Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Geben Sie Beispiele für Körpererweiterungen mit den folgenden Eigenschaften an, oder begründen Sie, warum es keine gibt.

   (a) Algebraisch und endlich.

   (b) Algebraisch und unendlich.

   (c) Transzendent und endlich.

   (d) Transzendent und unendlich.

   (e) Normal und separabel.

   (f) Nicht normal.

2. Sei $L := \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

   (a) Ist L über $\mathbb{Q}$ eine normale / separable / endliche / algebraische Körpererweiterung?

   (b) Zeigen Sie $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \cdot \mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$.
   Hinweis: Für $L \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ können sie z. B. Potenzen von $\alpha := \sqrt{3}+\sqrt{5}$ ausrechnen und daraus dann $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ darstellen.

   (c) Berechnen Sie $G := \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(L)$: Wie sieht die Gruppe (abstrakt) aus, wie operieren die Gruppenelemente auf $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ und $\sqrt{15}$?
   Hinweis: Sie können z. B. $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ und $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})}(L)$ berechnen; daraus lässt sich (mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung) G zusammenbauen.

   (d) Geben Sie ein primitives Element von L über $\mathbb{Q}$ an.