Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $f := X^3 - 6 \in \mathbb{Q}[X]$. In dieser Aufgabe wird im Detail untersucht, was man daraus für Körper bekommt. (Teil (a) und (b) sind ein paar Vorüberlegungen.)

   (a) Sei $\xi := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie ξ^3.

   (b) Überlegen Sie sich anschaulich, dass $1 + \xi + \xi^2 = 0$ ist, indem Sie die drei Punkte 1, ξ und ξ^2 in die komplexe Ebene malen.

   Hier ist ein formaler Beweis, dass das stimmt: 1, ξ und ξ^2 sind die drei Nullstellen vom Polynom $x^3 - 1$. Also ist $x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x-\xi)\cdot(x-\xi^2)$. Wenn man die rechte Seite ausmultipliziert, erhält man als Koeffizient vor x^2 gerade $1 + \xi + \xi^2$. Da der Koeffizient von x^2 auf der linken Seite 0 ist, muss diese Summe also 0 sein.

   (c) Seien $\alpha_1 := \sqrt[3]{6}, \alpha_2 := \xi\sqrt[3]{6}$ und $\alpha_3 := \xi^2\sqrt[3]{6}$. Zeigen Sie, dass das die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ sind.

   (d) Ist f irreduzibel über $\mathbb{Q}$?

   (e) In wiefern sind $K := \mathbb{Q}(\alpha_1)$ und $K' := \mathbb{Q}(\alpha_2)$ die „gleichen“ Körper, und in wiefern sind sie verschieden?

   (f) „Berechnen“ Sie den Grad der Körpererweiterung $[K : \mathbb{Q}]$.

   (g) Welche der folgenden Mengen sind Basen von K als $\mathbb{Q}$-Vektorraum? $\{1, \alpha_1, \alpha_1^2\}$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\{1, \xi, \xi^2\}$.

   (h) Wie viele (und welche) Nullstellen hat f im Körper K?

   (i) Was ist das Minimalpolynom von α_2 über K?

   (j) Sei $L := \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$. Berechnen Sie die Grade $[L : K]$ und $[L : \mathbb{Q}]$.

   (k) Wie viele (und welche) Nullstellen hat f im Körper L?

   (l) Geben Sie eine Basis von L über K an (d. h. von L, aufgefasst als K-Vektorraum).

   (m) Sei $M := \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Berechnen Sie die Grade $[M : L]$ und $[M : \mathbb{Q}]$.

2. Sei $f := X^4 - 3X^3 + 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$. ($f$ ist irreduzibel nach dem Eisensteinkriterium.) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, und sei $K := \mathbb{Q}(\alpha)$. Überlegen Sie sich, wie man mit Elementen von K rechnen kann, wenn sie in der Form $a = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3$ gegeben sind (und man das Ergebnis wieder in dieser Form haben will): Was ist z. B.

   (a) $(2 + \alpha) \cdot (1 + 3\alpha)$

   (b) $(3 + 2\alpha + 3\alpha^3) \cdot \alpha$

   (c) $\alpha^3 \cdot (1 + \alpha^3)$

   Hinweis: Wenn im Ergebnis α^k für $k \geq 4$ vorkommt, muss man es irgendwie durch kleinere α-Potenzen ausdrücken. Konstruieren Sie sich aus f eine Gleichung, die Ihnen das ermöglicht. (Schließlich ist $f(\alpha) = 0$.)