Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Welche der folgenden Gruppen sind zyklisch?
   $G_1 := C_2 \times C_3$,
   $G_2 := C_2 \times C_4$,
   $G_3 := C_2 \times \mathbb{Z}$.

2. In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass jede endliche Gruppe isomorph zu einer Untergruppe von S_n (für passendes n) ist. Überprüfen Sie das für die Gruppe $G := C_2 \times C_4$.

3. (a) Betrachen Sie den Zykel

$$\zeta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_8.$$

   Berechnen Sie ζ^2, ζ^3, ζ^4, ζ^{100}.

   (b) Betrachen Sie nun

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_8.$$

   Berechnen Sie σ^2, σ^3.

   (c) Schreiben Sie σ als Produkt paarweise fremder Zykel.

   (d) Berechnen Sie damit nun σ^{100}.

   (e) Was ist die Ordnung von σ?

   (f) Hat S_8 eine Untergruppe, die zur zyklischen Gruppe C_{12} isomorph ist?

4. (a) Sei $G := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis von G?
   $M_1 := \{(1,0),(0,1)\}$,
   $M_2 := \{(1,1)\}$,
   $M_3 := \{(2,0),(0,1)\}$,
   $M_4 := \{(1,0),(1,1)\}$,
   $M_5 := \{(2,0),(3,0),(0,1)\}$,
   $M_6 := \{(2,0),(3,1)\}$,
   $M_7 := \{(2,1),(3,2)\}$.

   (b) Beispiel zum Elementarteilersatz: Betrachten Sie die Untergruppe $H := \{(a,b) \in G \mid a+b \text{ ist gerade}\}$. Geben Sie eine Basis $\{x_1, x_2\}$ von G an und Zahlen m_1 und m_2 mit $m_1 | m_2$, so dass $\{m_1 x_1, m_2 x_2\}$ eine Basis von H ist.