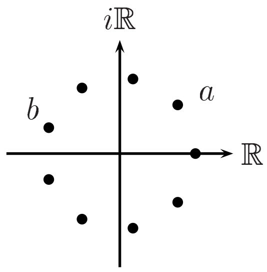
Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Rechts sind die neunten Einheitswurzeln abgebildet.



   (a) Zeigen Sie, dass a in $\mathbb{Q}(b)$ liegt, indem Sie a als Potenz von b schreiben.

   (b) Liegen alle abgebildeten Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}(b)$? Gibt es noch andere Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}(b)$ als die abgebildeten?

   (c) Geben Sie für jede der abgebildeten Wurzeln an, welchen Körper Sie über über $\mathbb{Q}$ erzeugen und welchen Grad die Körper über $\mathbb{Q}$ haben.

   (d) Welche der Körper sind in welchen anderen enthalten?

   (e) Was ist die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(b)/\mathbb{Q})$? Teilen Sie die abgebildeten Einheitswurzeln in Bahnen unter der Gruppenoperation ein.

   (f) Gibt es noch einen anderen Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(b)/\mathbb{Q}$? Geben Sie ein erzeugendes Element an.

2. Berechnen Sie folgende Normen und Spuren:

   (a) $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(3+\sqrt{2})$ und $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(3+\sqrt{2})$

   (b) $\mathrm{N}_{L/K}(a)$ und $\mathrm{Tr}_{L/K}(a)$ für $a \in K$ und mit $[L:K] = 34$

   (c) $\mathrm{N}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(a+ib)$ und $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(a+ib)$ für $a, b \in \mathbb{R}$

   (d) Sei $f := X^5 + 9X^4 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$, sei α eine Nullstelle von f und sei $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Berechnen Sie $\mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)$ und $\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)$.
   Hinweis: Was sind die Bilder von α unter $\mathrm{Hom}_K(L, \bar{L})$?

3. Welche Einheitswurzeln liegen in den Körpern $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$?

   Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, welche Einheitswurzeln überhaupt vom Grad her in Frage kommen. (D. h. für welche n ist der Grad der primitiven n-ten Einheitswurzel ζ_n über $\mathbb{Q}$ klein genug?)