Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

Sei $f := X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ und L der Zerfällungskörper von f. Auf diesem Blatt wird die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ untersucht.

1. Zuerst soll der Grad $[L : \mathbb{Q}]$ bestimmt werden:

   (a) Prüfen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

   (b) Wenn man durch Adjungieren einer Nullstelle von f schon ganz L erhält, ist $[L : \mathbb{Q}] = 4$, ansonsten ist $[L : \mathbb{Q}] > 4$. Das muss also jetzt geprüft werden. Überlegen Sie sich, dass f die Nullstellen $\pm\sqrt[4]{3}$ und $\pm i\sqrt[4]{3}$ hat und dass $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) \neq L$ ist. (Nebenbei: Könnte vielleicht $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{3}) = L$ sein?)

   (c) Jetzt brauchen wir noch $[L : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})]$. Zeigen Sie: $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i\sqrt[4]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$. Berechnen Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})]$, und daraus dann $[L : \mathbb{Q}]$.

2. Jetzt soll die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ näher untersucht werden:

   (a) Wie viele Elemente hat sie?

   (b) Überlegen Sie sich, dass ein Element der Galois-Gruppe schon dadurch eindeutig bestimmt ist, dass man angibt, wie es auf den Nullstellen von f operiert. Inwiefern ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4?

   (c) Ein paar Elemente von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ liegen schon in $G_1 := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}))$ oder in $G_2 := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(i))$. Wie sehen diese Gruppen aus? Wie operieren die Elemente davon auf den Nullstellen von f?

   (d) Bilden Sie Produkte von Elementen aus G_1 und G_2. Wenn Sie zählen, wie viele Elemente von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ Sie auf diese Art bekommen, sollten Sie feststellen, dass sie schon die gesamte Galois-Gruppe gefunden haben.

   (e) Es gibt noch eine elegantere Möglichkeit zu prüfen, dass $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ von G_1 und G_2 erzeugt wird (ohne alle Produkte auszurechnen): Nehmen Sie an, das Erzeugnis wäre nur eine Untergruppe $H \subsetneq \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Aus H bekommen Sie mit dem Hauptsatz der Galois-Theorie einen Körper. Was können Sie über ihn sagen? (Von welchen anderen Körpern wäre er eine Teilmenge, und von welchen eine Obermenge?) Führen Sie das zum Widerspruch.

3. Die Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$ entsprechen den Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, d. h. jetzt könnten Sie sämtliche Zwischenkörper berechnen, indem Sie die Untergruppen anschauen. Da es viele Untergruppen gibt, hier nur ein Beispiel:

   Sei H die Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, die aus der Identität besteht und aus dem Element, dass jede Nullstelle von f auf ihr negatives abbildet. Berechnen Sie den Körper L^H, der zur Untergruppe H gehört:

(a) Probieren Sie, den Körper in der Form $\mathbb{Q}(\beta)$ anzugeben. Überlegen Sie sich dazu zunächst, dass β nicht von H bewegt werden darf. Reicht diese Bedingung schon, damit $\mathbb{Q}(\beta)$ der gesuchte Körper ist?

(b) Konstruieren Sie jetzt ein Element β, dass von H nicht bewegt wird. Hinweis: Probieren Sie es mit Summen oder Produkten von den Nullstellen von f.

(c) Eine Inklusion (zwischen dem gesuchten Körper L^H und dem konstruierten $\mathbb{Q}(\beta)$) ist klar. (Welche?) Überprüfen Sie die andere Inklusion durch Grad-Vergleich. (Dazu müssen Sie das Minimalpolynom von β finden.) Wenn Sie Gleichheit erhalten, können Sie die nachfolgenden Punkte überspringen.

(d) Wenn Sie keine Gleichheit erhalten: Finden Sie ein weiteres β' und probieren Sie es mit dem Körper $\mathbb{Q}(\beta, \beta')$. Natürlich sollten Sie versuchen, ein β' zu finden, dass nicht in $\mathbb{Q}(\beta)$ liegt. Wenn $\beta \in \mathbb{R}$ liegt aber β' nicht (oder umgekehrt), stehen die Chancen dafür ganz gut.

(e) Sie haben jetzt also Körper $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\beta) \subsetneq \mathbb{Q}(\beta, \beta')$. Überlegen Sie sich durch Grad-Betrachtungen, dass $\mathbb{Q}(\beta, \beta')$ der gesuchte Körper sein muss.

4. Geben Sie die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L^H/\mathbb{Q})$ an (z. B. dadurch, dass sie sagen, wie die Elemente der Gruppe auf β und β' operieren) und die Surjektion $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L^H/\mathbb{Q})$, die es laut Vorlesung geben muss.