Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $f := X^7 + 4X^6 + 2X^5 + 3X^4 + 4X^2 + 1$ in $\mathbb{F}_5[X]$. Berechnen Sie die formale Ableitung Df.

2. Sei K ein Körper, L eine endliche Erweiterung von K und T ein algebraischer Abschluss von L. Welche Gleichungen / Ungleichungen gelten zwischen $[L : K]$, $[L : K]_{sep}$, $\#\operatorname{Aut}_K(L)$ und $\#\operatorname{Hom}_K(L, T)$? Wann gilt bei den Ungleichungen Gleichheit?

3. Sei $L := \mathbb{F}_5(T)$ und $K := \mathbb{F}_5(T^{10})$. Ist L separabel über K?

4. (a) In der Vorlesung wurde behauptet: Der Körper $\mathbb{F}_q$ besteht genau aus den Nullstellen von $X^q - X$. Überprüfen Sie das für $\mathbb{F}_3$, indem Sie ein Polynom aus Linearfaktoren zusammenmultiplizieren, das die Elemente von $\mathbb{F}_3$ als Nullstellen hat.

   (b) Wenn Sie sich bei der Rechung aus (a) anschauen, wie der lineare Term von $X^q - X$ zustande kommt, sollten Sie die folgende Formel beweisen können:
   $$\prod_{a \in \mathbb{F}_q^\times} (-n) = -1.$$
   Überlegen Sie sich, dass man in der Formel das $-n$ noch durch n ersetzen kann. (Dann sieht sie noch etwas schöner aus.)

   (c) Wenn man die Formel jetzt noch etwas umformuliert (tun Sie das), hat man mit algebraischen Mitteln einen zahlentheoretischen (nicht ganz trivialen) Satz bewiesen:
   $$p | ((p-1)! + 1) \text{ für } p \text{ prim.}$$

5. Rechnen Sie die Produktregel für die formale Ableitung D nach:
   $$D(f \cdot g) = f \cdot Dg + Df \cdot g.$$