Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

11. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 20.1.03, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Sei L/K eine endliche Körper-Erweiterung. Zeigen Sie: K ist perfekt genau dann, wenn L perfekt ist.

   Hinweis für „$\Leftarrow$“ in Charakteristik p: Zeigen Sie $[L^p : K^p] = [L : K]$.

   (4 Punkte)

2. Geben Sie ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ über $\mathbb{Q}$ an. *(4 Punkte)*

3. Sei L/K eine endliche, normale Körpererweiterung, sei $f \in K[X]$ irreduzibel über K, und seien $f_1, f_2 \in L[X]$ zwei irreduzible Faktoren von f. Zeigen Sie: Es gibt ein $\sigma \in \mathrm{Aut}(L)$ mit $\tilde{\sigma} f_1 = f_2$, wobei $\tilde{\sigma}$ definiert ist durch $\tilde{\sigma} \restriction_L = \sigma$ und $\tilde{\sigma}(X) = X$. *(4 Punkte)*

4. (a) Sei L über K eine separable Körpererweiterung, und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn für alle $\alpha \in L$ gilt $[K(\alpha) : K] \leq n$, dann ist schon $[L : K] \leq n$.

   (b) Gegenbeispiel, wenn L über K nicht separabel ist: Sei $L := \mathbb{F}_p(X, Y)$ und $K := \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$. Zeigen Sie: Für alle $\alpha \in L$ ist $[K(\alpha) : K] \leq p$, und $[L : K] = p^2$.

   (4 Punkte)

5. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung mit Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie für alle $\alpha \in L$:

   $$\alpha \text{ ist separabel über } K \iff K(\alpha^p) = K(\alpha).$$

   Hinweis: „$\Rightarrow$“: Benutzen Sie, dass das Minimalpolynom eines nicht-separablen Elements sich als Polynom in X^p schreiben lässt.
   „$\Leftarrow$“: Überlegen Sie sich, dass das Minimalpolynom von α über $K(\alpha^p)$ ein Teiler von $X^p - \alpha^p$ ist. Wie kann es dann aussehen, wenn es separabel sein soll? *(4 Punkte)*