Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei K ein Körper und x ein Element eines Oberkörpers von K, das transzendent über K ist. Geben Sie das Minimalpolynom von x über $K(x^3)$ an.

2. Im Folgenden sind einige Abbildungen beschrieben – teilweise nicht vollständig. Welche Abbildungen lassen sich zu Körperhomomorphismen fortsetzen? Bei welchen ist die Fortsetzung eindeutig? Wie sehen die Fortsetzungen aus? (In manchen Fällen gibt es sehr viele Fortsetzungen; dann brauchen Sie nicht alle anzugeben.)

   Hinweis: Einige der Aufgaben lassen sich mit den Sätzen 3.3.10 oder 3.3.11 lösen.

   (a) $f_1 \colon \mathbb{Q}(\sqrt{12}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{12}), f_1(\sqrt{12}) = -\sqrt{12}$.

   (b) $f_2 \colon \mathbb{Q}(\sqrt{7}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{7}), f_2(a) = -a$ für $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{7})$.

   (c) $f_3 \colon \mathbb{Q}(\sqrt[3]{6}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{6})$.

   (d) $f_4 \colon \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

   (e) $f_5 \colon \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

   (f) Sei $\bar{\mathbb{Q}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$.
   $f_6 \colon \mathbb{Q}(\sqrt{8}) \to \bar{\mathbb{Q}}$.

   (g) $f_7 \colon \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) \to \bar{\mathbb{Q}}$.

   (h) $f_8 \colon \bar{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}, f_8(\sqrt{8}) = -\sqrt{8}$.

   (i) $f_9 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_9(a) = a$ für $a \in \mathbb{R}$.

   (j) Sei $K := \mathbb{Q}(T)$ ein Körper mit T transzendent über $\mathbb{Q}$.
   $f_{10} \colon K \to K, f_{10}(T) = T^2$.

   (k) $f_{11} \colon K \to K, f_{11}(T) = T + 1$.

   (l) $f_{12} \colon K \to K, f_{12}(T) = \frac{1}{T}$.

   (m) $f_{13} \colon K \to \mathbb{R}, f_{13}(T) = \pi$.
   Hinweis: π ist transzendent über $\mathbb{Q}$. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen; das ist auch nicht so einfach.)

   (n) $f_{14} \colon \mathbb{R} \to K, f_{14}(\pi) = T$.

   (o) $f_{15} \colon K \to \mathbb{Q}(\sqrt{11}), f_{15}(T) = \sqrt{11}$.