Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

12. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 27.1.03, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Geben Sie alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ an. *(3 Punkte)*

2. Sei K ein Körper und $f \in K[T]$ ein irreduzibles separables Polynom vom Grad 3. Zeigen Sie: Die Galois-Gruppe von f ist entweder die zyklische Gruppe C_3 oder die symmetrische Gruppe S_3. *(4 Punkte)*

3. Sei K ein Körper und L eine Galois-Erweiterung von K mit abelscher Galois-Gruppe. Zeigen Sie:

   (a) Ist M ein Zwischenkörper zwischen K und L, so ist M/K normal.

   (b) Wenn L der Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms $f \in K[T]$ ist, dann ist schon $L = K(\alpha)$ für jede beliebige Nullstelle α von f.

   (6 Punkte)

4. Sei K ein Körper der Charakteristik 0, $f \in K[T]$ vom Grad 4 und L der Zerfällungskörper von f. Der Grad $[L : K]$ sei 12. Sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie:

   (a) Die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist isomorph zur symmetrische Gruppe S_4.

   (b) $\mathrm{Gal}(L/K(\alpha))$ ist isomorph zu S_3.

   (c) Es gibt keine Untergruppe H mit $\mathrm{Gal}(L/K(\alpha)) \subsetneq H \subsetneq \mathrm{Gal}(L/K)$.
   Hinweis: Nutzen Sie die Isomorphismen aus (a) und (b) und überlegen Sie sich, welche Gruppe von S_3 und einem weiteren Element von S_4 erzeugt wird.

   (d) Zwischen K und $K(\alpha)$ gibt es keinen (echten) Zwischenkörper.

   (e) Es gibt in $K(\alpha)$ Elemente, die sich nicht aus Elementen von K berechnen lassen, wenn man nur addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren und Quadratwurzel-ziehen erlaubt, und wenn alle Zwischenergebnisse auch in $K(\alpha)$ liegen müssen. (Die letzte Bedingung ist in der Tat überflüssig, wie in Abschnitt 4.8 der Vorlesung gezeigt wird.)

   (7 Punkte)