Anwesenheitsaufgaben

8. Woche vom 4.12.02 bis 6.12.02

1. Sei R ein faktorieller Ring und $\mathbb{P} \subset R$ ein Repräsentantensystem für die Klassen assoziierter Primelemente von R. (D.h. alle $p \in \mathbb{P}$ sind prim in R und jedes Primelement von R ist zu genau einem $p \in \mathbb{P}$ assoziiert.) Zeigen Sie:

   (a) Zu jedem $a \in R, a \neq 0$ und jedem $p \in \mathbb{P}$ existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $v_p(a) \in \mathbb{N}_0$, so dass
   $$a \;\sim\; \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(a)}$$
   und $v_p(a) = 0$ für alle bis auf endlich viele $p \in \mathbb{P}$.

   (b) Für Elemente $a, b, a_1, \ldots, a_n \in R$ gilt:
   $a|b$ genau dann, wenn $v_p(a) \leq v_p(b)$ für alle $p \in \mathbb{P}$.
   $a \sim b$ genau dann, wenn $v_p(a) = v_p(b)$ für alle $p \in \mathbb{P}$.
   Setzt man $\alpha_p := \min\{v_p(a_1), \ldots, v_p(a_n)\}$, so ist
   $$d \;:=\; \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p} \qquad \text{ein ggT von } a_1, \ldots, a_n \text{ in } R\,.$$

2. Zeigen Sie: Ein Integritätsring R ist genau dann faktoriell, wenn gilt

   (a) jedes $a \in R, a \notin R^\times, a \neq 0$ besitzt eine Faktorisierung in irreduzible Elemente von R und

   (b) zu je zwei Elementen $a, b \in R$ existiert ein ggT in R.

   Hinweis zu „$\Leftarrow$“: Seien $p, q \in R$ irreduzibel und $a \in R$ mit $p|aq$. Wähle einen ggT d von aq und pq in R. Dann gilt $d = pc$ und entweder $c \in R^\times$ oder $c \sim q$, also $p \sim q$ oder $p|a$.

3. Zeigen Sie: Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper Q. Dann besitzt jedes $x \in Q$ eine Darstellung $x = \frac{a}{b}$ mit teilerfremden $a, b \in R$.

4. Zeigen Sie: Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom und $\alpha \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f. Dann ist $\alpha \in \mathbb{Z}$.
   Hinweis: Lemma 2.7.6