geradenbündeln auf das formelle Modell. In diesem und den folgenden Abschnitten wollen wir Fälle beschreiben, in denen diese Ausdehnung möglich ist. Wir beginnen mit dem Fall, daß das formelle Modell regulär ist.

Analog zu Hartogs Theorem in der komplexen Analysis gilt auch im algebraischen Fall:

**Lemma 4.6.**
*Sei $Y$ ein noethersches, normales, integres Schema und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul, der sich als Kern*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_Y^n \longrightarrow \mathcal{O}_Y^m .$$

*schreiben läßt, sowie $Z$ ein abgeschlossenes Unterschema in $Y$ von Kodimension $\geq 2$ .*

*Dann ist die Restriktionsabbildung bijektiv:*

$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Y - Z, \mathcal{F}) .$$

Beweis:
Die Darstellung von $\mathcal{F}$ als Kern liefert einen Morphismus von exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma(Y, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)^n \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)^m \arrow[d, "\gamma"] \\ 0 \arrow[r] & \Gamma(Y - Z, \mathcal{F}) \arrow[r] & \Gamma(Y - Z, \mathcal{O}_Y)^n \arrow[r] & \Gamma(Y - Z, \mathcal{O}_Y)^m \end{tikzcd}$$

Nach dem Analogon von Hartogs Theorem [Ii, Theorem 2.15] sind $\beta$ und $\gamma$ Isomorphismen. Deshalb ist nach dem 5er-Lemma ([Ro, Lemma 3.32]) auch $\alpha$ ein Isomorphismus. □

**Satz 4.7.**
*Sei $Y_K$ eine glatte, rigid analytische Varietät über $K$ , welche ein reguläres, formelles Modell $Y$ habe. Sei $\mathcal{L}_K$ ein Geradenbündel auf $Y_K$ .*

*Dann läßt sich $\mathcal{L}_K$ zu einem Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $Y$ ausdehnen.*

Beweis:
1. Nach [Lü 2, Lemma2.2] läßt sich $\mathcal{L}_K$ zu einer kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ auf $Y$ ausdehnen. Wir betrachten

$$\mathcal{F}^{\vee\vee} := \mathcal{H}om_Y\left(\mathcal{H}om_Y(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)\right) .$$

Da $\mathcal{L}_K$ ein Geradenbündel ist, gilt $\mathcal{F}^{\vee\vee}_{\mathrm{rig}} \cong \mathcal{L}_K^{\vee\vee} \cong \mathcal{L}_K$ . Das heißt, auch $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ ist eine Ausdehnung von $\mathcal{L}_K$ . Wir wollen nun zeigen, daß $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ ein Geradenbündel auf $Y$ ist. Da dies eine lokale Eigenschaft ist, sei ohne Einschränkung $Y = \mathrm{Spf}\, A$ für einen Integritätsring $A$ und $\mathcal{F}$ durch den endlichen $A$-Modul $M$ gegeben.

Da $M$ eine freie Auflösung besitzt, läßt sich $N := M^\vee \neq (0)$ als Kern

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow A^r \longrightarrow A^s$$

schreiben und ist folglich torsionsfrei.

2. Sei $l \in N$ ein Element mit $l \neq 0$ in $N \otimes_R K$. Wir betrachten nun in $A$ das Ideal

$$\mathfrak{a} \; := \; \{ a \in A : \; aN \subseteq A\,l \} .$$

Da $N$ torsionsfrei ist, gilt $A \cong A\,l$. Wir wollen zeigen, daß der Morphismus

$$\Psi : \; \mathfrak{a} \; \longrightarrow \; \mathrm{Hom}_A(N,\, A\,l)\,, \qquad a \; \longmapsto \; (n \;\mapsto\; a\,n \in A\,l)$$

ein Isomorphismus ist. Die Injektivität von $\Psi$ folgt aus der Torsionsfreiheit von $N \neq (0)$. Für die Surjektivität zeigen wir zunächst folgende

Behauptung: $\Psi_{\mathrm{rig}} : \; \mathfrak{a}_{\mathrm{rig}} \; \longrightarrow \; \mathrm{Hom}_{A_K}(N_{\mathrm{rig}},\, A_K l)$ ist surjektiv.

Beweis: Nach [Ei, Corollary 2.9] genügt es zu zeigen, daß

$$\left(\Psi_{\mathrm{rig}}\right)_{\mathfrak{p}} : \; \mathfrak{a}_{\mathrm{rig},\mathfrak{p}} \; \longrightarrow \; \mathrm{Hom}_{A_{K,\mathfrak{p}}}(N_{\mathrm{rig},\mathfrak{p}},\, A_{K,\mathfrak{p}}\, l)$$

surjektiv ist für alle maximalen Ideale $\mathfrak{p} \subseteq A_K$. Da $N_{\mathrm{rig}}$ ein invertierbarer $A$-Modul ist, gibt es ein $n \in N_{\mathrm{rig},\mathfrak{p}}$ mit $N_{\mathrm{rig},\mathfrak{p}} = A_{K,\mathfrak{p}}\, n$. Insbesondere ist $l = a\,n$ für ein $a \in A_{K,\mathfrak{p}}$. Somit ist

$$\mathrm{Hom}_{A_{K,\mathfrak{p}}}(N_{\mathrm{rig},\mathfrak{p}},\, A_{K,\mathfrak{p}}\, l) \;\; = \;\; A_{K,\mathfrak{p}}\, \varphi\,,$$

wobei $\varphi : A_{K,\mathfrak{p}}\, n \longrightarrow A_{K,\mathfrak{p}}\, l,\;\; n \;\mapsto\; l \;=\; a\,n$ abbildet. Also ist $\varphi$ gleich der Multiplikation mit $a$. Wir müssen nun zeigen, daß $a \in \mathfrak{a}_{\mathrm{rig},\mathfrak{p}}$ ist.

Der $A$-Modul $N$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem $(n_1, \ldots, n_r)$. Zu den Bildern $\varphi(n_i) \;=\; a\,n_i \;=\; a_i\, l \;\in\; A_{K,\mathfrak{p}}\, l$ sei $u$ ein gemeinsamer Nenner der $a_i$ und von $a$, das heißt also $ua_i,\, ua \in A$. Somit ist $ua \in \mathfrak{a}$ und folglich $a \in \mathfrak{a}_{\mathrm{rig},\mathfrak{p}}$. Dies zeigt, daß $\left(\Psi_{\mathrm{rig}}\right)_{\mathfrak{p}}$ surjektiv ist und damit ist $\Psi_{\mathrm{rig}}$ ein Isomorphismus.

Daraus folgern wir nun, daß $\Psi$ surjektiv ist. Sei dazu $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(N,\, A\,l)$. Dann ist

$$\frac{\alpha}{1} \;\in\; \mathrm{Hom}_{A_K}(N_{\mathrm{rig}},\, A_K l) \;\;=\;\; S^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(N,\, A\,l)$$

mit $S \;=\; \{1,\, \pi,\, \pi^2,\, \ldots\}$. Da $\Psi_{\mathrm{rig}}$ surjektiv ist, gibt es ein $a/\pi^\nu \;\in\; S^{-1}\mathfrak{a} \;=\; \mathfrak{a}_{\mathrm{rig}}$ mit $\Psi_{\mathrm{rig}}(a/\pi^\nu) = \alpha/1$. Nun ist $\alpha(n)/1 = (a\,n)/\pi^\nu$, also $\pi^\nu \alpha(n) = a\,n$ in $N$ für alle $n \in N$. Speziell ist $(a/\pi^\nu)\, l = \alpha(l) \in A\,l$ und folglich $a/\pi^\nu = a' \in A$. Da somit $a'n = \alpha(n) \in A\,l$ für alle $n \in N$ gilt, ist $a' \in \mathfrak{a}$. Dies zeigt, daß $\Psi$ surjektiv und folglich ein Isomorphismus ist.

Wir haben also $\mathfrak{a} \;\cong\; \mathrm{Hom}_A(N,\, A\,l) \;\cong\; N^\vee \;=\; M^{\vee\vee}$.

3. Sei $\mathfrak{a} \;=\; \bigcap\limits_{i=1}^{t} \mathfrak{q}^{(i)}$ eine minimale Primärzerlegung des Ideals $\mathfrak{a}$ von $A$. Dann sind nach [Ei, Theorem 3.10] die $\mathfrak{p}^{(i)} := \sqrt{\mathfrak{q}^{(i)}} \in \mathrm{Spec}\, A$ gerade die assoziierten Primideale von $\mathfrak{a}$. Da $Y$ regulär ist, ist $A$ lokal faktoriell. Sind nun alle $\mathfrak{p}^{(i)}$ von Kodimension $1$, so folgt mit [Ei, Theorem 11.8], daß $\mathfrak{a}$ ein invertierbarer $A$-Modul ist.

Seien also $\mathfrak{p}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(s)}$ diejenigen Primideale darunter von Kodimension $1$. Insbesondere ist dann $\mathfrak{q}^{(i)}$ ein invertierbarer $A$-Modul für $i = 1, \ldots, s$. Wir setzen

$$U \;\; := \;\; \mathrm{Spec}\, A \;\; - \;\; \mathrm{V}(\mathfrak{p}^{(s+1)} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}^{(t)})\,.$$

Dann ist für $i \geq s+1$

$$\Gamma(U,\, \widetilde{\mathfrak{q}^{(i)}}) \;\;=\;\; \Gamma(U,\, \mathcal{O}_Y)\,.$$

$A$ ist ein normaler Integritätsring, denn $Y$ ist regulär. Nach Lemma 4.6 für $\widetilde{\mathfrak{a}}$, sowie für $\widetilde{\mathfrak{q}^{(i)}}$ folgt somit wegen $\operatorname{codim} \mathrm{V}(\mathfrak{p}^{(s+1)} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}^{(t)}) \geq 2$

$$\mathfrak{a} \;=\; \Gamma(\operatorname{Spec} A, \widetilde{\mathfrak{a}}) \;=\; \Gamma(U, \widetilde{\mathfrak{a}}) \;=\; \bigcap_{i=1}^{s} \Gamma(U, \widetilde{\mathfrak{q}^{(i)}}) \;=\; \bigcap_{i=1}^{s} \Gamma(\operatorname{Spec} A, \widetilde{\mathfrak{q}^{(i)}}) \;=\; \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{q}^{(i)} \,.$$

Da die ursprüngliche Primärzerlegung minimal gewählt war, zeigt dies $s = t$ und somit haben alle assoziierten Primideale von $\mathfrak{a}$ die Kodimension 1. Folglich ist $\mathfrak{a} \cong M^{\vee\vee}$ ein invertierbarer $A$-Modul und $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ ein Geradenbündel auf $Y$. $\square$

## 4.3 Lokal triviale Geradenbündel

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wann ein formelles Geradenbündel auf einem Produkt $X \times_R V$ lokal trivial über $X$ ist.

**Satz 4.8.**
*Sei $X$ ein strikt semistabiles, zulässiges, formelles $R$-Schema und $T$ entweder eine freie abelsche Gruppe oder ein freies abelsches Monoid, jeweils mit endlicher Basis ($T \cong \mathbb{Z}^n$ oder $T \cong \mathbb{N}^n$). Betrachte $X_0 := X \otimes_R k$ und $x \in X_0$. Dann gilt in einer Umgebung $\operatorname{Spec} A \subseteq X_0$ von $x$*

$$\operatorname{Pic} A \;\cong\; \operatorname{Pic} A[T]\,.$$

Beweis:
1. Nach Satz 3.4 gibt es eine Umgebung von $x$ in $X$, die formal glatt über

$$\operatorname{Spf} R\,\langle \xi_1, \ldots, \xi_r \rangle / (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r - \pi)$$

ist. Auf dieser Umgebung betrachten wir $\xi_1, \ldots, \xi_r$ als globale Schnitte. Wir ersetzen nun $X$ durch eine affine Umgebung von $x$, in der die Unterschemata $\mathrm{V}(\xi_i, \xi_j)$ zusammenhängend sind für alle $i$ und $j$. Sei $X_0 = \operatorname{Spec} A$.

Der Morphismus $p^* : A \longrightarrow A[T]$ besitzt den Schnitt $\sigma^* : A[T] \longrightarrow A$, $T \mapsto 1$ mit $\sigma^* \circ p^* = \mathrm{id}_A$. Die Funktorialität von $\operatorname{Pic}$ liefert deshalb einen injektiven Morphismus

$$p^* : \operatorname{Pic} A \hookrightarrow \operatorname{Pic} A[T]\,.$$

Wir müssen noch zeigen, daß $p^*$ surjektiv ist. Sei dazu $L$ ein invertierbarer $A[T]$-Modul.

2. Behauptung: Wir haben die exakte Sequenz von $B := k[\xi_1, \ldots, \xi_r]/(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r)$-Moduln

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\alpha} & B/(\xi_1) \times \ldots \times B/(\xi_r) & \xrightarrow{\beta} & \prod_{i<j} B/(\xi_i, \xi_j) \\ & & f & \mapsto & (\overline{f}, \ldots, \overline{f}) & & \\ & & & & (\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_r}) & \mapsto & (\ldots, \overline{f_i} - \overline{f_j}, \ldots)\,. \end{array}$$

Beweis: $\ker \alpha = 0$: Sei $f \in \ker \alpha$. Dann liegt $f$ in dem Primideal $(\xi_i)$ für alle $i$. Also $f = \xi_1 f_1$. Damit folgt wegen $\xi_1 \notin (\xi_2)$, daß $f_1 \in (\xi_2)$ ist, also $f = \xi_1 \xi_2 \cdot f_2$. Mit Induktion ergibt sich $f = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_r \cdot f_r = 0$ in $B$.

$\operatorname{im} \alpha \subseteq \ker \beta$ ist klar.

$\ker \beta \subseteq \operatorname{im} \alpha$: Sei $f_i = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^r} a_\nu^{(i)} \xi^\nu$ mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$, $a_\nu^{(i)} \in k$ und $(\overline{f_i}) \in \ker \beta$. Dies bedeutet $a_\nu^{(i)} = a_\nu^{(j)}$ für alle $\nu$ mit $\nu_i = \nu_j = 0$. Wir definieren nun

$$b_\nu \;:=\; \begin{cases} a_\nu^{(i)} & \text{falls } \nu_i = 0 \text{ ist für ein } i\,, \\ 0 & \text{falls } \nu_i \geq 1 \text{ ist für alle } i \end{cases}$$

und $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^r} b_\nu \xi^\nu$. Dann ist $\alpha(f) = (\overline{f_i})$ und damit die Behauptung bewiesen.

Durch tensorieren mit $A$ über $B$ ergibt dies folgende exakte Sequenz von $A$-Moduln, denn $A$ ist glatt über $B$, also insbesondere flach:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/(\xi_1) \times \ldots \times A/(\xi_r) & \longrightarrow & \prod_{i<j} A/(\xi_i, \xi_j) \\ & & & & (\,\overline{a_1}\,, \ldots, \overline{a_r}\,) & \mapsto & (\,\ldots, \overline{a_i} - \overline{a_j}\,, \ldots) \,. \end{array}$$

Da $L$ flach über $A[T]$ und $A[T]$ flach über $A$ ist, erhalten wir nach tensorieren mit $L$ über $A$ die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L/\xi_1 L \times \ldots \times L/\xi_r L & \xrightarrow{\gamma[T]} & \prod_{i<j} L/(\xi_i L + \xi_j L) \\ & & & & (\,\overline{l_1}\,, \ldots, \overline{l_r}\,) & \mapsto & (\,\ldots, \overline{l_i} - \overline{l_j}\,, \ldots) \,. \end{array}$$

<u>3.</u> $A_i := A/(\xi_i)$ ist glatt über $k[\xi_1, \ldots, \xi_r]/(\xi_i)$ und somit nach [BLR, Proposition 2.3.9] normal. Deshalb ist

$$\operatorname{Pic} A_i \;\cong\; \operatorname{Pic} A_i[T]$$

nach [BM, Corollary 5.10]. Also gibt es einen invertierbaren $A_i$-Modul $M_i$ mit

$$\Psi_i : \; L/\xi_i L \;\xrightarrow{\sim}\; p^* M_i \,.$$

Über $A_{ij} := A/(\xi_i, \xi_j)$ erhalten wir den Isomorphismus

$$\Phi_{ij} \;:=\; \Psi_j \circ \Psi_i^{-1} \;:\; p^* \, M_i/\xi_j M_i \;\xrightarrow{\sim}\; p^* \, M_j/\xi_i M_j \,.$$

Mittels des Schnittes $\sigma^*$ von $p^*$ bekommen wir einen weiteren Isomorphismus

$$p^* \sigma^* \, \Phi_{ij} : \; p^* \, M_i/\xi_j M_i \;\xrightarrow{\sim}\; p^* \, M_j/\xi_i M_j \,.$$

Unser Ziel ist es nun, $p^* \sigma^* \, \Phi_{ij} = \Phi_{ij}$ zu erhalten, denn dann kommt $\Phi_{ij}$ von unten:

$$\varphi_{ij} \;:=\; \sigma^* \Phi_{ij} : \; M_i/\xi_j M_i \;\xrightarrow{\sim}\; M_j/\xi_i M_j$$

und $\Phi_{ij} = p^* \varphi_{ij}$. Dazu betrachten wir

$$u_{ij} \;:=\; \Phi_{ij} \circ \big(p^* \sigma^* \, \Phi_{ij}\big)^{-1} \;\in\; \operatorname{Aut}_{A_{ij}[T]}(p^* \, M_j/\xi_i M_j) \,.$$

Da $p^* \, M_j/\xi_i M_j$ ein invertierbarer $A_{ij}[T]$-Modul ist, gilt für die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}_{A_{ij}[T]}(p^* \, M_j/\xi_i M_j) = \big(A_{ij}[T]\big)^\times$. Da $A_{ij}$ reduziert und $\operatorname{Spec} A_{ij}$ zusammenhängend ist, folgt nach [BM, Proposition 5.12],

$$\big(A_{ij}[T]\big)^\times \;=\; A_{ij}^\times \oplus \begin{cases} 0 & \text{falls } T \text{ ein freies Monoid ist,} \\ T & \text{falls } T \text{ eine freie Gruppe ist.} \end{cases}$$

Falls $T$ ein Monoid ist, so ist $u_{ij} = a_{ij} \in A_{ij}^\times$. Falls $T$ eine Gruppe ist, so ist

$$u_{ij} \;=\; a_{ij} \cdot \tau_{ij} \;\in\; A_{ij}^\times \oplus T \,.$$

Wegen $\sigma^* u_{ij} = 1$ ergibt sich in beiden Fällen $a_{ij} = 1$. Sei nun $T$ eine Gruppe. Wegen $\Phi_{ij} = u_{ij} \cdot (p^* \sigma^* \, \Phi_{ij})$ gilt die Kozykelbedingung $\tau_{ij} \cdot \tau_{ki} = \tau_{kj}$ für alle $i, j, k$ und $\tau_{ii} = 1$ für alle $i$. Wir setzen $\tau_1 := 1$ und $\tau_i := \tau_{1i}$. Dann ist

$$\tau_{ij} \;=\; \tau_{1j} \cdot \tau_{i1} \;=\; \tau_j \cdot \tau_i^{-1} \,.$$

Wenn wir nun den Isomorphismus $\Psi_i : L/\xi_i L \xrightarrow{\sim} p^* M_i$ durch

$$\Psi_i' : \; L/\xi_i L \;\xrightarrow{\sim}\; p^* M_i \,, \quad l \;\longmapsto\; \tau_i^{-1} \cdot \Psi_i(l)$$

ersetzen, erhalten wir entsprechend $u_{ij}' \;=\; \tau_{ij}^{-1} \cdot u_{ij} \;=\; 1$. Also ist $p^*\sigma^* \,\Phi_{ij} = \Phi_{ij}$.

4. Sei nun $M$ der Kern des $A$-Modul-Homomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & M_1 \times \ldots \times M_r & \longrightarrow & \prod_{i<j} M_j/\xi_i M_j \\ & (m_1\,, \ldots, m_r) & \mapsto & (\ldots, \varphi_{ij}(m_i) - m_j\,, \ldots)\,. \end{array}$$

Dann gilt $\gamma[T] \cong p^*\gamma$ und folglich $L \cong p^* M$. Wegen $M \cong \sigma^* p^* M \cong \sigma^* L$ ist $M$ ein invertierbarer $A$-Modul und die Surjektivität von $p^*$ gezeigt. □

**Satz 4.9.**
*Sei $X$ ein strikt semistabiles, zulässiges, formelles $R$-Schema, sowie $T$ entweder eine freie abelsche Gruppe oder ein freies Monoid, jeweils mit endlicher Basis ($T \cong \mathbb{Z}^n$ oder $T \cong \mathbb{N}^n$). Sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf dem Produkt $X \times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle$.*

*Dann gibt es eine offene Überdeckung $\{X^i\}$ von $X$, so daß $\mathcal{L}|_{X^i \times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle}$ frei ist. Insbesondere gilt*

$$\mathrm{R}^1\varphi_*\mathcal{O}^\times_{X\times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle} \;=\; (0)$$

*für die Projektion $\varphi : X \times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle \longrightarrow X$.*

Beweis:
1. Nach Satz 4.8 besitzt jeder Punkt von $X$ eine offene, affine Umgebung $\operatorname{Spf} A$ mit

$$\operatorname{Pic} A_0 \;\cong\; \operatorname{Pic} A_0[T]\,. \tag{$*$}$$

Wir betrachten das Geradenbündel $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L} \otimes_R k$ auf $\operatorname{Spec} A_0[T]$. Wegen $(*)$ gibt es eine Überdeckung $\{X_0^i\}$ von $X_0$, so daß $\mathcal{L}_0|_{X_0^i \otimes_k k[T]}$ trivial ist. Also existiert ein globaler Schnitt

$$l_0^i \;\in\; \mathcal{L}_0\big(X_0^i \otimes_k k[T]\big)\,,$$

der $\mathcal{L}_0$ über $X_0^i \otimes_k k[T]$ erzeugt. Nun besitzt $l_0^i$ eine Liftung $l^i \in \mathcal{L}(X^i \times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle)$. Nach Nakayama erzeugt $l^i$ das Geradenbündel $\mathcal{L}$ über $X^i \times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle$. Somit ist

$$\mathcal{L}|_{X^i\times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle} \;=\; l^i\,\mathcal{O}_{X^i\times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle}\,.$$

2. $\mathrm{R}^1\varphi_*\mathcal{O}^\times_{X\times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle}$ ist die Garbe, die zu der Prägarbe

$$\begin{aligned} U \;\longmapsto\; \mathrm{H}^1\left(\varphi^{-1}U,\, \mathcal{O}^\times_{X\times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle}|_{\varphi^{-1}U}\right) \;&=\; \mathrm{H}^1\left(U \times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle,\, \mathcal{O}^\times_{U\times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle}\right) \\ &=\; \operatorname{Pic}(U \times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle) \end{aligned}$$

assoziiert ist. Sei $x \in X$. Nach 1. ist jedes Geradenbündel auf $U \times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle$ lokal trivial über $U$, das heißt trivial auf $V \times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle$ für eine geeignete Umgebung $V \subseteq U$ von $x$. Dies bedeutet, daß

$$\left(\mathrm{R}^1\varphi_*\mathcal{O}^\times_{X\times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle}\right)_x \;=\; \varinjlim_{U\ni x} \operatorname{Pic}(U \times_R \operatorname{Spf} R\langle T\rangle) \;=\; (0)$$

ist. Der Limes wird dabei über alle Umgebungen $U$ von $x$ gebildet. Somit ist die Behauptung gezeigt. □

**Satz 4.10.**
*Sei $X_K$ eine glatte, rigid analytische Varietät über $K$, der ein strikt semistabiles, formelles Modell $X$ besitzt. Sei $T$ entweder eine freie abelsche Gruppe oder ein freies Monoid, jeweils mit endlicher Basis $(T \cong \mathbb{Z}^n$ oder $T \cong \mathbb{N}^n)$, sowie $\mathcal{L}_K$ ein Geradenbündel auf $X_K \times_K \operatorname{Sp} K\langle T\rangle$.*

*Dann ist $\mathcal{L}_K$ lokaltrivial über $X_K$ im formellen Sinne bezüglich des Modells $X$, das heißt es gibt eine offene Überdeckung $\{X^i\}$ von $X$, so daß $\mathcal{L}_K|_{X^i_K \times_K \operatorname{Sp} K\langle T\rangle}$ frei ist.*

Beweis:
Das formelle Schema $V := \operatorname{Spf} R\langle T\rangle$ ist formal glatt über $R$. Somit ist $X \times_R V$ formal glatt über $X$ und damit regulär nach Satz 2.7, da $X$ nach Satz 3.5 regulär ist. Also gibt es nach Satz 4.7 ein Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $X \times_R V$, welches $\mathcal{L}_K$ fortsetzt. Nach Satz 4.9 besitzt nun $X$ eine offene Überdeckung $\{X^i\}$, so daß $\mathcal{L}|_{X^i \times_R V}$ frei ist. Also ist auch $\mathcal{L}_K|_{X^i_K \times_K \operatorname{Sp} K\langle T\rangle}$ frei. □

**Satz 4.11.**
*Sei $X_K$ eine glatte, rigid analytische Varietät über $K$, der ein strikt semistabiles, formelles Modell $X$ besitzt. Sei $C_K := \operatorname{Sp} K\langle \zeta, c\zeta^{-1}\rangle$, für ein $c \in K^\times$ mit $|c| < 1$, sowie $\mathcal{L}_K$ ein Geradenbündel auf $X_K \times_K C_K$.*

*Dann ist $\mathcal{L}_K$ lokaltrivial über $X_K$ im formellen Sinne bezüglich des Modells $X$, das heißt es gibt eine offene, formelle Überdeckung $\{X^i\}$ von $X$, so daß $\mathcal{L}_K|_{X^i_K \times_K C_K}$ frei ist.*

Beweis:
Wir betrachten die rigid analytische Varietät

$$D^-_K \;:=\; \operatorname{Sp} K\langle c^{-1}\zeta\rangle \;=\; \{\,|\zeta| \le |c|\,\},$$

den wir mit $C_K = \{\,|c| \le |\zeta| \le 1\,\}$ über

$$C^-_K \;:=\; \operatorname{Sp} K\langle c^{-1}\zeta, c\zeta^{-1}\rangle \;=\; \{\,|\zeta| = |c|\,\}$$

zu dem Ball $D := \operatorname{Sp} K\langle\zeta\rangle = \{\,|\zeta| \le 1\,\}$ verkleben. Das Geradenbündel $\mathcal{L}^-_K := \mathcal{L}_K|_{X_K \times_K C^-_K}$ ist nach Satz 4.10 lokaltrivial über $X_K$, das heißt es gibt eine formell offene Überdeckung $\{X^i_K\}$ von $X_K$ mit einer Trivialisierung

$$\varphi^i_K : \mathcal{L}_K|_{X^i_K \times_K C^-_K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X^i_K \times_K C^-_K}.$$

Wir nehmen nun das Geradenbündel $\mathcal{O}_{X^i_K \times_K D^-_K}$ auf $X^i_K \times_K D^-_K$ und verkleben es mittels $\varphi^i_K$ über $X^i_K \times_K C^-_K$ mit $\mathcal{L}_K|_{X^i_K \times_K C_K}$ zu einem Geradenbündel $\mathcal{L}^i_K$ auf $X^i_K \times_K D_K$. Erneut nach Satz 4.10 ist $\mathcal{L}^i_K$ lokaltrivial über $X^i_K$, das heißt es gibt eine formell offene Überdeckung $\{X^{ij}_K\}$ von $X^i_K$ mit

$$\mathcal{L}^i_K|_{X^{ij}_K \times_K D_K} \;\cong\; \mathcal{O}_{X^{ij}_K \times_K D_K}.$$

Auf $X^{ij}_K \times_K C_K$ eingeschränkt, folgt also

$$\mathcal{L}_K|_{X^{ij}_K \times_K C_K} \;\cong\; \mathcal{L}^i_K|_{X^{ij}_K \times_K C_K} \;\cong\; \mathcal{O}_{X^{ij}_K \times_K C_K}.$$ □

## 4.4 Lokale Ausdehnung von Geradenbündeln

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt damit lokal auf $X$ rigide Geradenbündel zu formellen Geradenbündeln auszudehnen. Dazu zunächst folgendes

**Lemma 4.12.**
*Sei $S$ ein noethersches Schema und $p : Y \longrightarrow S$ die Aufblasung in einem Ideal $\mathcal{I}$, das lokal von zwei Elementen erzeugt wird. Es gelte $p_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_S$ . Sei $s$ ein abgeschlossener Punkt im Zentrum $Z$ von $p$ und $Y_s := Y \times_S k(s)$ die Faser über $s$. Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $Y$ mit $\mathrm{H}^1(Y_s, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_s}) = (0)$ .*

*Dann gibt es eine offene Umgebung $S'$ von $s$ in $S$, so daß $\mathrm{H}^1(Y', \mathcal{F}|_{Y'}) = (0)$ ist auf $Y' := Y \times_S S'$ und die kanonische Abbildung*

$$\mathrm{H}^0(Y', \mathcal{F}|_{Y'}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(Y_s, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_s})$$

*surjektiv ist.*

<u>Beweis:</u>
<u>1.</u> Wir ersetzen $S$ durch eine affine, offene Umgebung $S := \operatorname{Spec} A$ von $s$, auf der $\mathcal{I}$ von den zwei globalen Elementen $f_0, f_1 \in A$ erzeugt wird. Zu $s$ gehöre das maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ .

Vermöge des surjektiven Morphismus

$$\mathcal{O}_S\,[\,T_0, T_1\,] \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n\,, \qquad T_i \;\mapsto\; f_i$$

ist $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^1_S$ ein abgeschlossenes Unterschema.

Für die Faser über $s$ ist $Y_s \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{k(s)}$ abgeschlossen. Die Dimension ist $\dim Y_s = 1$ , denn $Y_s$ ist wegen $p_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_S$ zusammenhängend nach Zariskis Hauptsatz ([Ha, Corollary III.11.3]). Folglich gilt $Y_s = \mathbb{P}^1_{k(s)}$ .

<u>2.</u> Vergleich von $\mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F})$ und $\mathrm{H}^1(Y_s, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_s})$ :

$Y$ besitzt die affine Überdeckung $U_i := \{T_i \neq 0\}$ für $i = 0, 1$ . Auch der Durchschnitt $U_{01} := U_0 \cap U_1 = \{\frac{T_0}{T_1} \neq 0\} \subseteq U_1$ ist affin. Bezüglich dieser Überdeckung lautet der Čech-Komplex

$$\bigoplus_{i=0,1} \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} \Gamma(U_{01}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^2} 0\,.$$

Für die Čech-Kohomologie auf $Y$ erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{F}) \longrightarrow \bigoplus_{i=0,1} \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} \Gamma(U_{01}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F}) \longrightarrow 0\,. \qquad (*)$$

Tensorieren mit $k(s)$ über $A$ liefert die Čech-Kohomologie von $\mathcal{F}_s := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_s}$ auf $Y_s$ bezüglich der affinen Überdeckung $\{V_i := U_i \cap Y_s\,,\, i = 0, 1\}$ von $Y_s$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus_{i=0,1} \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \otimes_A k(s) & \xrightarrow{\delta^1 \otimes \mathrm{id}_{k(s)}} & \Gamma(U_{01}, \mathcal{F}) \otimes_A k(s) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F}) \otimes_A k(s) & \longrightarrow & 0 \\
\cong & & \cong & & & & \\
\bigoplus_{i=0,1} \Gamma(V_i, \mathcal{F}_s) & \xrightarrow{\delta^1_{Y_s}} & \Gamma(V_{01}, \mathcal{F}_s) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(Y_s, \mathcal{F}_s) & \longrightarrow & 0\,.
\end{array}$$

Nach Definition von $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_s}$ ist $\delta^1 \otimes \mathrm{id}_{k(s)} \cong \delta^1_{Y_s}$. Also haben wir den Isomorphismus

$$\mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F})/\mathfrak{m} \cdot \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F}) \;=\; \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F}) \otimes_A k(s) \;\cong\; \mathrm{H}^1(Y_s, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_s}) \;=\; (0)\,.$$

3. Nach 2. gilt über dem lokalen Ring $A_{\mathfrak{m}}$ bei $s$

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}} \cdot \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F})_{\mathfrak{m}} \;=\; \big(\mathfrak{m} \cdot \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F})\big)_{\mathfrak{m}} \;=\; \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F})_{\mathfrak{m}}\,.$$

Da $\mathcal{F}$ kohärent und $p$ projektiv ist, ist $\mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F})$ ein endlicher $A$-Modul. Deshalb folgt mit Nakayama

$$(\mathrm{R}^1 p_* \mathcal{F})_s \;=\; \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F})_{\mathfrak{m}} \;=\; (0)$$

und es gibt eine offene affine Umgebung $S'$ von $s$ in $S$ mit $(\mathrm{R}^1 p_* \mathcal{F})|_{S'} = (0)$. Also ist auf $Y' := Y \times_S S'$

$$\mathrm{H}^1(Y', \mathcal{F}|_{Y'}) \;=\; (0)\,.$$

4. Wir ersetzen nun $S$ durch $S'$ und betrachten die exakte Sequenz $(*)$. Mit 3. lautet diese

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{F}) \longrightarrow \bigoplus_{i=0,1} \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} \Gamma(U_{01}, \mathcal{F}) \longrightarrow 0\,.$$

Tensorieren mit dem $A$-Modul $k(s)$ liefert die exakte Sequenz

$$\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{F}) \otimes_A k(s) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=0,1} \Gamma(V_i, \mathcal{F}_s) \xrightarrow{\delta^1_{Y_s}} \Gamma(V_{01}, \mathcal{F}_s) \longrightarrow 0\,.$$

Also ist $\alpha\left(\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{F}) \otimes_A k(s)\right) \;=\; \ker \delta^1_{Y_s} \;=\; \mathrm{H}^0(Y_s, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_s})$ und somit

$$\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{F}) \otimes_A k(s) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0(Y_s, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_s}) \qquad \text{surjektiv.}$$ □

Für den Satz über die lokale Ausdehnung benötigen wir außerdem folgendes

**Lemma 4.13.**
*Sei $S$ ein noethersches, formelles $R$-Schema und $p : Y \longrightarrow S$ die Aufblasung in einem offenen Ideal $\mathcal{I}$, das lokal von zwei Elementen erzeugt wird. Es sei $p_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_S$. Das Zentrum $Z$ von $p$ sei zusammenhängend und die zurückgezogene Garbe $\mathcal{J} := \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ induziere das Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ auf den Fasern über allen Punkten von $Z$. Sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $Y$.*

*Dann gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß $p_*\left(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{J}^{\otimes n}\right)$ ein Geradenbündel auf $S$ ist und*

$$p^*\, p_*\left(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{J}^{\otimes n}\right) \;\cong\; \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{J}^{\otimes n}\,.$$

Beweis:
1. Für die Faser über jedem $s \in Z \subseteq \mathrm{V}(\pi)$ ist $Y_s \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{k(s)}$ abgeschlossen. Die Dimension ist $\dim Y_s = 1$, denn $Y_s$ ist wegen $p_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_S$ zusammenhängend nach Zariskis Hauptsatz ([Ha, Corollary III.11.3]). Also gilt $Y_s = \mathbb{P}^1_{k(s)}$ und somit $\mathcal{L}_s := \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_s} \cong \mathcal{O}(n(s))$ für ein $n(s) \in \mathbb{Z}$. Wir wählen nun einen abgeschlossenen Punkt $s \in Z$, setzen $n = n(s)$ und ersetzen $\mathcal{L}$ durch $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{J}^{\otimes -n}$. Dann ist $n(s) = 0$ und $\mathrm{H}^1(Y_s, \mathcal{L}_s) = (0)$. Sei $f_s$ das globale Element von $\mathrm{H}^0(Y_s, \mathcal{L}_s)$, welches den Isomorphismus $\mathcal{L}_s \cong \mathcal{O}_{Y_s}$ liefert.

Wir betrachten eine offene, affine Umgebung $\mathrm{Spf}\, A$ von $s$. Diese ist algebraisierbar durch das Schema $S' := \mathrm{Spec}\, A$. Da $p$ die Aufblasung in dem offenen Ideal $\mathcal{I}$ ist, ist $Y \times_S \mathrm{Spf}\, A$

ebenfalls algebraisierbar, etwa durch das $S'$-Schema $Y'$. Da $Y'$ projektiv über $S'$ ist, kommt das Geradenbündel $\mathcal{L}$ nach dem formellen GAGA ([EGA, III, Corollaire 5.1.6]) von einem algebraischen Geradenbündel $\mathcal{L}'$ auf $Y'$. Wegen Lemma 4.12 gibt es nach eventueller Verkleinerung von $S'$ ein $f \in \mathrm{H}^0(Y', \mathcal{L}')$ mit

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^0(Y', \mathcal{L}') & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(Y_s, \mathcal{L}_s) & \cong & \mathrm{H}^0(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}) \\ f & \mapsto & f_s & \mapsto & 1\,. \end{array}$$

Wir betrachten den Garbenmorphismus auf $Y'$

$$\lambda: \ \mathcal{O}_{Y'} \longrightarrow \mathcal{L}', \quad 1 \mapsto f\,.$$

Für jedes $y \in Y_s$ ist $\lambda_y : \mathcal{O}_{Y',y} \longrightarrow \mathcal{L}'_y \cong \mathcal{O}_{Y',y}$ surjektiv nach Nakayama, denn die Abbildung ist surjektiv modulo des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{Y',y}$.

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_y \otimes \mathrm{id}_{k(y)} : \ k(y) & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \mathcal{L}'_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y',y}} k(y) & \cong & k(y) \\ 1 & \mapsto & f \otimes 1 & \mapsto & 1\,. \end{array}$$

Also ist $\lambda_y : \mathcal{O}_{Y',y} \longrightarrow \mathcal{L}'_y \cong \mathcal{O}_{Y',y}$ bijektiv.

$N := \mathrm{Supp}(\ker \lambda) \cup \mathrm{Supp}(\mathrm{coker}\, \lambda)$ ist abgeschlossen in $Y'$ und $N \cap Y_s = \emptyset$. Folglich ist $p(N) \subseteq S'$ abgeschlossen und $U' := S' - p(N)$ eine offene Umgebung von $s$ in $S'$. Auf $p^{-1}(U')$ ist also

$$\lambda|_{p^{-1}(U')} : \ \mathcal{O}_{p^{-1}(U')} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{L}'|_{p^{-1}(U')}$$

bijektiv. Erneut nach dem GAGA-Prinzip ([EGA, III, Corollaire 5.1.3]) liefert dies oberhalb der zu $U'$ gehörenden formellen, offenen Umgebung $U$ von $s$ einen Isomorphismus der formellen Geradenbündel

$$\mathcal{O}_{p^{-1}(U)} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{L}|_{p^{-1}(U)}\,.$$

2. Für alle $s \in U \cap Z$ gilt deshalb $\mathcal{L}_s \cong \mathcal{O}_{Y_s}$ und $n(s) = 0$. Also ist $n$ lokal konstant auf $Z$. Da $Z$ zusammenhängend ist, ist $n(s) = 0$ konstant.

Nun liefert 1. eine Trivialisierung $\mathcal{O}_{p^{-1}(U_i)} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{L}|_{p^{-1}(U_i)}$ bezüglich einer offenen, formellen Überdeckung $\{U_i\}$ von $S$. Somit ist

$$(p_*\mathcal{L})|_{U_i} = p_*\,\mathcal{L}|_{p^{-1}(U_i)} \cong p_*\,\mathcal{O}_{p^{-1}(U_i)} = \mathcal{O}_{U_i}\,,$$

also $p_*\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $S$ und

$$(p^*\,p_*\mathcal{L})|_{p^{-1}(U_i)} = p^*\Big((p_*\mathcal{L})|_{U_i}\Big) \cong p^*\mathcal{O}_{U_i} = \mathcal{O}_{p^{-1}(U_i)} \cong \mathcal{L}|_{p^{-1}(U_i)}\,,$$

also die kanonische Abbildung $p^*\,p_*\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ ein Isomorphismus. □

Damit sind wir in der Lage, den Satz über die lokale Ausdehnung rigider Geradenbündel zu beweisen. Wir benützen dabei die Desingularisierungsprozedur aus Abschnitt 3.2.

**Satz 4.14.**
*Sei $X_K$ eine glatte, rigid analytische Varietät über $K$, welche ein strikt semistabiles, formelles Modell $X$ habe. Man betrachte die beiden folgenden Situationen:*

a) *Sei $V_K$ eine rigid analytische Varietät über $K$, welche die Bedingung $(*)$ von Seite 25 erfülle und $\mathcal{L}_K$ ein Geradenbündel auf $X_K \times_K V_K$.*

b) *Sei* $R \subseteq R'$ *eine verzweigte Erweiterung diskreter Bewertungsringe,* $K'$ *der Quotientenkörper von* $R'$ *und* $\mathcal{L}_{_K}$ *ein Geradenbündel auf* $X_{_K} \times_K K'$ *.*

*Dann gibt es eine offene, formelle Überdeckung* $U^i$ *von* $X$ *, so daß sich* $\mathcal{L}_{_K}$ *zu Geradenbündeln* $\mathcal{L}_i$ *auf* $U^i \times_R V$ *beziehungsweise* $U^i \times_R R'$ *ausdehnen läßt. Die Überdeckung* $U^i$ *hängt dabei nicht von* $\mathcal{L}_{_K}$ *ab.*

Beweis:
1. Sei $x \in X_0$ ein Punkt der speziellen Faser. Wir müssen eine offene Umgebung $U$ von $x$ unabhängig von $\mathcal{L}_{_K}$ finden, so daß sich $\mathcal{L}_{_K}$ zu einem Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $U \times_R V$ beziehungsweise auf $U \times_R R'$ ausdehnt. Nach Satz 3.4 gibt es eine offene Umgebung $U$ von $x$, welche formal glatt ist über dem formellen Schema

$$\operatorname{Spf} R\,\langle \xi_1, \ldots, \xi_m \rangle / (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_m - \pi)\,.$$

Dann ist im Fall a) $Y := U \times_R V$ formal glatt über

$$S \;:=\; \operatorname{Spf} R\,\langle \xi_1, \ldots, \xi_m, \zeta_1, \ldots, \zeta_n \rangle \,/\, (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_m - \pi,\, \zeta_1 \cdot \ldots \cdot \zeta_n - \pi)$$

beziehungsweise im Fall b) $Y := U \times_R R'$ formal glatt über

$$S \;:=\; \operatorname{Spf} R'\,\langle \xi_1, \ldots, \xi_m \rangle \,/\, (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_m - \pi^e)\,,$$

wobei $e$ der Verzweigungsindex von $R'$ über $R$ ist. Nun desingularisieren wir $S$ gemäß Lemma 3.9 beziehungsweise Lemma 3.10 und erhalten nach Basiswechsel mit $Y$

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longleftarrow & Y' & = & S' \times_S Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ S & \longleftarrow & S' & & \end{array}$$

Da $Y'$ formal glatt über dem regulären, formellen Schema $S'$ ist, ist nach Satz 2.7 auch $Y'$ regulär. Also dehnt sich nach Satz 4.7 das Geradenbündel $\mathcal{L}_{_K}$ auf $Y'_{_K} = Y_{_K}$ zu einem Geradenbündel $\mathcal{L}'$ auf $Y'$ aus. Dieses muß nun schrittweise zu einem Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $Y$ absteigen.

2. Die Desingularisierung wird gemäß Lemma 3.9 beziehungsweise Lemma 3.10 durch schrittweises Aufblasen erhalten. Für jede Aufblasung $p : S^{\nu+1} \longrightarrow S^\nu$ in dem offenen Ideal $\mathcal{I}^\nu \subseteq \mathcal{O}_{S^\nu}$ betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} Y^\nu & \xleftarrow{\;q\;} & Y^{\nu+1} & = & S^{\nu+1} \times_{S^\nu} Y^\nu \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ S^\nu & \xleftarrow{\;p\;} & S^{\nu+1} & & \end{array}$$

Da $Y^{\nu+1}$ über $S^{\nu+1}$ flach ist, ist $q : Y^{\nu+1} \longrightarrow Y^\nu$ die Aufblasung von $Y^\nu$ in $\mathcal{J} := \mathcal{I}^\nu \cdot \mathcal{O}_{Y^\nu}$ .

Auf $Y^{\nu+1}$ haben wir aufgrund der Induktionshypothese eine Ausdehnung $\mathcal{L}^{\nu+1}$ des Geradenbündels $\mathcal{L}_{_K}$ . Wir müssen daraus ein entsprechendes Geradenbündel $\mathcal{L}^\nu$ auf $Y^\nu$ konstruieren.

Sei $W^\nu$ das Zentrum der Aufblasung $p$ . Da $S^\nu$ nach Lemma 3.9 beziehungsweise Lemma 3.10 normal ist, gilt $p_*\mathcal{O}_{S^{\nu+1}} = \mathcal{O}_{S^\nu}$ und nach Zariskis Hauptsatz ([Ha, Corollary III.11.3]) folglich

$$W^\nu \;=\; \{\, s \in S^\nu :\; p^{-1}(s) = \mathbb{P}^1_{k(s)} \,\}\;; \qquad p : S^{\nu+1} - p^{-1}(W^\nu) \;\xrightarrow{\;\sim\;}\; S^\nu - W^\nu\,.$$

Sei $Z^\nu := W^\nu \times_{S^\nu} Y^\nu$. Dann ist $Z^\nu$ das Zentrum der Aufblasung $q$, das heißt

$$Z^\nu \;=\; \{\, y \in Y^\nu : \; q^{-1}(y) = \mathbb{P}^1_{k(y)} \,\} \;; \qquad q : Y^{\nu+1} - q^{-1}(Z^\nu) \;\xrightarrow{\sim}\; Y^\nu - Z^\nu \,.$$

Nach Lemma 3.9 beziehungsweise Lemma 3.10 ist $W^\nu$ und damit auch $Z^\nu$ die Vereinigung von Komponenten der Form

$$\mathrm{V}\,(\pi,\, \xi_i,\, i \in M) \,\times_k\, \mathrm{V}\,(\pi,\, \zeta_j,\, j \in N) \,\times_k\, \left(\mathbb{P}^1_k\right)^\alpha \;=\; X_0^M \,\times_k\, V_0^N \,\times_k\, \left(\mathbb{P}^1_k\right)^\alpha$$

im Fall a), beziehungsweise der Form

$$\mathrm{V}\,(\pi,\, \xi_i,\, i \in M) \,\times_k\, \left(\mathbb{P}^1_k\right)^\alpha \;=\; X_0^M \,\times_k\, \left(\mathbb{P}^1_k\right)^\alpha$$

im Fall b). Jedes Stratum $X_0^M$ zerfällt in irreduzible Komponenten. Da es über $k$ glatt ist, gibt es nur eine Komponente, auf welcher der Punkt $x$ liegt. Wir verkleinern nun $U$ zu einer offenen Umgebung von $x$, so daß es von jedem Stratum $X_0^M$ nur diese Komponente enthält. Dazu entfernen wir die übrigen Komponenten der Strata. Diese sind abgeschlossen. Nach der Verkleinerung sind die Strata $X_0^M$ somit irreduzibel.

Da die $V_0^N$ nach Voraussetzung geometrisch irreduzibel sind, zerfällt $Z^\nu$ in die irreduziblen Komponenten $X_0^M \times_k V_0^N \times_k \left(\mathbb{P}^1_k\right)^\alpha$, beziehungsweise $X_0^M \times_k \left(\mathbb{P}^1_k\right)^\alpha$, die sich alle in einem Punkt über $\{x\} \times_k V_0$ beziehungsweise über $\{x\}$ schneiden (vergleiche Lemma 3.9 c beziehungsweise Lemma 3.10 c). Dies bedeutet, $Z^\nu$ ist zusammenhängend.

3. Die zurückgezogene Garbe $\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{Y^{\nu+1}}$ induziert das Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ auf den Fasern über allen Punkten des Zentrums $Z^\nu$ von $q$, denn nach Lemma 3.9 beziehungsweise Lemma 3.10 gilt dies entsprechend für die Aufblasung $p$ von $\mathcal{I}^\nu$ in $S^\nu$ und ihr Zentrum $W^\nu$.

Nach Lemma 3.9 beziehungsweise Lemma 3.10 ist $S^\nu$ normal. Also gilt $p_*\mathcal{O}_{S^{\nu+1}} = \mathcal{O}_{S^\nu}$ und wegen der Flachheit von $Y^\nu$ über $S^\nu$ auch $q_*\mathcal{O}_{Y^{\nu+1}} = \mathcal{O}_{Y^\nu}$.

Nach Lemma 4.13 läßt sich somit das Geradenbündel $\mathcal{L}^{\nu+1}$ auf $Y^{\nu+1}$ mittels $\mathcal{J}$ modifizieren, so daß das modifizierte Bündel zu einem Geradenbündel $\mathcal{L}^\nu$ auf $Y^\nu$ absteigt. Da $\mathcal{J}_K \cong \mathcal{O}_{Y_K}$ ist, wird bei der Modifizierung das rigide Geradenbündel $\mathcal{L}_K$ nicht verändert. Das dadurch gewonnene Geradenbündel $\mathcal{L}^\nu$ ist somit eine Ausdehnung von $\mathcal{L}_K$ auf $Y^\nu$.

Insgesamt erhalten wir also eine Ausdehnung $\mathcal{L}$ von $\mathcal{L}_K$ auf $Y$. □

## 4.5 Der multiplikative Anteil

In diesem Abschnitt wollen wir erklären, was wir unter dem multiplikativen Anteil eines Geradenbündels $\mathcal{L}$ verstehen. Wir werden zeigen, daß sich ein rigides Geradenbündel mit trivialem multiplikativen Anteil global zu einem formellen Geradenbündel ausdehnen läßt.

Sei $X_{_K}$ eine glatte, rigid analytische Varietät über $K$ mit strikt semistabilem, formellem Modell $X$, sowie $V_{_K}$ eine rigid analytische Varietät über $K$, welche die Bedingung $(*)$ von Seite 25 erfülle. Wir betrachten die beiden Fälle:

1. $\mathcal{L}$ ist ein Geradenbündel auf $X_{_K} \times_K V_{_K}$.

2. $\mathcal{L}$ ist ein Geradenbündel auf $X \times_R \operatorname{Spf} R\langle \mathbb{Z}^r \rangle$.

1. Fall

**Satz 4.15.**
*Sei $X_{_K}$ eine glatte, rigid analytische Varietät mit strikt semistabilem, formellem Modell $X$ und $V_{_K}$ eine glatte, rigid analytische Varietät mit formellem Modell $V$, welches formal glatt über $R\langle \xi_1, \dots, \xi_{s+1}\rangle / (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_{s+1} - \pi)$ ist und die Bedingung $(*)$ von Seite 25 erfülle. Ferner sei $v_{_K} \in V_{_K}(K)$ ein Punkt oberhalb von $\{\xi_1 = \ldots = \xi_s = 1\}$ und $\mathcal{L}_{_K}$ ein Geradenbündel auf $X_{_K} \times_K V_{_K}$, welches entlang $v_{_K}$ trivialisiert ist.*

*Dann zerfällt $\mathcal{L}_{_K}$ in zwei Geradenbündel $\mathcal{L}_{_K} \cong \mathcal{M}_{_K} \otimes \mathcal{N}_{_K}$, wobei*

a) $\mathcal{M}_{_K} \cong (\xi_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes \xi_s^{n_s})$ *durch* $n_1, \dots, n_s \in \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$ *gegeben ist und*

b) $\mathcal{N}_{_K}$ *von einem formellen Geradenbündel $\mathcal{N}$ auf $X \times_R V$ herrührt.*

*Die Zerlegung von $\mathcal{L}_{_K}$ ist eindeutig und ergibt eine Zerlegung*

$$\operatorname{Pic}(X_{_K} \times_K V_{_K}) \;=\; \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})^s \oplus \operatorname{Pic}(X \times_R V)\,.$$

Beweis:
1. Nach Satz 4.14 gibt es eine offene formelle Überdeckung $X^i$ von $X$ und ein formelles Geradenbündel $\mathcal{L}'$ auf der disjunkten Vereinigung

$$Y' \;:=\; X' \times_R V \;:=\; \coprod_i X^i \times_R V$$

welches das rigide Geradenbündel $\mathcal{L}'_{_K} := p^* \mathcal{L}_{_K}$ auf

$$Y'_{_K} \;:=\; Y' \otimes_R K \;=\; X'_{_K} \times_K V_{_K} \;=\; \coprod_i X^i_{_K} \times_K V_{_K}$$

fortsetzt. Dabei betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccccc} Y'' & := & Y' \times_Y Y' & \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} & Y' & \xrightarrow{p} & Y & := & X \times_R V \qquad \text{und} \\ Y''_{_K} & = & Y'_{_K} \times_{Y_{_K}} Y'_{_K} & \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} & Y'_{_K} & \xrightarrow{p} & Y_{_K} & = & X_{_K} \times_K V_{_K} \end{array}$$

mit den Projektionen $p_1$ und $p_2$ auf die entsprechenden Faktoren und der natürlichen Abbildung $p$. Da $\mathcal{L}_K$ entlang $v_K$ trivialisiert ist, läßt sich die Ausdehnung $\mathcal{L}'$ so wählen, daß sie entlang $v$ trivialisiert ist.

Das Geradenbündel $\mathcal{L}'_K$ ist isomorph zu $p^* \mathcal{L}_K$. Dies liefert ein Descent-Datum auf $Y''_K$

$$\varphi_K : (p_1^* \mathcal{L}')_{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} (p_2^* \mathcal{L}')_{\mathrm{rig}}$$

(vergleiche Abschnitt 2.3). Wir betrachten nun das formelle Geradenbündel

$$\mathcal{H} \;:=\; \mathcal{H}om_{Y''}(p_1^* \mathcal{L}', p_2^* \mathcal{L}')$$

auf $Y''$ und das zugehörige rigide Geradenbündel auf $Y''_K$

$$\mathcal{H}_K \;:=\; \mathcal{H} \otimes_R K \;=\; \mathcal{H}om_{Y''_K}\Big((p_1^* \mathcal{L}')_{\mathrm{rig}}\, ,\, (p_2^* \mathcal{L}')_{\mathrm{rig}}\Big) .$$

$\varphi_K$ ist also ein globaler Schnitt in $\mathrm{Isom}_{Y''_K}\Big((p_1^* \mathcal{L}')_{\mathrm{rig}}\, ,\, (p_2^* \mathcal{L}')_{\mathrm{rig}}\Big) \subseteq \Gamma(Y''_K, \mathcal{H}_K)$. Da $\mathcal{L}'$ entlang $v$ trivialisiert ist, ist auch $\mathcal{H}$ dort trivialisiert, etwa durch $\theta : (\mathrm{id}_{X''} \times v)^* \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X''}$.

2. Sei $U$ eine Zusammenhangskomponente von $X'' := X' \times_X X'$. Dann läßt sich $U$ nach Satz 3.4 als Vereinigung offener Teilmengen $U^\nu$ schreiben, welche die Bedingung (an $X$) von Lemma 3.13 erfüllen. Nach Lemma 3.13 ist also

$$\varphi_K|_{U^\nu_K \times_K V_K} \;=\; a_\nu\, \psi^\nu\, \xi_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \xi_s^{n_s}$$

für $a_\nu \in \mathcal{O}_{X''_K}(U^\nu_K)^\times$, $\psi^\nu \in \mathrm{Isom}_{U^\nu \times_R V}(p_1^* \mathcal{L}', p_2^* \mathcal{L}')$ und eindeutig bestimmte $n_\sigma \in \mathbb{Z}(U^\nu)$. Da jeder Punkt in $U^\mu \cap U^\nu$ eine Umgebung wie in Lemma 3.13 besitzt, hängen die $n_\sigma$ nicht von $\nu$ ab, sind also lokal konstant auf $X''$. Das heißt sie bilden Elemente $n_\sigma \in \mathbb{Z}(X'')$. Die Kozykelbedingung für $\varphi_K$ besagt nun, daß $n_\sigma \in \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$ ist.

Wir definieren das Geradenbündel $\mathcal{M}_K := (\xi_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes \xi_s^{n_s})$ auf $X_K \times_K V_K$ folgendermaßen. Auf $X^i_K \times_K V_K$ sei $\mathcal{M}_K$ trivial und die Verklebung erfolge durch den Kozyklus $\xi_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes \xi_s^{n_s}$. Ferner definieren wir $\mathcal{N}_K := \mathcal{L}_K \otimes \mathcal{M}_K^\vee$. Dann ist $p^* \mathcal{L}_K \cong p^* \mathcal{N}_K$ auf $Y'_K$ und das entsprechende Descent-Datum für $\mathcal{N}_K$ ist

$$\varphi_K \otimes \xi_1^{-n_1} \otimes \ldots \otimes \xi_s^{-n_s}$$

Es ist nun $\theta(v^* \psi^\nu) \in \mathcal{O}_{X''}(U^\nu)^\times$. Ersetzen wir also $\psi^\nu$ durch $\theta(v^* \psi^\nu)^{-1} \psi^\nu$ und $a_\nu$ durch $a_\nu\, \theta(v^* \psi^\nu) \in \mathcal{O}_{X''_K}(U^\nu_K)^\times$, so ist $\theta(v^* \psi^\nu) = 1$ und $a_\nu = v^* a_\nu$ somit eindeutig bestimmt. Dies zeigt, daß auch $a = a_\nu$ nicht von $\nu$ abhängt und $a \in \mathcal{O}^\times_{X''_K}(X''_K)$ einen Kozyklus bildet. Da $\mathcal{L}$ über $v_K$ trivialisiert ist, ist $a$ ein Korand. Also können wir den Isomorphismus von $\mathcal{L}'_K$ mit $p^* \mathcal{N}_K$ so ändern, daß das Descent-Datum für $\mathcal{N}_K$ die Form

$$\varphi'_K \;:=\; \varphi_K \otimes a^{-1} \otimes \xi_1^{-n_1} \otimes \ldots \otimes \xi_s^{-n_s}$$

hat. Auf $U^\nu_K \times_K V_K$ ist $\varphi'_K|_{U^\nu_K \times_K V_K} = \psi^\nu$. Dies zeigt, daß $|\varphi'_K(y)| = 1$ ist für alle Punkte $y \in Y''_K$. Somit läßt sich $\varphi'_K$ nach Lemma 2.16 zu einem Descent-Datum

$$\varphi' :\; p_1^* \mathcal{L}' \xrightarrow{\sim} p_2^* \mathcal{L}'$$

ausdehnen. $\varphi'$ erfüllt die Kozykelbedingung, da $\varphi'_K$ sie erfüllt. Also steigt $\mathcal{L}'$ nach Satz 2.18 wie gewünscht zu einem Geradenbündel $\mathcal{N}$ auf $X \times_R V$ ab. □

**Definition 4.16.**
In der Situation von Satz 4.15 ist der *multiplikative Anteil* des Geradenbündels $\mathcal{L}_K$ das Geradenbündel

$$\mathcal{M}_K \;\cong\; (\xi_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes \xi_s^{n_s})$$

aus Satz 4.15, welches durch die Kohomologieklassen $n_1, \ldots, n_s \in \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$ gegeben ist.

2. Fall:

Sei $X$ ein strikt semistabiles, zulässiges, formelles $R$-Schema und $\overline{T} = \operatorname{Spf} R\langle \mathbb{Z}^r \rangle$ ein formeller Torus. Sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $X \times_R \overline{T}$. Wir wollen $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel $\mathcal{M}$ auf $X \times_R \overline{T}$ zuordnen, das wir den multiplikativen Anteil von $\mathcal{L}$ nennen werden. Wir gehen dabei folgendermaßen vor.

1. Wir betrachten die Projektion

$$\varphi : \; X \times_R \overline{T} \;\longrightarrow\; X\,.$$

Für die Garbe von abelschen Gruppen $\mathcal{O}^{\times}_{X \times_R \overline{T}}$ auf $X \times_R \overline{T}$ gibt es eine Leray-Spektralsequenz, welche wie folgt konvergiert

$$E_2^{p,q} \;:=\; \mathrm{H}^p(X,\, \mathrm{R}^q \varphi_* \mathcal{O}^{\times}_{X \times_R \overline{T}}) \;\Longrightarrow\; \mathrm{H}^{p+q}(X \times_R \overline{T},\, \mathcal{O}^{\times}_{X \times_R \overline{T}})$$

(vergleiche [Ro, Seiten 350ff.]). Die exakte Sequenz der niedrigen Terme lautet

$$0 \;\longrightarrow\; \mathrm{H}^1(X,\, \varphi_* \mathcal{O}^{\times}_{X \times_R \overline{T}}) \;\xrightarrow{\alpha}\; \mathrm{H}^1(X \times_R \overline{T},\, \mathcal{O}^{\times}_{X \times_R \overline{T}}) \;\longrightarrow\; \mathrm{H}^0(X,\, \mathrm{R}^1 \varphi_* \mathcal{O}^{\times}_{X \times_R \overline{T}})\,.$$

Nach Satz 4.9 ist $\mathrm{R}^1 \varphi_* \mathcal{O}^{\times}_{X \times_R \overline{T}} \;=\; 0$. Wir bekommen also einen Isomorphismus

$$\alpha^{-1} : \; \operatorname{Pic}(X \times_R \overline{T}) \;\longrightarrow\; \mathrm{H}^1(X,\, \varphi_* \mathcal{O}^{\times}_{X \times_R \overline{T}})\,.$$

2. Es gibt einen Morphismus von Garben auf $X$

$$\operatorname{ord} : \; \varphi_* \mathcal{O}^{\times}_{X \times_R \overline{T}} \;\longrightarrow\; \mathbb{Z}^r\,.$$

Dieser läßt sich wie folgt beschreiben. Sei $U$ eine offene Teilmenge von $X$. Ohne Einschränkung sei $U$ zusammenhängend. Dann ist

$$\left(\varphi_* \mathcal{O}^{\times}_{X \times_R \overline{T}}\right)(U) \;=\; \mathcal{O}_{X \times_R \overline{T}}(U \times_R \overline{T})^{\times} \;=\; \Big(\mathcal{O}_X(U)\, \langle \mathbb{Z}^r \rangle\Big)^{\times} \;=:\; A^{\times}.$$

Wir wählen Koordinaten auf dem Torus, $\overline{T} = \operatorname{Spf} R\langle \zeta_1^{\pm 1}, \ldots, \zeta_r^{\pm 1} \rangle$. Nach [BGR, Lemma 9.7.1.1], ist dann jedes $a \in A^{\times}$ von der Form

$$a \;=\; u \cdot \zeta_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \zeta_r^{n_r} \cdot (1 + h)\,,$$

für $u \in \mathcal{O}_X(U)^{\times}$, $h \in A$ mit $|h|_{\operatorname{Sp} A_K} < 1$ und eindeutig bestimmte $n_i \in \mathbb{Z}$. Wir definieren nun

$$\operatorname{ord}(a) \;:=\; (n_1, \ldots, n_r) \;\in\; \mathbb{Z}^r \;=\; \mathbb{Z}^r(U)\,.$$

Dies ist verträglich mit Einschränkungen $\rho : U' \hookrightarrow U$, denn unter der zugehörigen Abbildung $\rho^* : A \longrightarrow \mathcal{O}_X(U')\langle \mathbb{Z}^r \rangle =: B$ wird $a$ zu

$$\rho^* a \;=\; (\rho^* u) \cdot \zeta_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \zeta_r^{n_r} \cdot (1 + \rho^* h)\,.$$

Dabei ist $\rho^* u \in \mathcal{O}_X(U')^\times$ nach wie vor eine Einheit und $|\rho^* h|_{\mathrm{Sp}\, B_K} < 1$ nach Lemma 2.15 . Somit ist ord ein Garbenmorphismus auf $X$ und wir erhalten einen Morphismus der Kohomologiegruppen

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{ord}) : \; \mathrm{H}^1(X,\, \varphi_* \mathcal{O}^\times_{X \times_R \overline{T}}) \;\longrightarrow\; \mathrm{H}^1(X,\, \mathbb{Z}^r)\,.$$

Insgesamt erhalten wir also einen Morphismus

$$\mathrm{mult} \;:=\; \mathrm{H}^1(\mathrm{ord}) \circ \alpha^{-1} : \; \mathrm{Pic}(X \times_R \overline{T}) \;\longrightarrow\; \mathrm{H}^1(X,\, \mathbb{Z})^r\,.$$

**Definition 4.17.**
Der *multiplikative Anteil* des Geradenbündels $\mathcal{L}$ auf $X \times_R \overline{T}$ ist das Element

$$\mathrm{mult}(\mathcal{L}) \;\in\; \mathrm{H}^1(X,\, \mathbb{Z})^r\,.$$

Ferner erhalten wir folgendes

**Lemma 4.18.**
*Durch* $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})^r \longrightarrow \mathrm{Pic}(X \times_R \overline{T})\,,\; (n_1, \ldots, n_r) \mapsto \zeta_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes \zeta_r^{n_r}$ *wird* $\mathrm{mult}(\mathcal{L})$ *auf ein Geradenbündel* $\mathcal{M}$ *abgebildet. Dann zerfällt das Geradenbündel* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^\vee$ *auf* $X \times_R \overline{T}$ *in das Produkt des Rücktransports eines Geradenbündels* $\mathcal{N}$ *auf* $X$ *und eines Geradenbündels* $\mathcal{H}$ *auf* $X \times_R \overline{T}$*, für das* $\mathcal{H} \otimes_R k$ *trivial ist.*

Beweis:
Dies folgt aus obiger Zerlegung der Einheiten $a = u \cdot \zeta_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \zeta_r^{n_r} \cdot (1 + h)\,.$ □

# Kapitel 5

# Der Beweis

## 5.1 Die Darstellung des Funktors $\overline{\mathrm{Pic}}^{0}_{X_K/K}$

In diesem Kapitel werden wir Satz 4.5 beweisen. Sei also $X_K$ eine eigentliche, glatte, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über $K$ mit strikt semistabilem, formellem Modell $X$ über $R$ und einem Punkt $x_K \in X_K(K)$.

Sei $R_n := R/(\pi^{n+1})$ und $X_n := X \times_R R_n$. Dann ist $X_n$ ein eigentliches, flaches $R_n$-Schema. Die Faser $X_0$ über dem einzigen Punkt $\operatorname{Spec} k$ von $\operatorname{Spec} R_n$ ist nach Definition 3.1 b) geometrisch reduziert. Ferner dehnt sich der $K$-wertige Punkt $x_K$ von $X_K$ zu einem $R$-wertigen Punkt $x$ von $X$ aus. Dieser reduziert zu $x_n \in X_n(R_n)$. Nach klassischen Resultaten von M. Artin ([Ar 1, Theorem 7.3]) ist deshalb $\mathrm{Pic}_{X_n/R_n}$ darstellbar durch einen algebraischen Raum, lokal von endlichem Typ über $R_n$. Da $R_n$ artinsch und $\mathrm{Pic}_{X_n/R_n}$ ein Gruppenobjekt ist, ist $\mathrm{Pic}_{X_n/R_n}$ nach [Ar 2, Theorem 3.5] ein Schema, und nach [EGA, IV, Proposition 2.7.1] lokal von endlichem Typ über $R_n$. Sei $P'_n$ die Zusammenhangskomponente, die das neutrale Element enthält. Dann stellt $P'_n$ den Funktor $\mathrm{Pic}^0_{X_n/R_n}$ dar und ist nach [SGA 3, I, Exposé $\mathrm{VI_A}$, Proposition 2.4] von endlichem Typ über $R_n$. Das neutrale Element der Gruppe $P'_n$ ist ein $R_n$-wertiger Punkt $1$. Weiter existiert auf $X_n \times_{R_n} P'_n$ das Poincaré-Bündel $\mathcal{P}'_n$. Dieses ist trivial entlang $X_n \times \{1\}$ und rigidifiziert mittels $\rho_n : \mathcal{O}_{P'_n} \xrightarrow{\sim} (x_n \times \mathrm{id}_{P'_n})^* \mathcal{P}'_n$.

Da $P'_n \times_{R_n} R_{n-1}$ die Eins-Komponente von $\mathrm{Pic}_{X_n/R_n} \times_{R_n} R_{n-1}$ ist, stellt $P'_n \times_{R_n} R_{n-1}$ nach Lemma 4.3 den Funktor $\mathrm{Pic}^0_{X_{n-1}/R_{n-1}}$ dar und ist somit kanonisch isomorph zu $P'_{n-1}$.

Folglich existiert der direkte Limes

$$P' \;:=\; \varinjlim P'_n \,.$$

Der topologische Raum $P'_0$ von $P'$ ist quasikompakt. Die Strukturgarbe ist

$$\mathcal{O}_{P'} \;:=\; \varprojlim \mathcal{O}_{P'_n} \,.$$

$P'$ ist ein formelles Schema, topologisch von endlichem Typ über $R$ nach [EGA, I, Proposition 10.6.3 und Corollaire 10.6.4] und [FRG, I, Lemma 1.5]. Da $R$ noethersch ist, ist $P'$ darüberhinaus topologisch von endlicher Darstellung über $R$.

Es ist $\mathcal{P}'_n = \mathcal{P}'_{n+1} \otimes_{R_{n+1}} R_n$. Das inverse System der $\mathcal{P}'_n$ besitzt somit als Limes das Geradenbündel

$$\mathcal{P}' \;:=\; \varprojlim \mathcal{P}'_n$$

auf $X \times_R P'$ (vergleiche [Ha, Proposition II.9.6]). Der $R$-wertige Punkt $1 := \varinjlim 1$ ist das neutrale Element der Gruppe $P'$. Entlang $X \times \{1\}$ ist $\mathcal{P}'$ trivial. Das inverse System der Rigidifizierungen $\rho'_n$ ergibt eine Rigidifizierung $\rho : \mathcal{O}_{P'} \xrightarrow{\sim} (x \times \mathrm{id}_{P'})^* \mathcal{P}'$.

Das formelle Schema $P'$ ist nicht notwendig flach über $R$. Dies liegt im wesentlichen daran, daß es Geradenbündel auf $X_n$ geben kann, die sich nicht zu Geradenbündeln auf $X_{n+1}$ ausdehnen. Da wir jedoch nur an der Darstellbarkeit des Funktors $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ interessiert sind, dividieren wir die $\pi$-Torsion von $P'$ aus. Das heißt zu jeder affinen, offenen Teilmenge $\mathrm{Spf}\, A'$ von $P'$ betrachten wir

$$\overline{A'} \;:=\; A' / \{ a \in A' : \pi^n a = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \}.$$

Dann ist $\overline{A'}$ ohne $R$-Torsion und folglich flach über $R$. Ferner faktorisiert jeder Morphismus $\varphi$ von $A'$ in eine flache $R$-Algebra $B$ durch $\overline{A'}$, da $\varphi$ das $\pi$-Torsionsideal von $A'$ in dasjenige von $B$ abbildet. Letzteres ist aber gleich $(0)$. Somit lassen sich die $\mathrm{Spf}\,\overline{A'}$ zu einem zulässigen, formellen $R$-Schema verkleben und dieses ist ein Gruppenschema. Sei $\overline{P'}_K$ die Zusammenhangskomponente dieses Schemas, welche den $R$-wertigen Punkt 1 enthält, also

$$\overline{P'} \;\subseteq\; P'/(\pi\text{-Torsion}) \;\hookrightarrow\; P'$$

Dann besitzt $\overline{P'}$ die Eigenschaft, daß jeder Morphismus von einem zusammenhängenden, zulässigen, formellen $R$-Schema $V$ nach $P'$ durch $\overline{P'}$ faktorisiert. Der Rücktransport des Geradenbündels $\mathcal{P}'$ nach $X \times_R \overline{P'}$ liefert ein rigidifiziertes Geradenbündel $\overline{\mathcal{P}'}$, trivial entlang $X \times \{1\}$. Dieses ist das Poincaré-Bündel, denn es gilt der

**Satz 5.1.**
*Das punktierte, zulässige, formelle $R$-Schema $(\overline{P'}, 1)$ stellt den Funktor $\mathrm{Pic}^0_{X/R}$ der rigidifizierten und trivialisierten Geradenbündel auf der Kategorie der zusammenhängenden, zulässigen, formellen $R$-Schemata dar.*

Beweis:
Sei $V$ ein zusammenhängendes, zulässiges, formelles $R$-Schema und $v \in V(R)$. Weiter sei $\mathcal{L}$ ein rigidifiziertes Geradenbündel auf $X \times_R V$, trivial entlang $X \times \{v\}$. Dann ist $\mathcal{L} \otimes_R R_n$ ein entsprechendes Geradenbündel auf $X_n \times_{R_n} V_n$. Also gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $f_n : V_n \longrightarrow P'_n$ und einen Isomorphismus

$$\varphi_n : \; \mathcal{L} \otimes_R R_n \;\xrightarrow{\sim}\; (\mathrm{id}_{X_n} \times f_n)^* \mathcal{P}'_n .$$

Wegen der Eindeutigkeit von $f_n$ gilt $f_{n+1} \otimes_{R_{n+1}} R_n \;=\; f_n$. Also setzen sich die $f_n$ zu einem eindeutig bestimmten Morphismus

$$f : V \;\longrightarrow\; P'$$

zusammen, der durch $\overline{P'}$ faktorisiert, da $V$ flach über $R$ und zusammenhängend ist. Es gilt $f(v) = 1$. Da die $\varphi_n$ die Rigidifizierung respektieren, folgt analog zu Lemma 4.4, daß sie eindeutig bestimmt sind. Also setzen sie sich zu dem Isomorphismus $\varphi : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{id}_X \times f)^* \mathcal{P}'$ zusammen. □

Wir betrachten nun die rigid analytische Gruppenvarietät $\overline{P'}_{\mathrm{rig}}$. Diese ist nicht notwendigerweise glatt über $K$. Falls $K$ Charakteristik 0 hat, ist jedoch die Varietät

$$\overline{P}_K \;:=\; \left(\overline{P'}_{\mathrm{rig}}\right)_{\mathrm{red}} \;=\; \left(\overline{P'}_{\mathrm{red}}\right)_{\mathrm{rig}}$$

geometrisch reduziert. Falls $K$ Charakteristik ungleich 0 hat, läßt sich im allgemeinen nicht erreichen, daß eine integre, rigid analytische Gruppenvarietät geometrisch reduziert ist, selbst wenn wir zuvor zu einer endlichen Körpererweiterung von $K$ übergehen. Dies zeigt folgendes

*Beispiel* 5.1.1. Sei $k := \mathbb{F}_p(t_n, n \in \mathbb{N})$, $R := k[\![u]\!]$ und $K := k((u))$. Das heißt $t_n$ sind Variablen mit Betrag 1 und $u$ ist eine Variable mit Betrag kleiner 1. Nun sei

$$A_K \;:=\; K\langle S,T\rangle \,/\, (S^p - \sum_{n\geq 1} u^n t_n T^{p^n})$$

Dann ist $\operatorname{Sp} A_K$ eine integere, rigid analytische Untergruppenvarietät von $\overline{\mathbb{G}}^2_{a,K}$. Für einen topologisch, algebraischen Abschluß $\overline{K}$ von $K$ ist $A_K \widehat{\otimes}_K \overline{K}$ nicht reduziert, weil sich die $p$-te Wurzel der Summe ziehen läßt. Jedoch läßt sich die $p$-te Wurzel nach keiner endlichen Körpererweiterung $K'$ von $K$ ziehen, und somit ist $A_K \otimes_K K'$ nach wie vor reduziert.

Im folgenden betrachten wir den Fall, in dem $\overline{P}_K$ geometrisch reduziert ist, wobei wir den Übergang zu einer endlichen, separablen Körpererweiterung zulassen. Falls $\operatorname{char} K = 0$ ist, gilt dies. Dieses ist die einzige Stelle im Beweis von Satz 4.5, an der wir $\operatorname{char} K = 0$ benötigen (vergleiche Bemerkung 4.5.2). Der Punkt $1 \in \overline{P'}(R)$ ergibt einen Punkt $1 \in \overline{P}_K(K)$ da $R$ reduziert ist.

Wenden wir das Theorem über die reduzierte Faser ([FRG, IV, Theorem 2.1]) auf das formelle $R$-Schema $\overline{P'}_{\text{red}}$ an, so erhalten wir nach einer endlichen, generisch separablen Ringerweiterung ein zulässiges, formelles $R$-Schema $\overline{P}$ mit geometrisch reduzierten Fasern, sowie einen endlichen Morphismus

$$\overline{P} \;\longrightarrow\; \overline{P'}_{\text{red}}$$

mit $\overline{P}_{\text{rig}} = \overline{P}_K$. Da $\overline{P}_0$ ein geometrisch reduziertes Gruppenschema ist, ist $\overline{P}_0$ glatt über $R_0$ nach [SGA 3, I, Exposé $\mathrm{VI_A}$, Proposition 1.3.1]. Folglich ist $\overline{P}$ nach [FRG, II, Lemma 1.2] glatt über $R$.

Mit $\overline{P'}_{\text{red}}$ ist auch $\overline{P}_K$ quasikompakt nach [FRG, I, Theorem 4.1]. Deshalb existiert das formelle Néron-Modell von $\overline{P}_K$ (vergleiche [BS, Theorem 1.2]) und dieses ist gleich $\overline{P}$ nach [BS, Proposition 2.3]. Das heißt, $\overline{P}$ besitzt die universelle Eigenschaft des Néron-Modells:

Für jedes glatte, zulässige, formelle $R$-Schema $V$ dehnt sich jeder Morphismus von rigiden $K$-Varietäten $f_K : V_K \longrightarrow \overline{P}_K$ zu einem eindeutig bestimmten Morphismus $f : V \longrightarrow \overline{P}$ aus.

Insbesondere dehnt sich $1 \in \overline{P}_K(K)$ zu $1 \in \overline{P}(R)$ aus. Wir erhalten insgesamt einen endlichen Morphismus

$$g : \; \overline{P} \;\longrightarrow\; \overline{P'}\,.$$

Der Rücktransport von $\overline{\mathcal{P}'}$ unter $g$ ist ein Geradenbündel $\overline{\mathcal{P}}$ auf $X \times \overline{P}$, welches entlang $\{x\} \times \overline{P}$ rigidifiziert und entlang $X \times \{1\}$ trivial ist. Es gilt nun der

**Satz 5.2.**
*Die punktierte, rigid analytische Varietät* $(\overline{P}_K, 1)$ *stellt den Funktor* $\overline{\operatorname{Pic}}^0_{X_K/K}$ *dar.*

<u>Beweis:</u>
Sei $V_K$ eine glatte, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über $K$ mit glattem, formellem Modell $V$, sowie $v_K \in V_K(K)$. Weiter sei $\mathcal{L}_K$ ein rigidifiziertes Geradenbündel auf $X_K \times_K V_K$, trivial entlang $X_K \times \{v_K\}$. Der Punkt $v_K$ dehnt sich zu einem Punkt $v \in V(R)$ aus. Nach Satz 2.7 ist nun $X \times_R V$ regulär und es existiert eine Ausdehnung $\mathcal{L}$ von $\mathcal{L}_K$ nach Satz 4.7. Diese kann so gewählt werden, daß sie entlang $\{x\} \times V$ rigidifiziert und entlang $X \times \{v\}$ trivial ist. Dadurch ist sie eindeutig bestimmt, wie wir weiter unten sehen werden. Sie induziert nach Satz 5.1 einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$f' : \; V \;\longrightarrow\; \overline{P'}$$

mit $\mathcal{L} \cong (\mathrm{id}_X \times f')^* \overline{\mathcal{P}'}$. Auf den generischen Fasern erhalten wir somit einen Morphismus

$$f'_{\mathrm{rig}} : V_K \longrightarrow \overline{P'}_{\mathrm{rig}},$$

der durch die reduzierte Untervarietät $\overline{P}_K$ faktorisiert, da $V_K$ reduziert ist. Nach der universellen Eigenschaft des Néron-Modells gibt es also einen Morphismus

$$f : V \longrightarrow \overline{P}.$$

Da $f'_{\mathrm{rig}} = g_{\mathrm{rig}} \circ f_{\mathrm{rig}}$ ist, gilt $f' = g \circ f$ (vergleiche [FRG, I, Aussage (b) im Beweis von Theorem 4.1]). Dies bedeutet, daß $\mathcal{L} \cong (\mathrm{id}_X \times f)^* \overline{\mathcal{P}}$ ist. Damit $f$ und somit auch $f_{\mathrm{rig}}$ eindeutig bestimmt ist, bleibt nun noch zu zeigen, daß $\mathcal{L}$ durch $\mathcal{L}_K$ eindeutig bestimmt ist. Dies ist nach dem folgenden Lemma 5.3 der Fall. □

*Bemerkung* 5.2.1.
Der Beweis von Satz 5.2 zeigt ferner, daß das punktierte, formelle $R$-Schema $(\overline{P}, 1)$ den Funktor $\mathrm{Pic}^0_{X/R}$ der rigidifizierten und trivialisierten Geradenbündel auf der Kategorie der glatten, zusammenhängenden, zulässigen, formellen $R$-Schemata darstellt.

**Lemma 5.3.**
*Sei $V$ ein zulässiges, formelles Schema über $R$ mit reduzierter spezieller Faser. Sei ferner $f : V \longrightarrow \overline{P}$ ein Morphismus, welcher das formelle Geradenbündel $\mathcal{L} := (\mathrm{id}_X \times f)^* \overline{\mathcal{P}}$ auf $X \times_R V$ induziere. Dann gilt:*

*Falls $\mathcal{L} \otimes_R K$ trivial ist, so ist bereits $\mathcal{L}$ trivial.*

Beweis:
Sei $w \in V(R')$ für den Bewertungsring $R'$ einer endlichen Erweiterung $K'$ von $K$. Dann wird das formelle Geradenbündel $\mathcal{L}' := (\mathrm{id}_X \times w)^* \mathcal{L}$ auf $X' := X \times_R R'$ von dem Morphismus $g \circ f \circ w : R' \longrightarrow \overline{P} \longrightarrow \overline{P'}$ induziert. Wir betrachten $X'$ als formelles $R'$-Schema. Die spezielle Faser über dem Restklassenkörper $k'$ von $R'$ ist

$$X'_0 := X' \times_{R'} k' = X_0 \times_k k'$$

und somit geometrisch reduziert, da $X_0$ geometrisch reduziert ist. Also trägt das Geradenbündel $\mathcal{L}'_{K'} := \mathcal{L}' \otimes_{R'} K'$ eine Norm wie in Abschnitt 2.2 beschrieben. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{L}'_{K'}$ trivial und es gibt einen globalen Schnitt $0 \neq l \in \Gamma(X'_{K'}, \mathcal{L}'_{K'})$, der $\mathcal{L}'_{K'}$ erzeugt. Nach Lemma 2.12 läßt sich $l$ normieren zu $|l|_{X'_{K'}} = 1$. Damit ist $l \in \Gamma(X', \mathcal{L}')$ nach Lemma 2.16 und $l_0 := l \otimes_{R'} k' \neq 0$ ein globaler Schnitt von $\mathcal{L}'_0 := \mathcal{L}' \otimes_{R'} k'$ über $X'_0$. Wir müssen zeigen, daß $l$ nullstellenfrei auf $X'$ ist. Sei dazu $i : C_0 \hookrightarrow X'_0$ eine komplette, integre Kurve in $X'_0$ mit $i^* l_0 \neq 0$. Da $\mathcal{L}'_0 \in \mathrm{Pic}^0_{X'_0/k'}(k')$ ist, gehört die Restriktion $i^* \mathcal{L}'_0$ zu $\mathrm{Pic}^0_{C_0/k'}(k')$, das heißt $\deg(i^* \mathcal{L}'_0) = 0$. Nachdem $i^* l_0$ ohne Polstelle auf $C_0$ ist, hat $i^* l_0$ folglich auch keine Nullstelle auf $C_0$. Also ist $i^* \mathcal{L}' \cong \mathcal{O}_{C_0}$ und $i^* l_0$ konstant. Da sich je zwei Punkte von $X'_0$ durch eine Kette kompletter, integrer Kurven miteinander verbinden lassen und $X'_0$ reduziert ist, ist $l_0 \neq 0$ konstant auf $X'_0$ und folglich $\mathcal{L}' \cong \mathcal{O}_{X'}$.

Somit ist $f(w) = 1 \in \overline{P'}$ und da $V_0$ reduziert ist, bildet $f$ nach Lemma 2.8 ganz $V$ auf das neutrale Element 1 von $\overline{P'}$ ab. Dies bedeutet, daß $\mathcal{L}$ trivial ist. □

## 5.2 Die Struktur von $\overline{P}_{K}$

Wir wollen nun die Struktur von $\overline{P}_{K}$ studieren. Dazu betrachten wir zunächst die spezielle Faser $\overline{P}_0$ von $\overline{P}$. Diese ist ein glattes, zusammenhängendes, kommutatives Gruppenschema über $k$. Über einem algebraischen Abschluß $\overline{k}$ von $k$ ist $\overline{P}_0 \otimes_k \overline{k}$ deshalb nach einem Satz von C. Chevalley (siehe [BLR, Theorem 9.2.1]) eine Erweiterung

$$1 \longrightarrow L_{\overline{k}} \longrightarrow \overline{P}_0 \otimes_k \overline{k} \longrightarrow B_{\overline{k}} \longrightarrow 1$$

einer abelschen Varietät $B_{\overline{k}}$ durch eine glatte, zusammenhängende, lineare Gruppe $L_{\overline{k}}$. Nach [SGA 3, II, Exposé XVII, Théorème 7.2.1] ist

$$L_{\overline{k}} = T_{\overline{k}} \times_{\overline{k}} U_{\overline{k}}$$

das direkte Produkt einer Gruppe $T_{\overline{k}}$ von multiplikativem Typ und einer unipotenten Gruppe $U_{\overline{k}}$. Da $L_{\overline{k}}$ glatt über $\overline{k}$, affin und zusammenhängend ist, gilt dies für $T_{\overline{k}}$ und $U_{\overline{k}}$ ebenso. Nach [SGA 3, II, Exposé X, Proposition 1.4] ist $T_{\overline{k}}$ diagonalisierbar, das heißt

$$T_{\overline{k}} \cong \operatorname{Spec} \overline{k}[M] = \big(\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, M)\big)_{\overline{k}}$$

für eine abelsche Gruppe $M$. Da $T_{\overline{k}}$ von endlichem Typ über $\overline{k}$ ist, ist $M$ nach [SGA 3, II, Exposé VIII, Proposition 2.1] endlich erzeugt und folglich eine direkte Summe einer freien Gruppe mit einer endlichen Gruppe. Nach [SGA 3, II, Exposé VIII, Théorème 3.1] ist $T_{\overline{k}}$ entsprechend das Produkt eines Torus mit einer endlichen $k$-Gruppe. Da $T_{\overline{k}}$ zusammenhängend und glatt ist, ist der Torsionsanteil von $M$ trivial (vergleiche [SGA 3, II, Exposé VIII, Proposition 2.1]). Also ist $T_{\overline{k}} \cong \mathbb{G}^{\,r}_{m,\overline{k}}$ ein Torus.

Nachdem in obiger Überlegung alle Schemata und Morphismen von endlichem Typ über $k$ sind, sind sie bereits über einer endlichen Erweiterung $k'$ von $k$ definiert, nach Basiswechsel mit einer geeigneten endlichen, generisch separablen Erweiterung von $R$ also über $k$:

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}^{r}_{m,k} \times_k U_{k} \longrightarrow \overline{P}_0 \longrightarrow B_{k} \longrightarrow 1\,.$$

Wir wollen nun zeigen, daß der unipotente Anteil $U_{k}$ trivial ist. Nach [SGA 3, II, Exposé XVII, Proposition 4.1.1] ist dies gleichbedeutend damit, daß $\overline{P}_0$ keine additive Gruppe $\mathbb{G}_{a,k}$ enthält.

Wir nehmen also an, es gäbe eine additive Gruppe in $\overline{P}_0$

$$\mathbb{G}_{a,k} \hookrightarrow \overline{P}_0\,.$$

Dann dehnt sich diese wegen der Glattheit von $\overline{P}$ zu einem Morphismus $\mathbb{D}^1_{R} \longrightarrow \overline{P}$ ([FRG, II, Lemma 1.4]) aus. Dieser induziert ein Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $X \times_R \mathbb{D}^1_{R}$, welches über $0 \in \mathbb{D}^1_{R}$ trivial ist. Nach Satz 4.9 ist $\mathcal{L}$ lokaltrivial über $X$, das heißt es gibt eine offene Überdeckung $\{X^i\}$ von $X$, so daß $\mathcal{L}|_{X^i \times_R \mathbb{D}^1_R}$ frei ist. Die Verklebung über $X^{ij} := X^i \cap X^j$ erfolgt durch Einheiten $u_{ij} \in \mathcal{O}_X(X^{ij})\langle\zeta\rangle^{\times}$. Diese sind von der Form

$$u_{ij} = a_{ij}(1 + h_{ij})\,,$$

wobei $a_{ij} \in \mathcal{O}_X(X^{ij})^{\times}$ und $h_{ij} \in \mathcal{O}_X(X^{ij})\langle\zeta\rangle$ mit $|h_{ij}| < 1$ und $h_{ij}(0) = 0$ ist. Da $\mathcal{L}$ über 0 trivial ist, bilden die $a_{ij}$ einen Korand. Modulo $\pi$ ist folglich $\widetilde{u}_{ij} = \widetilde{a}_{ij}$ ein Korand und somit $\mathcal{L}_0$ trivial. Dies bedeutet, daß der ganze $\mathbb{G}_{a,k}$ auf das neutrale Element $1 \in \overline{P'}_0 \subseteq P'_0$ abgebildet wird. Da mit $g$ auch der Morphismus $g_0 : \overline{P}_0 \longrightarrow \overline{P'}_0$ endlich ist (vergleiche [BGR, Theorem 6.3.5.1]) wird somit die ganze additive Gruppe $\mathbb{G}_{a,k}$ auf $1 \in \overline{P}_0$ abgebildet. Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme. Also haben wir gezeigt:

**Satz 5.4.**
*Nach einer geeigneten endlichen, generisch separablen Ringerweiterung von $R$ besitzt $\overline{P}$ split semiabelsche Reduktion, das heißt die spezielle Faser $\overline{P}_0$ ist eine Erweiterung*

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k}^r \longrightarrow \overline{P}_0 \longrightarrow B_k \longrightarrow 1$$

*einer abelschen Varietät $B_k$ durch einen Torus $\mathbb{G}_{m,k}^r$.*

Die Torusuntergruppe $T_0 := \mathbb{G}_{m,k}^r$ von $\overline{P}_0$ dehnt sich nach [SGA 3, II, Exposé XV, Corollaire 2.3] zu einer eindeutig bestimmten Torusuntergruppe $T_n \subseteq \overline{P}_n$ aus. Da $T_n$ glatt über $R_n$ ist nach [SGA 3, II, Exposé IX, Proposition 2.1] und $T_0$ in ein direktes Produkt von multiplikativen Gruppen zerfällt, gilt nach [SGA 3, II, Exposé IX, Théorème 3.6] auch $T_n = \mathbb{G}_{m,R_n}^r$. Auf diese Weise dehnt sich $T_0$ zu einem formellen Torus aus,

$$\overline{\mathbb{G}}_{m,R}^r := \varinjlim \mathbb{G}_{m,R_n}^r \subseteq \overline{P}.$$

Auf den Stufen ist die durch $T_n$ gegebene Äquivalenzrelation auf $\overline{P}_n$ nach [SGA 3, I, Exposé VI$_\mathrm{A}$, Théorème 3.2] (fpqc)-effektiv ([SGA 3, I, Exposé IV, Définition 3.4.3]). Da $\overline{P}_n$ zusammenhängend ist, heißt dies insbesondere, die Faktorgruppe $\overline{P}_n/T_n$ existiert als zusammenhängendes Schema $B_n$ von endlichem Typ über $R_n$ und der Morphismus $\overline{P}_n \longrightarrow B_n$ ist treu-flach. Wegen der (fpqc)-Effektivität ist nach [SGA 3, I, Exposé IV, Proposition 3.4.5] die Bildung der Faktorgruppe mit Basiserweiterungen verträglich. Also gilt insbesondere

$$B_{n-1} \cong B_n \times_{R_n} R_{n-1}.$$

Nach [EGA, I, Proposition 10.6.3 und Corollaire 10.6.4] und [FRG, I, Lemma 1.5] existiert somit der direkte Limes

$$B := \varinjlim B_n$$

als formelles Schema, topologisch von endlichem Typ über $R$. Da $R$ noethersch ist, ist $B$ darüberhinaus topologisch von endlicher Darstellung über $R$. Da $\overline{P}_n$ flach über $R_n$ ist, faktorisiert der Morphismus $\overline{P}_n \longrightarrow B_n$ durch den flachen Ort $B'_n$ von $B_n$. Als Quotient von $T_n \hookrightarrow \overline{P}_n$ ist $B_n$ aber eindeutig bestimmt und somit gleich $B'_n$, also selbst flach über $R_n$. Nach [Bo, Théorème III.5.1] ist deshalb auch $B$ flach über $R$, also ein zulässiges, formelles $R$-Schema. Aus dem gleichen Grund ist $\overline{P}$ flach über $B$. Da $B_0 = B_k$ glatt und eigentlich über $R_0$ ist, ist $B$ formal glatt nach [FRG, II, Lemma 1.2] und eigentlich über $R$, also eine formell abelsche Varietät über $R$. Wir erhalten folgenden

**Satz 5.5.**
*Nach einer geeigneten endlichen, generisch separablen Ringerweiterung von $R$ ist $\overline{P}$ eine Erweiterung*

$$1 \longrightarrow \overline{T} \longrightarrow \overline{P} \longrightarrow B \longrightarrow 1.$$

*einer formell abelschen Varietät $B$ durch einen formellen Torus $\overline{T} \cong \overline{\mathbb{G}}_{m,R}^r$. Die Erweiterung ist lokal trivial bezüglich einer Zariski-offenen Überdeckung von $B$ und entspricht einem Gruppenmorphismus $\eta : \chi(\overline{T}) \longrightarrow B^\vee$ von der Charaktergruppe $\chi(\overline{T})$ des Torus in die duale, formell abelsche Varietät $B^\vee$ von $B$.*

*Bemerkung* 5.5.1.
Für die Stufen $B_n$ existiert nach [Ar 1, Theorem 7.3] die duale, abelsche Varietät $B_n^\vee$ als $R_n$-Schema ([Ar 2, Theorem 3.5]). Der direkte Limes $B^\vee$ der $B_n^\vee$ ist die duale, formell abelsche Varietät. Sie stellt den Funktor der translationsinvarianten Geradenbündel auf $B$ dar.

Beweis:
Wir müssen nur noch zeigen, daß die Erweiterung lokal trivial über $B$ ist. Für das Gruppenschema $G_n := T_n \times_{R_n} B_n$ ist nach [SGA 3, I, Exposé VI$_\mathrm{A}$, Théorème 3.2] die Abbildung

$$\overline{P}_n \times_{B_n} G_n \;=\; \overline{P}_n \times_{R_n} T_n \;\xrightarrow{\sim}\; \overline{P}_n \times_{B_n} \overline{P}_n\,, \qquad (p,\,t) \;\longmapsto\; (p,\,pt)$$

ein Isomorphismus. Das heißt $\overline{P}_n$ ist in der Kategorie der $B_n$-Schemata ein formaler $G_n$-Torsor ([SGA 3, I, Exposé III, Définition 0.1]). Also ist auch $\overline{P}$ in der Kategorie der zulässigen, formellen $B$-Schemata ein formaler $G$-Torsor mit

$$G \;:=\; \varinjlim G_n \;=\; \overline{\mathbb{G}}^{\,r}_{m,R} \times_R B\,.$$

Da $\overline{P}_0$ und $G_0$ treu-flach und quasikompakt über $B_0$ sind, ist $\overline{P}_0$ nach [SGA 3, I, Exposé IV, Proposition 5.1.6] ein $G_0$-Torsor bezüglich der (fpqc)-Topologie. Nach [SGA 3, II, Exposé VIII, Proposition 4.1] und der dieser Proposition vorausgehenden Diskussion ist $\overline{P}_0$ folglich affin über $B_0$, also durch eine quasikohärente $\mathcal{O}_{B_0}$-Algebra $\mathcal{A}$ gegeben. Diese ist eine direkte Summe

$$\mathcal{A} \;=\; \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}^r} \mathcal{A}(m)\,,$$

wobei die $\mathcal{A}(m)$ invertierbare $\mathcal{O}_{B_0}$-Moduln sind und

$$\mathcal{A}(m) \otimes_{\mathcal{O}_{B_0}} \mathcal{A}(m') \;\xrightarrow{\sim}\; \mathcal{A}(m+m')$$

für alle $m,\, m' \in \mathbb{Z}^r$ isomorph ist. Für eine $\mathbb{Z}$-Basis $(m_i)$ von $\mathbb{Z}^r$ ist folglich $\overline{P}_0$ eindeutig durch die invertierbaren $\mathcal{O}_{B_0}$-Moduln $\mathcal{A}(m_1),\,\ldots,\,\mathcal{A}(m_r)$ bestimmt. Da diese trivial bezüglich einer geeigneten Zariski-Überdeckung $(U_0^\nu)$ von $B_0$ sind, gilt dies für $\overline{P}_0$ ebenso:

$$\overline{P}_0 \times_{B_0} U_0^\nu \;\cong\; \mathbb{G}^r_{m,R_0} \times_{R_0} U_0^\nu\,.$$

Dies zeigt, daß $\overline{P} \times_B U^\nu$ formal glatt über $U^\nu$ ist (vergleiche [FRG, II, Lemma 1.2]). Der Schnitt $U_0^\nu \longrightarrow \overline{P}_0 \times_{B_0} U_0^\nu$ dehnt sich somit zu einem Schnitt $U^\nu \longrightarrow \overline{P} \times_B U^\nu$ aus ([FRG, II, Lemma 1.4]). Nach [SGA 3, I, Exposé IV, Corollaire 5.1.4] ist deshalb der formale $(G \times_B U^\nu)$-Torsor $\overline{P} \times_B U^\nu$ trivial, das heißt es gilt

$$\overline{P} \times_B U^\nu \;\cong\; \overline{\mathbb{G}}^{\,r}_{m,R} \times_R U^\nu\,.$$

Diese Isomorphismen respektieren die Torsorstrukturen auf beiden Seiten. Also wird die Erweiterung durch einen Gruppenmorphismus $\eta : \chi(\overline{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(B,\,\mathcal{O}_B^*)$ beschrieben. Dieser faktorisiert durch $B^\vee$ (vergleiche [BL 3, Section 3] und [Se, Theorem VII.3.6]). □

**Lemma 5.6.**
*Der Rang des Torus $\overline{T}$ von Satz 5.5 ist*

$$r \;=\; \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{H}^1(X_K,\,\mathbb{Z}) \;=\; \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{H}^1(X_0,\,\mathbb{Z})\,.$$

*Seien $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ Koordinaten auf dem Torus $\overline{T} \;=\; \overline{\mathbb{G}}^{\,r}_{m,R}$. Dann wird der Morphismus $\overline{T} \longrightarrow \overline{P}$ für eine geeignete $\mathbb{Z}$-Basis $b_1,\ldots,b_r$ von $\mathrm{H}^1(X_K,\,\mathbb{Z}) \;=\; \mathrm{H}^1(X_0,\,\mathbb{Z})$ durch das Geradenbündel $\zeta_1^{b_1} \otimes \ldots \otimes \zeta_r^{b_r}$ auf $X \times_R \overline{T}$ gegeben.*

Beweis:
1. Sei $\tau : \overline{T} \longrightarrow \overline{P}$ die Einbettung von $\overline{T}$ in $\overline{P}$. Wir betrachten auf $X \times_R \overline{T}$ das Geradenbündel $\mathcal{T} \;:=\; (\mathrm{id}_X \times \tau)^* \overline{\mathcal{P}}$. Sei $(b_1,\ldots,b_r) \;:=\; \mathrm{mult}(\mathcal{T}) \;\in\; \mathrm{H}^1(X_0,\,\mathbb{Z})^r$

(Definition 4.17) und $\mathcal{M} := (\zeta_1^{b_1} \otimes \ldots \otimes \zeta_r^{b_r})$ das zugehörige Geradenbündel auf $X \times_R \overline{T}$. Dann gilt nach Lemma 4.18

$$\mathcal{L} \;:=\; \mathcal{T} \otimes \mathcal{M}^{\vee} \;\cong\; \mathcal{N} \otimes \mathcal{H}$$

für ein Geradenbündel $\mathcal{N}$ auf $X$ und ein Geradenbündel $\mathcal{H}$ auf $X \times_R T$, für das $\mathcal{H} \otimes_R k$ trivial ist. Da $\mathcal{T}$ und $\mathcal{M}$ trivial entlang $X \times \{1\}$ sind, ist $\mathcal{N} \otimes (\mathrm{id}_X \times 1)^* \mathcal{H}$ trivial auf $X$ und folglich ist

$$\mathcal{L} \;\cong\; (\mathrm{id}_X \times 1)^* \mathcal{H}^{\vee} \otimes \mathcal{H}$$

mit $\mathcal{L} \otimes_R k$ trivial. Dem Geradenbündel $\mathcal{L}$ entspricht nach Bemerkung 5.2.1 ein eindeutig bestimmter Morphismus $f : \overline{T} \longrightarrow \overline{P}$ mit $\mathcal{L} \cong (\mathrm{id}_X \times f)^* \overline{\mathcal{P}}$. Da $\tau$ ein Gruppenmorphismus ist und $\left((\zeta_\rho\, \zeta'_\rho)^{b_\rho}\right) \cong (\zeta_\rho^{b_\rho}) \otimes (\zeta'^{\,b_\rho}_\rho)$ gilt, ist auch $f$ ein Homomorphismus von Gruppen. Es gilt

$$f_0 \;:=\; f \otimes_R k : \; \overline{T}_0 \;\longrightarrow\; \{1\} \;\subseteq\; \overline{P}_0 \,.$$

Deshalb ist nach [SGA 3, II, Exposé IX, Corollaire 3.5] auch $f$ der konstante Homomorphismus

$$f : \; \overline{T} \;\longrightarrow\; \{1\} \;\subseteq\; \overline{P} \,.$$

Das heißt, das Geradenbündel $\mathcal{L}$ ist trivial. Also ist $\mathcal{T} \cong (\zeta_1^{b_1} \otimes \ldots \otimes \zeta_r^{b_r})$.

<u>2.</u> Behauptung: Die $b_1, \ldots, b_r$ bilden eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{Z})$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die $b_1, \ldots, b_r$ über $\mathbb{Z}$ linear unabhängig sind. Sei dazu $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r = 0$. Wir betrachten den Morphismus

$$f : \; \overline{\mathbb{G}}_{m,R} \;\longrightarrow\; \overline{T}\,, \qquad \xi \;\longmapsto\; (\xi^{\lambda_1}, \ldots, \xi^{\lambda_r}) \;=\; (\zeta_1, \ldots, \zeta_r)\,.$$

Dieser induziert das Geradenbündel $(\mathrm{id}_X \times f)^* \mathcal{T} \;\cong\; (\xi^{\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r})$ auf $X \times_R \overline{\mathbb{G}}_{m,R}$, welches trivial ist. Somit faktorisiert $f$ durch $\{1\} \subseteq \overline{P}$ und also auch durch $\{1\} \subseteq \overline{T}$. Dies bedeutet aber, daß $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ ist. Also ist die lineare Unabhängigkeit gezeigt.

Wir zeigen nun noch, daß die Elemente $b_1, \ldots, b_r$ die Gruppe $\mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{Z})$ erzeugen. Sei dazu $n \in \mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{Z})$. Wir betrachten das Geradenbündel $(\xi^n)$ auf $X \times_R \overline{\mathbb{G}}_{m,R}$. Dieses induziert einen Morphismus $f : \overline{\mathbb{G}}_{m,R} \longrightarrow \overline{P}$. Da $\left((\xi_1\, \xi_2)^n\right) \cong (\xi_1^n) \otimes (\xi_2^n)$ ist, ist $f$ ein Homomorphismus von Gruppen. In der Reduktion erhalten wir

$$f_0 : \; \mathbb{G}_{m,k} \;\longrightarrow\; \overline{P}_0 \;\longrightarrow\; B_0 \,.$$

Da $B_0$ eine abelsche Varietät ist faktorisiert $f_0$ durch $\{1\} \subseteq B_0$ und $f$ nach [SGA 3, II, Exposé IX, Corollaire 3.5] damit durch $\{1\} \subseteq B$. Das heißt $f$ faktorisiert durch den Kern von $\overline{P} \longrightarrow B$,

$$f : \; \overline{\mathbb{G}}_{m,R} \;\xrightarrow{\;g\;}\; \overline{T} \;\hookrightarrow\; \overline{P}\,.$$

Es ist $g^* \zeta_i \;=\; \xi^{\lambda_i}$ für gewisse $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, da $g$ ein Gruppenmorphismus ist. Somit ist das Geradenbündel

$$(\xi^n) \;\cong\; g^*(\zeta_1^{b_1} \otimes \ldots \otimes \zeta_r^{b_r}) \;\cong\; (\xi^{\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r})$$

auf $X \times_R \overline{\mathbb{G}}_{m,R}$. Sein multiplikativer Anteil ist

$$n \;=\; \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r \;\in\; \mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{Z})\,.$$

<u>3.</u> Behauptung: $\mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{Z}) \;=\; \mathrm{H}^1(X_{_K}, \mathbb{Z})$.

Beweis: Die Reduktionsabbildung $X_{_K} \longrightarrow X_0$ ist stetig und induziert eine kanonische Abbildung $\alpha : \mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_{_K}, \mathbb{Z})$.

Wir zeigen zunächst, daß $\alpha$ injektiv ist. Sei $n \in \mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{Z})$. Wir betrachten das Geradenbündel $(\xi^n)$ auf $X \times_R \overline{\mathbb{G}}_{m,R}$. Ist $\alpha(n) = 0$, so ist $(\xi^n) \otimes_R K$ trivial auf $X_K \times_K \overline{\mathbb{G}}_{m,K}$. Nach Lemma 5.3 ist dann aber bereits $(\xi^n)$ trivial, also $n = 0$.

Wir zeigen nun noch, daß $\alpha$ surjektiv ist. Sei $n \in \mathrm{H}^1(X_K, \mathbb{Z})$. Wir betrachten das Geradenbündel $(\xi^n)$ auf $X_K \times_K \overline{\mathbb{G}}_{m,K}$. Nach Satz 5.2 gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : \overline{\mathbb{G}}_{m,R} \longrightarrow \overline{P}$ mit $(\xi^n) \cong (\mathrm{id}_{X_K} \times f_{\mathrm{rig}})^* \overline{\mathcal{P}}_K$. Da $\big((\xi_1\, \xi_2)^n\big) \cong (\xi_1^n) \otimes (\xi_2^n)$ ist, ist $f$ ein Homomorphismus von Gruppen. Dann folgt ebenso wie in 2., daß $(\xi^n) \cong (\xi^{\alpha(m)})$ ist für ein $m \in \mathrm{H}^1(X_0, \mathbb{Z})$. Folglich ist $n = \alpha(m)$ und die Behauptung gezeigt. $\square$

## 5.3 Die universelle Überlagerung

Der formelle Torus $\overline{T}_{\mathrm{rig}} \cong \overline{\mathbb{G}}^r_{m,K}$ läßt sich in den affinen Torus $T_K := \mathbb{G}^r_{m,K}$ einbetten. Beide haben dieselbe Charaktergruppe

$$\chi(\overline{T}) \;=\; \mathrm{Hom}(\overline{T}_{\mathrm{rig}}, \overline{\mathbb{G}}_{m,K}) \;=\; \mathrm{Hom}(T_K, \mathbb{G}_{m,K}) \;=\; \chi(T_K)\,.$$

Somit definiert der in Satz 5.5 gegebene Homomorphismus $\eta : \chi(T_K) \longrightarrow B^\vee$ eine Erweiterung $\widehat{P}_K$ von $B_{\mathrm{rig}}$ durch den affinen Torus $T_K$. Diese ist das push-forward von $\overline{P}_K$ bezüglich obiger Einbettung,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \overline{T}_{\mathrm{rig}} & \longrightarrow & \overline{P}_K & \longrightarrow & B_{\mathrm{rig}} & \longrightarrow & 1 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & T_K & \longrightarrow & \widehat{P}_K & \longrightarrow & B_{\mathrm{rig}} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Das heißt lokal über $U^\nu_{\mathrm{rig}} \subseteq B_{\mathrm{rig}}$ ist

$$\widehat{P}_K \times_{B_{\mathrm{rig}}} U^\nu_{\mathrm{rig}} \;\cong\; \mathbb{G}^r_{m,K} \times_K U^\nu_{\mathrm{rig}}\,.$$

Das Verklebungsdatum ist durch $\eta$ gegeben.

**Lemma 5.7.**
*Das rigidifizierte Geradenbündel $(\overline{\mathcal{P}}_K, \overline{\rho}_K)$ auf $X_K \times_K \overline{P}_K$ dehnt sich zu einem rigidifizierten Geradenbündel $(\widehat{\mathcal{P}}_K, \widehat{\rho}_K)$ auf $X_K \times_K \widehat{P}_K$ aus.*

Beweis:
Aus der Erweiterung von formellen $R$-Gruppenschemata

$$0 \;\longrightarrow\; \overline{T} \;\longrightarrow\; \overline{P} \;\longrightarrow\; B \;\longrightarrow\; 0$$

erhalten wir nach Basiserweiterung mit $X \longrightarrow \mathrm{Spf}\, R$ folgende Erweiterung von glatten, zulässigen, formellen $X$-Gruppenschemata

$$0 \;\longrightarrow\; \overline{T}_X \;\longrightarrow\; \overline{P}_X \;\stackrel{\beta}{\longrightarrow}\; B_X \;\longrightarrow\; 0\,.$$

Das Poincaré-Bündel $\overline{\mathcal{P}}$ auf $\overline{P}_X$ besitzt eine kubische Struktur (vergleiche [Mo]). Dies bedeutet folgendes. Wir betrachten das Geradenbündel

$$\mathcal{D}_3\overline{\mathcal{P}} \;:=\; \mu^*_{123}\,\overline{\mathcal{P}} \otimes \mu^*_{12}\,\overline{\mathcal{P}}^\vee \otimes \mu^*_{13}\,\overline{\mathcal{P}}^\vee \otimes \mu^*_{23}\,\overline{\mathcal{P}}^\vee \otimes \mu^*_1\,\overline{\mathcal{P}} \otimes \mu^*_2\,\overline{\mathcal{P}} \otimes \mu^*_3\,\overline{\mathcal{P}}$$

auf $\overline{P}_X^{\,3}$, wobei $\mu_I : \overline{P}_X^{\,3} \longrightarrow \overline{P}_X$ der Morphismus $(p_1, p_2, p_3) \mapsto \sum_{i\in I} p_i$ ist. Eine kubische Struktur auf $\overline{\mathcal{P}}$ ist nun eine Trivialisierung $\tau$ von $\mathcal{D}_3\overline{\mathcal{P}}$, welche bestimmte Symmetrie- und Kozykelbedingungen ([Mo, Définition I.2.4.5]) erfüllt. Wegen der universellen Eigenschaft von $\overline{\mathcal{P}}$ (vergleiche Bemerkung 5.2.1) gilt

$$\mu_I^*\overline{\mathcal{P}} \;\cong\; \bigotimes_{i\in I} \mu_i^*\,\overline{\mathcal{P}}\,.$$

Somit existiert eine Trivialisierung $\tau$ von $\mathcal{D}_3\overline{\mathcal{P}}$. Da $\mathcal{D}_3\overline{\mathcal{P}}$ rigidifiziert ist, erfüllt $\tau$ die Symmetrie- und Kozykelbedingungen [Mo, Définition I.2.4.5] und ist folglich eine kubische Struktur auf $\overline{\mathcal{P}}$.

Wäre $\overline{\mathcal{P}}|_{\overline{T}_X}$ trivial, so würde das kubische Bündel $\overline{\mathcal{P}}$ zu einem Bündel auf $B_X$ absteigen. Also wählen wir eine offene, formelle Überdeckung $\{X^\nu\}$ von $X$, auf der es Trivialisierungen

$$\delta^\nu : \;\overline{\mathcal{P}}|_{X^\nu\times_R\overline{T}} \;\xrightarrow{\;\sim\;}\; \mathcal{O}_{X^\nu\times_R\overline{T}}$$

gibt (vergleiche Lemma 5.6).

Wir betrachten nun auf $X_n^\nu \times_{R_n} \overline{P}_n$ das Geradenbündel $\overline{\mathcal{P}}_n$ mit der kubischen Struktur $\tau_n$ und der Trivialisierung $\delta_n^\nu$ von $\overline{\mathcal{P}}_n|_{X_n^\nu\times_{R_n}\overline{T}_n}$. Nach [Mo, Proposition I.7.2.2] gibt es ein eindeutig bestimmtes Geradenbündel $\mathcal{B}_n^\nu$ auf $X_n^\nu \times_{R_n} B_n$ welches $\overline{\mathcal{P}}_n \cong \overline{\beta}_n^{\,*}\mathcal{B}_n^\nu$ erfüllt und mit der Trivialisierung $\delta_n^\nu$ verträglich ist. Da auch $\mathcal{B}_{n+1}^\nu \otimes_{R_{n+1}} R_n$ diese Eigenschaft besitzt, gibt es einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{B}_{n+1}^\nu \otimes_{R_{n+1}} R_n \;\cong\; \mathcal{B}_n^\nu$. Nach [Ha, Proposition II.9.6] existiert somit der inverse Limes

$$\mathcal{B}^\nu \;:=\; \varprojlim \mathcal{B}_n^\nu\,.$$

Für das Geradenbündel $\mathcal{B}^\nu$ auf $X^\nu \times_R B$ gilt $\mathcal{B}_n^\nu = \mathcal{B}^\nu/\pi^{n+1}\mathcal{B}^\nu$ und folglich wie gewünscht

$$\overline{\mathcal{P}}|_{X^\nu\times_R\overline{P}} \;\cong\; \overline{\beta}^{\,*}\,\mathcal{B}^\nu\,.$$

Durch Rücktransport mittels $\beta_K : X_K \times_K \widehat{P}_K \longrightarrow X_K \times_K B_{\mathrm{rig}}$ erhalten wir Geradenbündel $\beta_K^*\,\mathcal{B}_{\mathrm{rig}}^\nu$ auf $X_K^\nu \times_K \widehat{P}_K$. Diese wollen wir nun zu $\widehat{\mathcal{P}}_K$ zusammenkleben. Nach [BL 3, Propositions 4.1 und 4.2] erfolgt die Verklebung von $\overline{\beta}_{\mathrm{rig}}^{\,*}\,\mathcal{B}_{\mathrm{rig}}^\mu$ mit $\overline{\beta}_{\mathrm{rig}}^{\,*}\,\mathcal{B}_{\mathrm{rig}}^\nu$ auf $X_K^{\mu\nu} \times_K \overline{P}_K$ durch einen Charakter

$$\chi \;\in\; \mathrm{Hom}(\overline{T}_{\mathrm{rig}}, \overline{\mathbb{G}}_{m,K}) \;=\; \mathrm{Hom}(T_K, \mathbb{G}_{m,K})$$

und dehnt sich somit zu einem eindeutig bestimmten Isomorphismus $\beta_K^*\,\mathcal{B}_{\mathrm{rig}}^\mu \cong \beta_K^*\,\mathcal{B}_{\mathrm{rig}}^\nu$ aus. Wir bekommen das Geradenbündel $\widehat{\mathcal{P}}_K$. Dieses ist trivial entlang $X_K \times \{1\}$. Die Rigidifizierung $\overline{\rho}_K : \mathcal{O}_{\overline{P}_K} \xrightarrow{\;\sim\;} (x_K \times \mathrm{id}_{\overline{P}_K})^*\overline{\mathcal{P}}_K$ ist nach [BL 3, Propositions 4.1 und 4.2] ebenfalls durch einen Charakter gegeben. Wenn wir $\widehat{\mathcal{P}}_K$ entsprechend abändern, so dehnt sie sich zu einer Rigidifizierung $\widehat{\rho}_K : \mathcal{O}_{\widehat{P}_K} \xrightarrow{\;\sim\;} (x_K \times \mathrm{id}_{\widehat{P}_K})^*\widehat{\mathcal{P}}_K$ aus. Somit erhalten wir ein rigidifiziertes Geradenbündel $(\widehat{\mathcal{P}}_K, \widehat{\rho}_K)$ auf $X_K \times_K \widehat{P}_K$, dessen Einschränkung auf $X_K \times_K \overline{P}_K$ isomorph zu $(\overline{P}_K, \overline{\rho}_K)$ ist. □

*Bemerkung* 5.7.1.
Nach Satz 5.2 besteht ein Isomorphismus von Gruppen

$$\overline{\mathrm{Pic}}^0_{X_K/K}\,(\overline{P}_K^{\,2}) \;\cong\; \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}\,(\overline{P}_K^{\,2}, \overline{P}_K)\,.$$

Dem Tensorprodukt von Geradenbündeln auf der linken Seite entspricht als Gruppenoperation dabei die Addition von Morphismen in $\overline{P}_{K}$ auf der rechten Seite. Verwenden wir die Bezeichnung $\mu_I : \overline{P}_{X}^{2} \longrightarrow \overline{P}_{X}$ für den Morphismus $(p_1,\, p_2) \mapsto \sum_{i\in I} p_i$, so bedeutet dies, daß für die Geradenbündel auf $X_{K} \times_K \overline{P}_{K} \times_K \overline{P}_{K}$ gilt

$$\mu_1^* \overline{\mathcal{P}}_{K} \otimes \mu_2^* \overline{\mathcal{P}}_{K} \;\cong\; \mu_{12}^* \overline{\mathcal{P}}_{K} \,.$$

Da die Abbildungen $\mu_I^*$ mit den kubischen Strukturen verträglich sind, gilt auch für das Geradenbündel $\widehat{\mathcal{P}}_{K}$

$$\mu_1^* \widehat{\mathcal{P}}_{K} \otimes \mu_2^* \widehat{\mathcal{P}}_{K} \;\cong\; \mu_{12}^* \widehat{\mathcal{P}}_{K}$$

auf $X_{K} \times_K \widehat{P}_{K} \times_K \widehat{P}_{K}$ .

Wir können auf $\widehat{P}_{K}$ einen Betrag definieren. Dazu betrachten wir die perfekte Paarung

$$\chi(T_{K}) \times T_{K} \;\longrightarrow\; \mathbb{G}_{m,K}\,, \qquad (\chi, t) \;\mapsto\; \chi(t)\,,$$

die durch die Auswertung der Charaktere gegeben ist. Auf $\mathbb{G}_{m,K}$ wählen wir eine Koordinate $\zeta$. Sei $a \in \mathbb{G}_{m,K}(K')$ für eine endliche Körpererweiterung $K'$ von $K$. Dann setzt sich der Betrag von $K$ nach [BGR, Theorem 3.2.4.2] in eindeutiger Weise zu einem Betrag auf $K' = k(a)$ fort. Also ist der Betrag von $\zeta \in k(a)$ erklärt. Wir nennen ihn den Betrag $|a|$ von $a$. Auf diese Weise erhalten wir eine Paarung

$$\chi(T_{K}) \times T_{K} \;\longrightarrow\; \mathbb{R}\,, \qquad (\chi, t) \;\mapsto\; -\log_{|\pi|} |\chi(t)|\,.$$

Da die Erweiterung $\widehat{P}_{K}$ von $B_{\mathrm{rig}}$ durch $T_{K}$ lokal trivial bezüglich einer formellen Überdeckung von $B$ ist und die Übergangsfunktionen Betrag 1 haben, setzt sich diese zu einer Paarung auf $\chi(T_{K}) \times \widehat{P}_{K}$ fort. Wir fixieren nun Erzeuger $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ der Charaktergruppe $\chi(T_{K})$. Dann erhalten wir eine Betragsfunktion auf $\widehat{P}_{K}$

$$\mathrm{val}:\; \widehat{P}_{K} \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^r\,, \qquad p \;\mapsto\; \big(-\log_{|\pi|} |\zeta_1(p)|, \ldots, -\log_{|\pi|} |\zeta_r(p)|\big)\,.$$

Diese ist ein Gruppenmorphismus mit $\ker \mathrm{val} \;=\; \overline{P}_{K}$. Sie induziert also eine perfekte Paarung

$$\chi(T_{K}) \times \widehat{P}_{K}(K)/\overline{P}_{K}(K) \;\longrightarrow\; |\mathbb{G}_{m,K}(K)| \;=\; \mathbb{Z}\,.$$

**Lemma 5.8.**
*Wir definieren* $M := \{ m \in \widehat{P}_{K} \;:\; (\mathrm{id}_{X_K} \times m)^* \widehat{\mathcal{P}}_{K}$ *ist trivial*$\}$. *Dann ist* $M$ *ein* $K$*-rationales Gitter, das heißt eine diskrete, freie Untergruppe in* $\widehat{P}_{K}$, *vom Rang* $d \le r$ *mit* $M \cap \overline{P}_{K} = \{1\}$.

*Bemerkung* 5.8.1.
Es ist möglich, daß der Rang des Gitters $M$ echt kleiner als $r$ ist. Siehe dazu Beispiel 5.13.2.

Beweis:
1. Behauptung: $M$ ist eine Untergruppe von $\widehat{P}_{K}$.

Beweis: Seien $m$ und $m'$ Punkte in $M$, die $K'$-rational sind für eine endliche Erweiterung $K'$ von $K$. Dann gilt nach Bemerkung 5.7.1

$$(\mathrm{id}_{X_K} \times m')^* \widehat{\mathcal{P}}_{K} \;\cong\; \big(\mathrm{id}_{X_K} \times (-m + m')\big)^* \widehat{\mathcal{P}}_{K} \otimes (\mathrm{id}_{X_K} \times m)^* \widehat{\mathcal{P}}_{K}$$

als Geradenbündel auf $X_K \times_K K'$. Also ist auch $\left(\mathrm{id}_{X_K} \times (-m+m')\right)^* \widehat{\mathcal{P}}_K$ trivial und damit $-m+m' \in M$.

<u>2.</u> Behauptung: $M \cap \overline{P}_K = \{1\}$, insbesondere ist $M$ étale über $K$.

Beweis: Sei $m_K \in M \cap \overline{P}_K$. Dann dehnt sich $m_K$ zu einem Punkt $m \in \overline{P}$ aus und gibt so einen Punkt $m' \in P'$. Es entspricht $m_K$ das Geradenbündel $(\mathrm{id}_{X_K} \times m_K)^* \widehat{\mathcal{P}}_K$, welches trivial ist. Somit ist nach Lemma 5.3 auch das dem Punkt $m$ entsprechende Geradenbündel $(\mathrm{id}_X \times m)^* \overline{\mathcal{P}}$ trivial. Wegen der universellen Eigenschaft von $P'_n$ ist also $m' = 1$ in $P'$ und deshalb auch $m_K = m'_K = 1$ in $\overline{P}_K$. Da $M$ eine $K$-Gruppenvarietät und in seinem neutralen Element 1 étale ist, ist $M$ étale über $K$.

<u>3.</u> Behauptung: $M$ ist $K$-rational.

Beweis: Sei $m \in M$. Da $M$ nach 2. étale über $K$ ist, ist $m \in M(K')$ für eine endliche Galoiserweiterung $K'$ von $K$. Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K'/K)$ operiert auf $\widehat{P}_K$ und $\overline{P}_K$. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(K'/K)$. Dann ist auch $\sigma m \in M(K')$ und nach [BGR, Theorem 3.2.1.2] gilt $\mathrm{val}(m) = \mathrm{val}(\sigma m)$. Da val ein Gruppenmorphismus ist, gilt also $\mathrm{val}(m - \sigma m) = 0$ und damit $m - \sigma m \in M \cap \overline{P}_K = \{1\}$. Dies zeigt, daß $\sigma m = m$ ist und somit ist $m$ bereits über $K$ definiert.

<u>4.</u> Behauptung: $M$ ist diskret und frei vom Rang $\leq r$.

Beweis: Wegen 2. und 3. schränkt sich val zu einem Monomorphismus

$$\mathrm{val}: \ M \hookrightarrow \mathbb{Z}^r \subseteq \mathbb{R}^r$$

ein. Somit ist $M$ isomorph zu einer diskreten Untergruppe von $\mathbb{R}^r$. Als Untergruppe von $\mathbb{Z}^r$ ist $M$ frei vom Rang $d \leq r$. □

Bevor wir nun das Gitter $M$ ausdividieren, wollen wir noch die universelle Eigenschaft von $\widehat{P}_K$ erwähnen. Dazu zunächst

**Satz 5.9.**
*Sei $q_K : V'_K \longrightarrow V_K$ ein treu-flacher, quasikompakter Morphismus rigid analytischer Varietäten über $K$, sowie $\mathcal{L}_K$ ein rigidifiziertes Geradenbündel auf $X_K \times_K V_K$. Sei ferner $f'_K : V'_K \longrightarrow \widehat{P}_K$ ein Morphismus mit $(\mathrm{id}_{X_K} \times f'_K)^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong (\mathrm{id}_{X_K} \times q_K)^* \mathcal{L}_K$.*

*Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $f_K : V_K \longrightarrow \widehat{P}_K$ mit $f'_K = f_K \circ q_K$ und $(\mathrm{id}_{X_K} \times f_K)^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong \mathcal{L}_K$.*

<u>Beweis:</u>
<u>1.</u> Das Problem ist lokal auf $\widehat{P}_K$ und $V_K$. Sei $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ und

$$\widehat{P}_K(\epsilon) \ := \ \{ p \in \widehat{P}_K : \ \mathrm{val}(p) \in [-\epsilon, \epsilon]^r \}$$

der relative Polyannulus in $\widehat{P}_K$ über $B_K$ mit Radius $\pi^{2\epsilon}$ (vergleiche die Ausführungen vor Lemma 5.8), sowie $B^\nu_K$ eine zulässige, affinoide Überdeckung von $B_K$, über der $\widehat{P}_K$ trivial ist. Dann gewinnen wir aus den Translaten von $\widehat{P}_K(\epsilon) \times_{B_K} B^\nu_K$ für alle $\nu$ eine zulässige, affinoide Überdeckung von $\widehat{P}_K$. Sei $H_K$ einer dieser affinoiden Teilbereiche. Wir wollen einen Morphismus $f_K$ finden, der folgendes Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{tikzcd}
W'_K := (f'_K)^{-1}(H_K) \arrow[r, "f'_K"] \arrow[d, "q_K"'] & H_K \subseteq \mathbb{D}^n_K \\
W_K := q_K\big((f'_K)^{-1}(H_K)\big) \arrow[ur, dashed, "f_K"'] &
\end{tikzcd}$$

Da $q_K$ flach ist, ist $W_K$ offen in $V_K$ nach [FRG, II, Corollary 5.11]. Nach [FRG, I, Theorem 4.1] und [FRG, II, Theorem 5.2] gibt es formelle Modelle $W$ und $W'$ von $W_K$ und $W'_K$, so daß sich $q_K$ zu einem flachen, quasikompakten Morphismus $q : W' \longrightarrow W$ und $f'_K$ zu $f' : W' \longrightarrow \mathbb{D}^n_R$ ausdehnt. Da $q_K$ surjektiv ist, ist auch $q$ surjektiv und somit treu-flach. Wir ersetzen nun $W$ durch eine offene, affine Teilmenge $\operatorname{Spf} A$. Da $q$ quasikompakt ist, läßt sich $q^{-1}(W)$ als endliche Vereinigung affiner Teilmengen schreiben. Ersetzen wir $W'$ durch die disjunkte Vereinigung dieser Teilmengen, dann ist auch $W' = \operatorname{Spf} A'$ affin und treu-flach über $W$.

Sei $C$ eine zulässige, formelle $R$-Algebra und $B := A\widehat{\otimes}_R C$, sowie $B' := A'\widehat{\otimes}_R C$. Wir betrachten folgende Sequenz

$$B \longrightarrow B' \rightrightarrows B'\widehat{\otimes}_B B' =: B''.$$

Nach Tensorieren mit $R_n$ über $R$ ist sie exakt, da $q_n$ treu-flach ist (vergleiche [BLR, Lemma 6.1.2]). Also ist die Sequenz nach [Ha, Proposition II.9.1] selbst exakt. Sie bleibt dies auch nach Tensorieren mit $K$

$$B_K \longrightarrow B'_K \rightrightarrows B'_K\widehat{\otimes}_{B_K} B'_K = B''_K. \tag{$*$}$$

<u>2.</u> Vermöge der zwei Projektionen $q^1_K, q^2_K : \operatorname{Sp} A''_K := \operatorname{Sp}(A'_K\widehat{\otimes}_{A_K} A'_K) \rightrightarrows \operatorname{Sp} A'_K$ induziert der Morphismus $f'_K$ zwei Morphismen $f'_K \circ q^1_K$ und $f'_K \circ q^2_K$ von $\operatorname{Sp} A''_K$ nach $H_K$, für die gilt

$$\big(\mathrm{id}_{X_K} \times (f'_K \circ q^1_K)\big)^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong \big(\mathrm{id}_{X_K} \times (f'_K \circ q^2_K)\big)^* \widehat{\mathcal{P}}_K.$$

Somit faktorisiert die Abbildung

$$f'_K \circ q^1_K - f'_K \circ q^2_K : \operatorname{Sp} A''_K \longrightarrow \widehat{P}_K(2\epsilon)$$

durch $M$. Da $M \cap \widehat{P}_K(2\epsilon) = \{1\}$ ist nach Lemma 5.8, gilt folglich $f'_K \circ q^1_K = f'_K \circ q^2_K$.

Der Morphismus $f'_K$ ist durch ein $n$-Tupel von Funktionen $(a'_1, \ldots, a'_n) \in (A'_K)^n$ gegeben, für welche also die Gleichung $a'_i \otimes 1 = 1 \otimes a'_i$ in $A''_K$ gilt. Somit ist $a'_i = a_i \otimes 1$ für eindeutig bestimmte $a_i \in A_K$ (verwende $(*)$ mit $C = R$). Da die $a'_i$ die Relationen erfüllen, die $H_K$ als Untervarietät von $\mathbb{D}^n_K$ beschreiben gilt dies auch für die $a_i$. Also ergeben diese einen eindeutig bestimmten Morphismus $f_K : \operatorname{Sp} A_K \longrightarrow H_K$. Die so erhaltenen Morphismen lassen sich wegen der Eindeutigkeit zu einem Morphismus

$$f_K : V_K \longrightarrow \widehat{P}_K$$

mit $f'_K = f_K \circ q_K$ verkleben.

<u>3.</u> Wir müssen nun noch zeigen, daß $\mathcal{L}_K \cong (\mathrm{id}_{X_K} \times f_K)^* \widehat{\mathcal{P}}_K$ ist. Auf $X_K \times_K V'_K$ haben wir einen Isomorphismus von rigidifizierten Geradenbündeln

$$\varphi' : (\mathrm{id}_{X_K} \times q_K)^* \mathcal{L}_K \xrightarrow{\sim} (\mathrm{id}_{X_K} \times q_K)^* (\mathrm{id}_{X_K} \times f_K)^* \widehat{\mathcal{P}}_K.$$

Die Rücktransporte $(\mathrm{id}_{X_K} \times q_K^1)^*\varphi'$ und $(\mathrm{id}_{X_K} \times q_K^2)^*\varphi'$ sind Isomorphismen zwischen denselben rigidifizierten Geradenbündeln. Somit sind sie nach Lemma 4.4 gleich.

Sei nun $\operatorname{Spf} C \subseteq X$ eine offene, affine Teilmenge. Dann sind die Geradenbündel $\mathcal{L}_K$ und $(\mathrm{id}_{X_K} \times f_K)^*\widehat{\mathcal{P}}_K$ auf $\operatorname{Sp} C_K \times_K \operatorname{Sp} A_K$ durch invertierbare $B_K := C_K \widehat{\otimes}_K A_K$-Moduln $L_K$ und $N_K$ gegeben. Wegen $(*)$ ist die Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Hom}_{B_K}(L_K, N_K) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{B_K}(L_K, N_K) \otimes_{B_K} B'_K & \rightrightarrows & \operatorname{Hom}_{B_K}(L_K, N_K) \otimes_{B_K} B''_K \\ & & & \longmapsto & (\mathrm{id}_{X_K} \times q_K^1)^*\varphi' \\ & & \varphi' & & \\ & & & \longmapsto & (\mathrm{id}_{X_K} \times q_K^2)^*\varphi' \end{array}$$

exakt. Also stimmen die Bilder von $\varphi'$ überein und es ist $\varphi' = \varphi \otimes 1$ für einen eindeutig bestimmten Morphismus $\varphi \in \operatorname{Hom}_{B_K}(L_K, N_K)$. Da $B'_K$ treu-flach über $B_K$ ist, ist $\varphi$ ein Isomorphismus. Die so lokal erhaltenen Isomorphismen lassen sich wegen der Eindeutigkeit zu einem globalen Isomorphismus verkleben,

$$\varphi : \ \mathcal{L}_K \ \xrightarrow{\sim} \ (\mathrm{id}_{X_K} \times f_K)^*\widehat{\mathcal{P}}_K . \qquad \square$$

Dieser Satz über den treu-flachen Abstieg von Morphismen nach $\widehat{P}_K$ ermöglicht uns nun, die universelle Eigenschaft von $\widehat{P}_K$ zu beweisen. Wir benützen dabei die Vermutung 3.8, die wir als wahr annehmen.

**Satz 5.10.**
*Sei $V_K$ eine glatte, zusammenhängende, rigid analytische $K$-Varietät, sowie $v_K \in V_K(K)$. Weiter sei $\mathcal{L}_K$ ein rigidifiziertes Geradenbündel auf $X_K \times_K V_K$, trivial entlang $X_K \times \{v_K\}$.*

*Dann gibt es eine zulässige Überdeckung $V_K^i$ von $V_K$ und Abbildungen $f^i : V_K^i \longrightarrow \widehat{P}_K$ mit $(\mathrm{id}_{X_K} \times f^i)^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong \mathcal{L}|_{X_K \times_K V_K^i}$. Das Hindernis für die Verklebung der $f^i$ zu einem eindeutig bestimmten Morphismus*

$$f : \ V_K \ \longrightarrow \ \widehat{P}_K$$

*mit $(\mathrm{id}_{X_K} \times f)^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong \mathcal{L}_K$ und $f(v_K) = 1$ wird durch die Kohomologieklasse*

$$(f^i - f^j) \ \in \ \mathrm{H}^1(V_K, M) \ \cong \ \mathrm{H}^1(V_K, \mathbb{Z})^d$$

*gegeben.*

Beweis:
1. Zunächst sei $V$ formal glatt über $R\langle\xi_1, \ldots, \xi_{s+1}\rangle/(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_{s+1} - \pi)$ und erfülle die Bedingung $(*)$ von Seite 25. Ferner liege $v_K \in V_K(K)$ oberhalb von $\{\xi_1 = \ldots = \xi_s = 1\}$.

Dann zerfällt $\mathcal{L}_K$ nach Satz 4.15 in seinen multiplikativen Anteil $\mathcal{M}_K \cong (\xi_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes \xi_s^{n_s})$ und ein formelles Geradenbündel $\mathcal{N}$. Die Kozykel $n_i$ haben eine eindeutige Darstellung bezüglich der Basis $(b_1, \ldots, b_r)$ von $\mathrm{H}^1(X_K, \mathbb{Z})$ aus Lemma 5.6

$$n_i \ = \ \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}\, b_j \, .$$

Der multiplikative Anteil liefert somit einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$\begin{array}{ccccc} g : & V_K & \longrightarrow & T_K & \hookrightarrow \ \widehat{P}_K \\ & \prod_{i=1}^{s} \xi_i^{\alpha_{ij}} & \longleftarrow & \zeta_j & \end{array}$$

mit $(\mathrm{id}_{X_K} \times g)^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong \mathcal{M}_K$ und $g(v_K) = 1$.

Das Geradenbündel $\mathcal{N}$ auf $X \times_R V$ liefert nach Satz 5.1 einen eindeutig bestimmten Morphismus $V \longrightarrow P'$, der durch $\overline{P'}$ faktorisiert, da $V$ flach über $R$ und zusammenhängend ist. Da $V_K$ reduziert ist, ergibt dies einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$h: \ V_K \ \longrightarrow \ \overline{P}_K \ \longrightarrow \ \widehat{P}_K$$

mit $(\mathrm{id}_{X_K} \times h)^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong \mathcal{N}_K$ und $h(v_K) = 1$.

Wir erhalten somit einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$f \ := \ g + h: \ V_K \ \longrightarrow \ \widehat{P}_K$$

mit $(\mathrm{id}_{X_K} \times f)^* \widehat{\mathcal{P}}_K \ \cong \ \mathcal{M}_K \otimes \mathcal{N}_K \ \cong \ \mathcal{L}_K$ (verwende Bemerkung 5.7.1) und $f(v_K) = 1$.

2. Sei nun $V_K$ beliebig. Nach Vermutung 3.8 gibt es nach einer endlichen Körpererweiterung von $K$ einen étalen, surjektiven, quasikompakten Morphismus $q_K : \widetilde{V}_K \longrightarrow V_K$ für eine rigid analytische Varietät $\widetilde{V}_K$, welche ein strikt semistabiles, formelles Modell $\widetilde{V}$ besitzt. Über $v_K$ liegt dabei ein Punkt $\widetilde{v}_K \in \widetilde{V}_K(K')$. Ohne Einschränkung ist $K' = K$, da auch $\widetilde{V}_K \otimes_K K'$ nach Lemma 3.6 ein strikt semistabiles Modell besitzt. Da $\widetilde{v}_K$ ein $K$-rationaler Punkt ist, liegt er in dem formal glatten Teil von $\widetilde{V}_K$.

Sei zunächst $w_0 \in \widetilde{V}_0$ ein beliebiger Punkt. Nach Satz 3.4 besitzt $w_0$ eine Umgebung, die formal glatt über $R\langle \xi_1, \ldots, \xi_{s+1}\rangle / (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_{s+1} - \pi)$ ist. Die irreduziblen, geometrischen Komponenten der Strata $\mathrm{V}(\xi_\nu : \nu \in N)$, die $w_0$ enthalten sind über einer endlichen, separablen Körpererweiterung von $k$ definiert. Nach einer endlichen, unverzweigten Ringerweiterung von $R$ mit Uniformisierender $\pi$ besitzt somit $w_0$ eine Umgebung wie in 1. beschrieben. Es gibt also eine Überdeckung von $\widetilde{V}$ durch offene $\widetilde{V}^i$, $i \in I$ der Gestalt aus 1. Sei $V_K^i := q_K(\widetilde{V}_K^i)$. Dann bilden die $V_K^i$ eine zulässige Überdeckung von $V_K$. Wir betrachten das rigidifizierte Geradenbündel $\widetilde{\mathcal{L}}_K := (\mathrm{id}_{X_K} \times q_K)^* \mathcal{L}_K$ auf $X_K \times_K \widetilde{V}_K$. Es ist trivial entlang $X_K \times \{\widetilde{v}_K\}$.

Ohne Einschränkung sei $\widetilde{v}_K \in \widetilde{V}_K^1$ und liege oberhalb von $\{\xi_1 = \ldots = \xi_s = 1\}$. Dann gibt es nach 1. einen eindeutig bestimmten Morphismus $\widetilde{f}^1 : \widetilde{V}_K^1 \longrightarrow \widehat{P}_K$ mit $\widetilde{f}^1(\widetilde{v}_K) = 1$ und $(\mathrm{id}_{X_K} \times \widetilde{f}^1)^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong \widetilde{\mathcal{L}}_K|_{X_K \times_K \widetilde{V}_K^1}$. Da $q_K : \widetilde{V}_K^1 \longrightarrow V_K^1$ treu-flach und quasikompakt ist, steigt $\widetilde{f}_K^1$ nach Satz 5.9 zu einem eindeutig bestimmten Morphismus

$$f^1 : V_K^1 \ \longrightarrow \ \widehat{P}_K$$

mit $f^1(v_K) = 1$ und $(\mathrm{id}_{X_K} \times f^1)^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong \mathcal{L}_K|_{X_K \times_K V_K^1}$ ab.

Wir konstruieren nun Morphismen $f^j : V_K^j \longrightarrow \widehat{P}_K$ mit $(\mathrm{id}_{X_K} \times f^j)^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong \mathcal{L}_K|_{X_K \times_K V_K^j}$. Dabei gehen wir induktiv vor.

Seien die Morphismen bereits für alle $j \in J \subsetneq I$ konstruiert. Da $V_K$ zusammenhängend ist, gibt es ein $i \in I - J$ mit $V_K^{ij} := V_K^i \cap V_K^j \neq \emptyset$ für ein $j \in J$. Die Punkte mit separabler Restklassenkörpererweiterung liegen dicht im glatten Ort von $\widetilde{V}_0^i$ ([BLR, Corollary 2.2.13]). Also gibt es dort ein $\widetilde{v}_0^{ij} \in \widetilde{V}_0^i(k')$ mit $q_0(\widetilde{v}_0^{ij}) \in V_0^{ij}$ für eine endliche, separable Körpererweiterung $k'$ von $k$. Nach einer endlichen, unverzweigten Ringerweiterung von $R$ dehnt sich $\widetilde{v}_0^{ij}$ aufgrund der Glattheit zu einem Punkt $\widetilde{v}^{ij} \in \widetilde{V}^i(R)$ aus. Somit erhalten wir $\widetilde{v}_K^{ij} \in \widetilde{V}_K^i(K)$ mit $v_K^{ij} := q_K(\widetilde{v}_K^{ij}) \in V_K^{ij}$. Wir wählen die Koordinaten $\xi_\nu$ auf $\widetilde{V}_K^i$ so, daß $\widetilde{v}_K^{ij}$ oberhalb von $\{\xi_1 = \ldots = \xi_s = 1\}$ liegt. Wir betrachten auf $X_K \times_K \widetilde{V}_K^i$ das Geradenbündel

$\widetilde{\mathcal{L}}_K \otimes (\mathrm{id}_{X_K} \times \widetilde{v}_K^{ij})^* \widetilde{\mathcal{L}}_K^\vee$. Es ist trivial entlang $X_K \times \{\widetilde{v}_K^{ij}\}$. Also gibt es nach 1. einen eindeutig bestimmten Morphismus $\widetilde{g}^i : \widetilde{V}_K^i \longrightarrow \widehat{P}_K$ mit $\widetilde{g}^i(\widetilde{v}_K^{ij}) = 1$. Komponiert mit der Translation um $f^j(v_K^{ij})$ bekommen wir

$$\widetilde{f}^i \ := \ \tau_{f^j(v_K^{ij})} \circ \widetilde{g}^i : \ \widetilde{V}_K^i \ \longrightarrow \ \widehat{P}_K$$

mit $\widetilde{f}^i(\widetilde{v}_K^{ij}) = f^j(v_K^{ij})$ und $\widetilde{\mathcal{L}}_K|_{X_K \times_K \widetilde{V}_K^i} \cong (\mathrm{id}_{X_K} \times \widetilde{f}^i)^* \widehat{\mathcal{P}}_K$ (verwende Bemerkung 5.7.1). Da $q_K : \widetilde{V}_K^i \longrightarrow V_K^i$ treu-flach und quasikompakt ist, erhalten wir nach Satz 5.9 einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$f^i : \ V_K^i \ \longrightarrow \ \widehat{P}_K$$

mit $f^i(v_K^{ij}) = f^j(v_K^{ij})$ und einen Isomorphismus $\varphi^i : \mathcal{L}_K|_{X_K \times_K V_K^i} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{id}_{X_K} \times f^i)^* \widehat{\mathcal{P}}_K$.

<u>3.</u> Für die Abbildung $(f^i - f^j) : V_K^{ij} \longrightarrow \widehat{P}_K$ ist das Geradenbündel $\big(\mathrm{id}_{X_K} \times (f^i - f^j)\big)^* \widehat{\mathcal{P}}_K$ trivial auf $X_K \times_K V_K^{ij}$. Das bedeutet, die Abbildung faktorisiert durch das Gitter $M$

$$(f^i - f^j) : \ V_K^{ij} \ \longrightarrow \ M \ \hookrightarrow \ \widehat{P}_K$$

und ist lokal konstant. Wir erhalten folglich ein Element der Čech-Kohomologiegruppe

$$(f^i - f^j) \ \in \ \check{\mathrm{H}}^1\big(\{V_K^i\}, M\big) \ \cong \ \check{\mathrm{H}}^1\big(\{V_K^i\}, \mathbb{Z}\big)^d .$$

Gilt nun $(f^i - f^j) = 0$ in $\mathrm{H}^1(V_K, \mathbb{Z})$, so ist $(f^i - f^j)$ nach einer Verfeinerung der Überdeckung ein Korand bezüglich $\{V_K^i\}$, das heißt es gibt Elemente $m^i \in M\big(V_K^i\big) = M$ mit $f^i - f^j = m^i - m^j$. Ohne Einschränkung sei dabei $m^1 = 0$. Also setzen sich die Abbildungen

$$(f^i - m^i) : \ V_K^i \ \longrightarrow \ \widehat{P}_K$$

zu einer eindeutig bestimmten Abbildung $f : V_K \longrightarrow \widehat{P}_K$ mit $f(v_K) = 1$ zusammen. Da $\mathcal{L}_K$ rigidifiziert ist, sind die Isomorphismen $\varphi^i$ eindeutig bestimmt und setzen sich zu einem Isomorphismus $\mathcal{L}_K \cong (\mathrm{id}_{X_K} \times f)^* \widehat{\mathcal{P}}_K$ zusammen. □

Als Korollar erhalten wir die universelle Eigenschaft von $\widehat{P}_K$.

**Satz 5.11.**
*Die punktierte, rigid analytische Varietät* $(\widehat{P}_K, 1)$ *stellt den Funktor* $\widehat{\mathrm{Pic}}^0_{X_K/K}$ *dar.*

<u>Beweis:</u>
Sei $V_K$ eine glatte, zusammenhängende, quasikompakte, rigid analytische $K$-Varietät mit $\mathrm{H}^1(V_K \widehat{\otimes}_K \overline{K}, \mathbb{Z}) = (0)$ für einen topologisch, algebraischen Abschluß $\overline{K}$ von $K$. Sei ferner $v_K \in V_K(K)$ und $\mathcal{L}_K$ ein rigidifiziertes Geradenbündel auf $X_K \times_K V_K$, welches entlang $X_K \times \{v_K\}$ trivial ist. Dann gibt es nach Satz 5.10 lokal auf $V_K$ Morphismen nach $\widehat{P}_K$. Das Hindernis für die Verklebung dieser Morphismen ist durch eine Kohomologieklasse in $\mathrm{H}^1(V_K, M) \cong \mathrm{H}^1(V_K, \mathbb{Z})^d$ gegeben. Da $\mathrm{H}^1(V_K \widehat{\otimes}_K \overline{K}, \mathbb{Z}) = (0)$ und $V_K$ quasikompakt ist, gibt es eine endliche, zulässige Überdeckung, welche über $\overline{K}$ definiert ist und diese Kohomologieklasse trivialisiert. Diese Überdeckung läßt sich durch eine, über einer endlichen Erweiterung $K'$ von $K$ definierte approximieren, welche die Kohomologieklasse ebenfalls trivialisiert. Nach Satz 5.10 bedeutet dies, daß sich die lokal definierten Morphismen über $K'$ zu einem eindeutig bestimmten Morphismus

$$f' : \ V_{K'} \ \longrightarrow \ \widehat{P}_K$$

mit $(\mathrm{id}_{X_K} \times f')^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong \mathcal{L}_K \otimes_K K'$ und $f'(v_{K'}) = 1$ verkleben lassen. Nach Satz 5.9 erhalten wir daraus den gewünschten über $K$ definierten Morphismus. □

## 5.4 Die Konstruktion von $P_K$

Wir dividieren nun aus $\widehat{P}_K$ das Gitter $M$ aus und erhalten eine rigid analytische Gruppe $P_K$. Die diskrete Untergruppe $M$ operiert auf $\widehat{P}_K$ durch Translationen $\tau_m : \widehat{P}_K \longrightarrow \widehat{P}_K$. Diese Operation ist fixpunktfrei und folglich ist $P_K$ glatt.

Nun soll auch $\widehat{\mathcal{P}}_K$ zu einem Geradenbündel auf $X_K \times_K P_K$ absteigen. Nach Bemerkung 5.7.1 gibt es einen Isomorphismus

$$\lambda : \ \mu_{12}^* \widehat{\mathcal{P}}_K \ \xrightarrow{\sim} \ \mu_1^* \widehat{\mathcal{P}}_K \otimes \mu_2^* \widehat{\mathcal{P}}_K$$

von Geradenbündeln auf $X_K \times_K \widehat{P}_K^2$. Dieser ist mit der Rigidifizierung des Poincaré-Bündels $\widehat{\rho}_K : \mathcal{O}_{\widehat{P}_K} \xrightarrow{\sim} (x_K \times \mathrm{id}_{\widehat{P}_K})^* \widehat{\mathcal{P}}_K$ verträglich,

$$(x_K \times \mathrm{id}_{\widehat{P}_K^2})^* \lambda \circ \mu_{12}^* \widehat{\rho}_K \ = \ \mu_1^* \widehat{\rho}_K \otimes \mu_2^* \widehat{\rho}_K \,.$$

Durch Rücktransport vermöge des Schnittes $(\mathrm{id}_{\widehat{P}_K} \times m) : \widehat{P}_K \longrightarrow \widehat{P}_K^2$ erhalten wir unter Beachtung von $(\mathrm{id}_{\widehat{P}_K} \times m)^* \mu_2^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong m^* \widehat{\mathcal{P}}_K \cong \mathcal{O}_{X_K \times_K \widehat{P}_K}$ einen Isomorphismus

$$\varphi_m \ := \ (\mathrm{id}_{\widehat{P}_K} \times m)^* \lambda : \ \tau_m^* \widehat{\mathcal{P}}_K \ \xrightarrow{\sim} \ \widehat{\mathcal{P}}_K \,.$$

Für die Rigidifizierungen ergibt sich $(x_K \times \mathrm{id}_{\widehat{P}_K})^* \varphi_m \circ \tau_m^* \widehat{\rho}_K = \widehat{\rho}_K$. Dabei ist $\tau_m^* \widehat{\rho}_K$ die kanonische Rigidifizierung des Geradenbündels $\tau_m^* \widehat{\mathcal{P}}_K$. Da die beiden folgenden Isomorphismen mit den Rigidifizierungen kompatibel sind, sind sie gleich,

$$\varphi_{m'} \circ \tau_{m'}^* \varphi_m \ = \ \varphi_{m+m'} : \ \tau_{m+m'}^* \widehat{\mathcal{P}}_K \ \xrightarrow{\sim} \ \widehat{\mathcal{P}}_K \,.$$

Diese Identität heißt die Kozykelbedingung für die Isomorphismen $\varphi_m$. Folglich besitzt das Geradenbündel $\widehat{\mathcal{P}}_K$ eine sogenannte $M$-Linearisierung, bestehend aus den Isomorphismen $\varphi_m$, welche die Kozykelbedingung erfüllen.

Dies bedeutet nun, daß das Geradenbündel $\widehat{\mathcal{P}}_K$ zu einem rigidifizierten Geradenbündel $\mathcal{P}_K$ auf $X_K \times_K P_K$ absteigt, welches entlang $X_K \times \{1\}$ trivial ist. Lokal läßt sich dies so beschreiben. Jeder Punkt von $P_K$ besitzt eine Umgebung, die vermöge des kanonischen Morphismus isomorph zu einem Translat $U_K$ von $\widehat{P}_K(\frac{1}{2})$ ist (vergleiche Punkt 1. im Beweis von Satz 5.9). Das zugehörige Geradenbündel ist $\widehat{\mathcal{P}}_K|_{U_K}$.

Wie in Abschnitt 4.1 angekündigt, können wir nun Satz 4.5 beweisen. Wir benützen dabei die Vermutung 3.8, die wir als wahr annehmen.

**Satz 5.12.**
*Die glatte, rigid analytische Gruppenvarietät $(P_K, 1)$ über $K$ zusammen mit dem Poincaré-Bündel $\mathcal{P}_K$ auf $X_K \times_K P_K$ stellt den Picard-Funktor $\mathrm{Pic}^0_{X_K/K}$ auf der Kategorie der glatten, zusammenhängenden, punktierten, rigid analytischen $K$-Varietäten dar.*

Beweis:
Sei $V_K$ eine glatte, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über $K$ mit einem Punkt $v_K \in V_K(K)$. Weiter sei $\mathcal{L}_K$ ein rigidifiziertes Geradenbündel auf $X_K \times_K V_K$, trivial entlang $X_K \times \{v_K\}$. Dann gibt es nach Satz 5.10 eine zulässige Überdeckung $V_K^i$ und $V_K$ mit Abbildungen

$$f^i : \ V_K^i \ \longrightarrow \ \widehat{P}_K \ \longrightarrow \ P_K \,.$$

Die Abbildungen $f^i$ und $f^j$ unterscheiden sich auf $V_K^i \cap V_K^j$ um ein Element aus $M$. Das heißt, sie lassen sich zu einem eindeutig bestimmten Morphismus

$$f: \; V_K \longrightarrow P_K$$

mit $f(v_K) = 1$ und $\mathcal{L}_K \cong (\mathrm{id}_{X_K} \times f)^* \mathcal{P}_K$ verkleben. □

Die Struktur von $P_K$ ist folgende.

**Satz 5.13.**
*Die glatte, rigid analytische Gruppe $P_K$ ist eine Erweiterung*

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}^{r'} \longrightarrow P_K \longrightarrow Q_K \longrightarrow 1$$

*einer eigentlichen, glatten, rigid analytischen Gruppe $Q_K$ durch einen affinen Torus $\mathbb{G}_{m,K}^{r'}$.*

*Bemerkung* 5.13.1.
Es ist möglich, daß $P_K$ nicht eigentlich über $K$ ist, das heißt daß der Rang $r'$ des Torusanteils echt positiv ist. Siehe dazu Beispiel 5.13.2.

Beweis:
Nach Lemma 5.8 ist $M \hookrightarrow \widehat{P}_K(K)/\overline{P}_K(K)$ eine Untergruppe. Wir betrachten die perfekte Paarung

$$\chi(T_K) \times \widehat{P}_K(K)/\overline{P}_K(K) \longrightarrow |\mathbb{G}_{m,K}(K)| = \mathbb{Z}$$

aus den Ausführungen vor Lemma 5.8. Das orthogonale Komplement von $M$ bezüglich dieser Paarung ist eine Untergruppe $\chi(T'_K)$ von $\chi(T_K)$. Diese induziert eine Zerlegung der Charaktergruppe $\chi(T_K) = \chi(T'_K) \oplus \chi(T''_K)$ in freie Untergruppen, welche die Charaktergruppen von Tori $T'_K$ und $T''_K$ sind. Der Zerlegung entspricht eine Zerlegung des Torus $T_K = T'_K \times_K T''_K$ in Untertori mit $\mathrm{rk}\, T'_K = r'$ und $\mathrm{rk}\, T''_K = \mathrm{rk}\, M = r''$. Der Homomorphismus $\eta : \chi(T_K) \longrightarrow B^\vee$, der die Erweiterung $\overline{P}$ beschreibt (Satz 5.5), ergibt einen Homomorphismus $\chi(T''_K) \longrightarrow B^\vee$ und somit durch push-forward eine Erweiterung

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & T_K \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{P}_K \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B_{\mathrm{rig}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & T''_K \arrow[r] & \widehat{Q}_K \arrow[r] & B_{\mathrm{rig}} \arrow[r] & 1\,.
\end{tikzcd}$$

Durch $\alpha$ wird das Gitter $M$ bijektiv auf ein Gitter $N$ in $\widehat{Q}_K$ abgebildet. Auf diese Weise erhalten wir $P_K = \widehat{P}_K/M$ als Erweiterung

$$1 \longrightarrow T'_K \longrightarrow P_K \longrightarrow Q_K \longrightarrow 1$$

einer eigentlichen, glatten, rigid analytischen Gruppe $Q_K := \widehat{Q}_K/N$ durch einen affinen Torus $T'_K = \mathbb{G}_{m,K}^{r'}$. Dabei ist $Q_K$ eigentlich über $K$, da das Gitter $N \subseteq \widehat{Q}_K$ vollen Rang hat. Dies sehen wir folgendermaßen. Da $B$ eigentlich über $R$ ist, ist auch $B_{\mathrm{rig}}$ eigentlich über $K$ nach [Lü 2, Theorem 3.1]. Dies bedeutet, es gibt endliche, affinoide Überdeckungen $B_{\mathrm{rig}}^\nu$ und $\widetilde{B}_{\mathrm{rig}}^\nu$ von $B_{\mathrm{rig}}$, so daß $B_{\mathrm{rig}}^\nu$ relativ kompakt in $\widetilde{B}_{\mathrm{rig}}^\nu$ ist, in der Notation von [Ki 1, Definition 2.3] also $B_{\mathrm{rig}}^\nu \Subset \widetilde{B}_{\mathrm{rig}}^\nu$. Dabei können wir die Überdeckung so klein wählen, daß $\widehat{Q}_K$ über $\widetilde{B}_{\mathrm{rig}}^\nu$ trivial, das heißt gleich dem Produkt $T''_K \times_K \widetilde{B}_{\mathrm{rig}}^\nu$ ist. Für $\epsilon > 0$ sei

$$T''_K(\epsilon) := \{\, t \in T''_K : \; \mathrm{val}_{T''}(t) \in [-\epsilon, \epsilon]^{r''} \,\}$$

der Polyannulus mit Radius $\pi^{2\epsilon}$ (vergleiche die Ausführungen vor Lemma 5.8). Seien nun $0 < \delta < \epsilon < \frac{1}{2}$. Dann sind die $N$-Translate von $T''_K(\epsilon) \times_K \widetilde{B}^\nu_{\mathrm{rig}}$ disjunkt und $Q_K$ läßt sich durch die Bilder endlich vieler Translate $\tau_{q_i}\Big(T''_K(\delta) \times_K B^\nu_{\mathrm{rig}}\Big)$ überdecken. Dabei benötigen wir auch einige $q_i$, die nicht in $N$ liegen. Wir erhalten die endlichen, affinoiden Überdeckungen

$$\tau_{q_i}\Big(T''_K(\delta) \times_K B^\nu_{\mathrm{rig}}\Big) \quad \Subset \quad \tau_{q_i}\Big(T''_K(\epsilon) \times_K \widetilde{B}^\nu_{\mathrm{rig}}\Big) \qquad \text{für alle } i \text{ und } \nu\,.$$

von $Q_K$. Also ist $Q_K$ eigentlich über $K$. □

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wann $P_K$ eigentlich über $K$ ist, das heißt wann der Torusanteil $\mathbb{G}^{r'}_{m,K}$ trivial ist. Im allgemeinen braucht das nicht der Fall zu sein, wie das Beispiel der rigid analytischen Hopf-Varietäten zeigt, welches auf G. A. Mustafin ([Ms]) zurückgeht.

*Beispiel* 5.13.2.
Eine *rigid analytische Hopf-Varietät* ist ein Quotient $X_K$ des affinen Raums ohne Ursprung $\mathbb{A}^n_K - \{0\}$ modulo der Operation der Gruppe $\Gamma := g^{\mathbb{Z}} \subseteq \mathrm{GL}(n, K)$ mit

$$g \;=\; \begin{pmatrix} \pi^e\, u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^e\, u_n \end{pmatrix}, \qquad u_i \in R^\times\,,\;\; e \geq 2\,.$$

Nach [Ms, Theorem a] ist $X_K$ eine eigentliche, glatte, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über $K$ mit strikt semistabilem Modell.

Behauptung: $\quad \mathrm{Pic}^0_{X_K/K} \;=\; \mathbb{G}_{m,K}\,.$

Beweis: Sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $X_K$. Der Rücktransport von $\mathcal{L}$ auf $\mathbb{A}^n_K - \{0\}$ ist eingeschränkt auf $U^i_K := \mathbb{A}^{i-1}_K \times_K \mathbb{G}_{m,K} \times_K \mathbb{A}^{n-i}_K$ trivial nach [BM, Corollary 5.10]. Das heißt, $\mathcal{L}$ ist durch Übergangsfunktionen $l^{ij} \in \mathcal{O}(U^i_K \cap U^j_K)^\times$ gegeben. Diese sind von der Form $l^{ij} = a\,\zeta_i^\mu \zeta_j^\nu$ mit $a \in K^\times$ und $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$, wobei $\zeta_i$ eine Koordinate auf dem $i$-ten Faktor ist. Durch Abänderung der Trivialisierung auf $U^i_K$ mit $\zeta_i^\mu$ sehen wir, daß $\mathcal{L}$ trivial auf $\mathbb{A}^n_K - \{0\}$ ist. Zu $\mathcal{L}$ gehört eine $\Gamma$-Linearisierung. Dies ist eine Familie von Isomorphismen

$$\varphi_m :\; \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K} \;\xrightarrow{\sim}\; \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K}\,, \qquad m \in \mathbb{Z}\,,$$

welche die Kozykelbedingung $\varphi_{m'} \circ (g^{m'})^* \varphi_m = \varphi_{m+m'}$ erfüllt. Sie ist also durch das Element $\varphi_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K}(\mathbb{A}^n_K)^\times = K^\times$ bestimmt. Dies zeigt die Behauptung.

Somit ist für rigid analytische Hopf-Varietäten der Torusanteil nicht trivial.

Hingegen gilt jedoch

**Satz 5.14.**
*Sei $X_K$ eine eigentliche, glatte, zusammenhängende, rigid analytische Varietät über $K$, sowie $x_K \in X_K(K)$. Es gelte einer der folgenden Fälle*

a) *$X_K$ ist algebraisch, oder*

b) *$X_K$ ist eine rigid analytische Gruppenvarietät.*

*Dann ist $P_{_K}$ ist eine eigentliche, glatte rigid analytische Gruppe, das heißt der Torusanteil in $P_{_K}$ trivial.*

<u>Beweis:</u>
Ad a) Sei $X_{_K}$ algebraisch. Dann ist $\mathrm{Pic}^0_{X_{_K}/K}$ nach [Mu] und [Oo] darstellbar durch ein Schema $P^{\mathrm{alg}}_{_K}$, von endlichem Typ über $K$ (vergleiche Satz 4.2). Da $X_{_K}$ glatt ist, ist $P^{\mathrm{alg}}_{_K}$ eigentlich über $K$ ([FGA, n° 236, Théorème 2.1]). Da $P^{\mathrm{alg}}_{_K}$ von endlichem Typ über $K$ ist, ist nach einer geeigneten, endlichen Körpererweiterung das reduzierte Unterschema bereits geometrisch reduziert, also eine glatte Gruppe $\left(P^{\mathrm{alg}}_{_K}\right)_{\mathrm{red}}$ ([SGA 3, I, Exposé $\mathrm{VI_A}$, Proposition 1.3.1]). Für diese erhalten wir folgende

Behauptung: $P_{_K} = \left(P^{\mathrm{alg}}_{_K}\right)_{\mathrm{red}}$, insbesondere ist $P_{_K}$ eigentlich über $K$.

Beweis: Nach Satz 5.12 induziert das Poincaré-Bündel auf $\left(P^{\mathrm{alg}}_{_K}\right)_{\mathrm{red}}$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $\left(P^{\mathrm{alg}}_{_K}\right)_{\mathrm{red}} \longrightarrow P_{_K}$. Um den dazu inversen Morphismus zu konstruieren betrachten wir eine affinoide Überdeckung $\mathrm{Sp}\, A^i_{_K}$ von $P_{_K}$. Da $X_{_K}$ algebraisch und eigentlich über $K$ ist, kommt nach dem GAGA-Prinzip [Lü 2, Theorem 2.8] das Poincaré-Bündel auf $X_{_K} \times_K \mathrm{Sp}\, A^i_{_K}$ von einem algebraischen Geradenbündel auf $X_{_K} \times_K \mathrm{Spec}\, A^i_{_K}$. Dieses induziert einen eindeutig bestimmten Morphismus $\mathrm{Spec}\, A^i_{_K} \longrightarrow P^{\mathrm{alg}}_{_K}$. Da $A^i_{_K}$ rigid glatt über $K$, also geometrisch reduziert ist, faktorisiert der Morphismus durch $\left(P^{\mathrm{alg}}_{_K}\right)_{\mathrm{red}}$. Wegen der Eindeutigkeit lassen sich diese Morphismen zu einem eindeutig bestimmten Morphismus

$$P_{_K} \longrightarrow \left(P^{\mathrm{alg}}_{_K}\right)_{\mathrm{red}}$$

verkleben. Dieser ist invers zu dem zuvor konstruierten und somit der kanonische Isomorphismus.

Behauptung b) ist [Lü 3, Corollary II.2]. □

Damit wollen wir den Beweis der Darstellbarkeit und die Untersuchung der Struktur der Picard-Varietät beschließen.

# Literaturverzeichnis


[AM] Atiyah, M., Macdonald, I.: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1969.

[Ar 1] Artin, M.: *Algebraization of formal moduli I*, in: Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira, Princeton University Press 1969, 21 - 71.

[Ar 2] Artin, M.: *The Implicit Function Theorem in Algebraic Geometry* in: Arithmetical Algebraic Geometry, Procedings Paper of the Conference on Arithmetic Algebraic Geometry at Purdue University in 1963, Harper and Row, New York 1965, 13 - 34.

[BGR] Bosch, S., Güntzer, U., Remmert, R.: *Nonarchimedian Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1984.

[BL 1] Bosch, S., Lütkebohmert, W.: *Stable reduction and uniformization of abelian varieties I*, in: Mathematische Annalen 270 (1985), 349 - 379.

[BL 2] Bosch, S., Lütkebohmert, W.: *Stable reduction and uniformization of abelian varieties II*, in: Inventiones Mathematicae 78 (1984), 257 - 297.

[BL 3] Bosch, S., Lütkebohmert, W.: *Degenerating Abelian Varieties*, in: Topology Vol. 30, No. 4 (1991), 653 - 698.

[BLR] Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M.: *Néron Models*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1990.

[BM] Bass, H., Murthy, M.P.: *Grothendieck Groups and Picard Groups of Abelian Group Rings*, in: Annals of Mathematics 86 (1967), 16 - 73.

[Bo] Bourbaki, N.: *Commutative Algebra*, Elements of Mathematics, Hermann, Paris 1972.

[BS] Bosch, S., Schlöter, K.: *Néron models in the setting of formal and rigid geometry*, in: Mathematische Annalen 301 (1995), 339 - 362.

[dJ] de Jong, A.J.: *Smoothness, Semi-stability and Alterations*, in: Publications Mathématiques IHES 83 (1996), 51 - 93.

[EGA] Grothendieck, A., Dieudonné, J., et al.: *Eléments de Géométrie Algébrique*, Publications Mathématiques IHES 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1960 - 67), sowie Grundlehren 166, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1971.

[Ei] Eisenbud, D.: *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer-Verlag, New York 1995.

[FGA] Grothendieck, A.: *Fondements de la Géométrie Algébrique*, Séminaire Bourbaki 1957 - 62, Secrétariat Mathématiques, Paris 1962.

[FRG] Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M.: *Formal and Rigid Geometry*
*I. Rigid Spaces*, in: Mathematische Annalen 295 (1993), 291 - 317.
*II. Flattening Techniques*, in: Mathematische Annalen 296 (1993), 403 - 429.
*III. The Relative Maximum Principle*, in: Mathematische Annalen 302 (1995), 1 - 29.
*IV. The Reduced Fibre Theorem*, in: Inventiones Mathematicae 119 (1995), 361 - 398.

[Ge] Gerritzen, L.: *Zerlegung der Picard-Gruppe nichtarchimedischer holomorpher Räume*, in: Compositio Mathematica 25 (1977), 23 - 38.

[Ha] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, New York 1977.

[Ii] Iitaka, S.: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 76, Springer-Verlag, New York 1982.

[Ki 1] Kiehl, R.: *Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, in: Inventiones Mathematicae 2 (1967), 119 - 214.

[Ki 2] Kiehl, R.: *Theorem A und B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, in: Inventiones Mathematicae 2 (1967), 256 - 273.

[Lü 1] Lütkebohmert, W.: *Vektorraumbündel über nichtarchimedischen holomorphen Räumen*, in: Mathematische Zeitschrift 152 (1977), 127 - 143.

[Lü 2] Lütkebohmert, W.: *Formal-algebraic and rigid-analytic geometry*, in: Mathematische Annalen 286 (1990), 341 - 371.

[Lü 3] Lütkebohmert, W.: *The structure of proper rigid groups*, in: Journal für die reine und angewandte Mathematik 468 (1995), 167 - 219.

[Lü 4] Lütkebohmert, W.: *On rigid analytic Picard-varieties*, Vortrag auf der Konferenz über Arithmetic algebraic geometry, Platja d'Aro, 23.9.1996 .

[Ma] Matsumura, H.: *Commutative Algebra*, 2.Auflage, W.A.Benjamin Co, Reading, Massachusetts 1980.

[Mo] Moret-Bailly, L.: *Pinceaux de Variétés Abéliennes*, Astérisque 129 (1985).

[Ms] Mustafin, G.A.: *p-adic Hopf varieties*, Functional Analysis and its Applications 11 (1977), 234 - 235.

[Mu] Murre, J.P.: *On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups*, in: Publications Mathématiques IHES 23 (1964), 5 - 43.

[Oo] Oort, F.: *Sur le schéma de Picard*, in: Bulletin de la Société Mathématique de France 90 (1962), 1 - 14.

[Ra] Raynaud, M.: *Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl, .... Table ronde d'analyse non archimedienne*, in: Mémoires de la Société Mathématique de France 39/40 (1974), 319 - 327.

[Ro] Rotman, J.: *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York, 1979.

[SGA 3] Demazure, M., Grothendieck, A., et al.: *Séminaire de Géométrie Algébrique 3: Schémas en Groupes I, II, III*, Lecture Notes in Mathematics 151, 152, 153, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1970.

[Se] Serre, J.-P.: *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.

[Ta] Tate, J.: *Rigid analytic spaces*, in: Inventiones Mathematicae 12 (1971), 257 - 289.