Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

14. (und letztes) Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 10.2.03, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

Auf diesem Blatt sei $\zeta_n \in \mu_n(\mathbb{Q})$ immer eine n-te primitive Einheitswurzel.

1. Berechnen Sie $\mathbb{Q}(\zeta_{15}) \cap \mathbb{Q}(\zeta_{20})$.

   Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, wie das Kompositum aussieht. Aus dessen Grad bekommen Sie den Grad des gesuchten Körpers (mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung). *(4 Punkte)*

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
$$\sum_{i=0}^{n-1} \zeta_n^i = 0.$$
   Hinweis: Bringen Sie die Einheitswurzeln mit den Koeffizienten vom Polynom $X^n - 1$ in Verbindung. *(4 Punkte)*

3. Zeigen Sie die folgenden Formeln für die Kreisteilungspolynome:
   (a) $\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p(X^{p^{r-1}})$ für p prim und $r \geq 1$.
   (b) $\Phi_n(X) = \Phi_{p_1 \cdots p_s}(X^{p_1^{r_1-1} \cdots p_s^{r_s-1}})$ wenn $p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s} = n$ die Primfaktorzerlegung von n ist.
   (c) $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$ falls n ungerade und $n \geq 3$.
   (d) $\Phi_{pn}(X) = \frac{\Phi_n(X^p)}{\Phi_n(X)}$ falls $p \nmid n$.

   (4 Punkte)

4. Für welche $m, n \in \mathbb{N}$ ist das n-te Kreisteilungspolynom Φ_n irreduzibel über $\mathbb{Q}(\zeta_m)$? *(4 Punkte)*

5. Sei K ein Körper, $L = K(\alpha)$ eine Körpererweiterung und f das Minimalpolynom von α über K. Zeigen Sie, dass für alle $x \in K$ gilt: $N_{L/K}(x - \alpha) = f(x)$. *(4 Punkte)*