Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $G := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ und $H := \{\bar{a} \in G \mid a \text{ ist durch 3 teilbar}\}$. Sei $Q := G/H$. Machen Sie sich klar, wie die Elemente von Q genau ausssehen (Nebenklassen von Nebenklassen...). Zeigen Sie: $Q \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2. Sei $G := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $H := \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Welche Homomorphismen gibt es von G nach H?

3. Sei $G := \{\bar{n} \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \mid n \text{ ist weder durch 3 noch durch 5 teilbar}\}$. Wir definieren eine Verknüpfung durch $\bar{a} \circ \bar{b} := \overline{a \cdot b}$.

   (a) Zeigen Sie: Diese Verknüpfung ist wohldefiniert, und G wird dadurch zu einer Gruppe.

   (b) Welche Untergruppen hat G?

   (c) Welche Homomorphismen von G nach G gibt es? Und welche davon sind Isomorphismen?

4. Sei S_3 die Menge der 3×3-Matritzen, die in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 haben und sonst nur 0en.

   (a) Zeigen Sie: S_3 ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

   (b) Welche Untergruppen hat S_3? Welche dieser Untergruppen sind Normalteiler?

5. Wie viele verschiedene (d. h. nicht-isomorphe) Gruppen der Ordnungen 2, 3, 4, 5, 6, 7 gibt es? Für welche weiteren Ordnungen können Sie alle Gruppen angeben?