Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Betrachten Sie in $\mathbb{Z}$ zwei Ideale (a) und (b).

   (a) Was bedeutet $(a) \subset (b)$, $(a) \cap (b) = \{0\}$ und $((a) \cup (b)) = \mathbb{Z}$ für die Zahlen a und b?

   (b) Können Sie einen Erzeuger der Ideale $(a) \cap (b)$, $((a) \cup (b))$ und $(a) \cdot (b)$ in Abhängigkeit von a und b angeben? (Probieren Sie es evtl. für $a = 8$ und $b = 12$.)

2. Sei R ein Ring (z. B. $\mathbb{Q}$). Welche Ringhomomorphismen $R[X] \to R$ gibt es, die auf R die Identität sind? (Am kürzesten kann man sich das überlegen, wenn man die universelle Eigenschaft von Polynomringen benutzt. Anschaulicher ist es, wenn man Ringhomomorphismen explizit angibt.)

3. Eine der wichtigsten Anwendungen von Polynomringen ist, dass man gegebene Ringe um neue Elemente erweitert, die gewisse Eigenschaften (Gleichungen) erfüllen. Wir wollen z. B. einen Ring konstruieren, der $\mathbb{Z}$ enthält und außerdem ein zusätzliches Element i, für das $i^2 = -1$ gilt.

   Möglichkeit 1 (wenn man die komplexen Zahlen kennt): Sei R_1 der Unterring der komplexen Zahlen, der von $\mathbb{Z}$ und i erzeugt wird. (Wie sieht R_1 aus?)

   Möglichkeit 2: Sei $S := \mathbb{Z}[X]$. S enthält die ganzen Zahlen, und ein zusätzliches Element X, dass später die Rolle von i spielen soll; allerdings gilt in S nicht $X^2 = -1$. Um einen Ring zu erhalten, in dem das gilt, müssen wir dafür sorgen, dass $X^2 + 1 = 0$ ist. Das tut man, indem man das Ideal $I := (X^2 + 1)$ aus S rausteilt: $R_2 := S/I$. In R_2 gilt dann $\bar{X}^2 = \overline{X^2 + 1 - 1} = \overline{-1}$, also die gewünschte Gleichung.

   Machen Sie sich klar, dass die Ringe R_1 und R_2 isomorph sind. Geben Sie dazu einen geeigneten Ringhomomorphismus ϕ von R_2 nach R_1 an. Worauf bildet ϕ die Elemente $\bar{1}$, $\bar{X}$, $\overline{X+1}$, $\bar{X}^2$, $\overline{X^2+1}$, $\bar{X}^3$ und $\bar{X}^4$ ab?

   Anmerkung: Der hier konstruierte Ring heißt „Ring der Gaussschen Zahlen“ $\mathbb{Z}[i]$.

4. Wenn Sie noch Zeit haben, können Sie selbst den Ring der „dualen Zahlen“ $\mathbb{R}[\epsilon]$ konstruieren. Das soll ein Ring sein, der $\mathbb{R}$ enthält und ein weiteres Element ϵ mit $\epsilon^2 = 0$ (aber $\epsilon \neq 0$).