Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

13. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 3.2.03, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Sei $L \subset \mathbb{C}$ eine Galois-Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong C_4$. Zeigen Sie: Es gibt genau einen Zwischenkörper K von $L/\mathbb{Q}$, und für diesen Zwischenkörper gilt $K \subset \mathbb{R}$. *(4 Punkte)*

2. Zeigen Sie: Zu jeder endlichen Gruppe G gibt es Körper K und L mit $K \subset L$, L galoissch über K und $\mathrm{Gal}(L/K) = G$.

   Hinweis: Es geht ganz schnell, wenn Sie die richtigen Sätze aus der Vorlesung anwenden. *(4 Punkte)*

3. Berechnen Sie die Galois-Gruppen der folgenden Polynome:

   (a) $x^4 - x^2 - 3 \in \mathbb{F}_5[x]$
   (b) $x^4 + 7x^2 - 3 \in \mathbb{F}_{13}[x]$ *(4 Punkte)*

4. Sei K ein Körper mit Charakteristik $\neq 2, 3$, $f \in K[T]$ ein irreduzibles separables Polynom vom Grad 3 und L ein Zerfällungskörper von f. In Aufgabe 2 von Blatt 12 haben Sie gezeigt, dass die Galois-Gruppe von f entweder C_3 oder S_3 ist. In dieser Aufgabe soll untersucht werden, welcher der Fälle wann eintritt.

   Seien α_1, α_2 und $\alpha_3 \in L$ die Nullstellen von f, sei $\delta := \prod_{1 \leq i < j \leq 3}(\alpha_i - \alpha_j)$ und sei $\Delta := \delta^2$. (Δ heißt *Diskriminante* von f.)

   Zeigen Sie:

   (a) $\Delta \in K$.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass Δ ein symmetrisches Polynom in den α_i ist und dass es deshalb nicht von $\mathrm{Gal}(L/K)$ bewegt wird.
   (b) $\mathrm{Gal}(L/K) \cong C_3$ genau dann, wenn $\delta \in K$.
   Hinweis: Überlegen Sie sich, wie die Galois-Gruppe auf δ operiert.
   (c) Zeigen Sie im Spezialfall $f = x^3 + bx + c$, dass $\Delta = -4b^3 - 27c^2$ ist.
   Hinweis: Schreiben Sie b, c und Δ als Funktionen von den Nullstellen von f und nutzen Sie die Gleichung über die Nullstellen, die Sie daraus bekommen, dass f keinen x^2-Term hat.
   (d) Sei jetzt $f := x^3 + ax^2 + bx + c$ wieder ein allgemeines (irreduzibles) Polynom dritten Grades. Zeigen Sie: $g(x) := f(x - \frac{a}{3})$ ist ein Polynom, dass dem Spezialfall von (c) entspricht, und ein Körper L ist Zerfällungskörper von g genau dann, wenn er Zerfällungskörper von f ist. (Insbesondere haben also f und g die gleiche Galois-Gruppe.)
   (e) Nutzen Sie dieses Verfahren, um zu entscheiden, was die Galois-Gruppe der Polynome $f_1 := x^3 + x^2 - 2x - 1$ und $f_2 := x^3 - 3x^2 - 1$ über $\mathbb{Q}$ ist.

   (8 Punkte)