Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

10. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 13.1.03, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Zeigen Sie: Es gibt einen Körper mit vier Elementen. Fangen Sie dazu mit dem Körper $\mathbb{F}_2$ an und adjungieren Sie eine Nullstelle α eines irreduziblen Polynoms vom Grad zwei. Der Körper, den Sie erhalten, wird $\mathbb{F}_4$ genannt.

   Geben Sie eine Multiplikationstafel der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{F}_4$ an. *(4 Punkte)*

2. Geben Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ über den folgenden Körpern an:

   (a) $\mathbb{Q}$,
   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$,
   (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$,
   (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$.

   (4 Punkte)

3. Zeigen Sie: Körpererweiterungen vom Grad zwei sind normal. *(3 Punkte)*

4. Sei K ein Körper und x ein Element eines Oberkörpers von K, das transzendent über K ist. Zeigen Sie:

   (a) x^n ist transzendent über K.
   (b) $K(x)$ ist eine algebraische Erweiterung von $K(x^n)$ mit $[K(x) : K(x^n)] = n$.

   Hinweis: Um zu zeigen, dass der Grad nicht kleiner ist, müssen Sie zeigen, dass das Minimalpolynom von x über $K(x^n)$ irreduzibel ist. Das geht mit dem Eisenstein-Kriterium.

   (5 Punkte)

5. Sei K ein Körper und $\mathcal{F} := \{f \in K[X] \mid \deg f \geq 1\}$. Zeigen Sie: Ein Körper L ist genau dann Zerfällungskörper von $\mathcal{F}$ über K, wenn er ein algebraischer Abschluss von K ist. *(4 Punkte)*

Frohe Weihnachten!