Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

1. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 21.10.02, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Es sei G eine endliche abelsche Gruppe mit Einselement e. Zeigen Sie, dass in G gilt:
$$\prod_{g \in G} g^2 \;=\; e\,.$$

2. Es sei G eine Gruppe mit Einselement e. Zeigen Sie:
   (a) Sei $i = -1$ oder $i = 2$. Gilt $(ab)^i = a^i b^i$ für alle $a, b \in G$, so ist G kommutativ.
   (b) Ist $a^2 = e$ für alle $a \in G$, so ist G kommutativ.
   (c) Gilt für drei aufeinanderfolgende Zahlen $i = k$, $k+1$, $k+2$ die Gleichung $(ab)^i = a^i b^i$ für alle $a, b \in G$, so ist G kommutativ.

3. Sei K ein Körper. Zeigen Sie:
   (a) Die Menge $U := \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ a, b, c \in K\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(3, K)$.
   (b) Im Fall $K = \mathbb{F}_3$ (der Körper mit 3 Elementen) ist $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $A \in U$. Jedoch ist U nicht kommutativ. (Vergl. Aufgabe 2 (b).)

4. Zeigen Sie: Der einzige Gruppen-Homomorphismus von den rationalen Zahlen mit der Addition $(\mathbb{Q}, +)$ in die positiven rationalen Zahlen mit der Multiplikation $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist der triviale (d. h. der, der alles auf das Einselement abbildet).

   Hinweis: In $(\mathbb{Q}, +)$ gibt es für alle k ein $a \in \mathbb{Q}$ mit $\underbrace{a + \cdots + a}_{k \text{ Summanden}} = 1$.