Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

2. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 28.10.02, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Sei G eine Gruppe und $H < G$ eine Untergruppe vom Index 2. Zeigen Sie: H ist ein Normalteiler von G. *(4 Punkte)*

2. Seien G und G' Gruppen und $\phi\colon G \twoheadrightarrow G'$ ein surjektiver Homomorphismus dazwischen.

   Zeigen Sie: Ist G abelsch, so ist auch G' abelsch. Gilt auch die Umkehrung? *(4 Punkte)*

3. Sei G eine Gruppe und $H_i < G, i \in I$ eine Familie von Untergruppen von G. Zeigen Sie:

   (a) $\bigcap_{i\in I} H_i$ ist auch eine Untergruppe von G.

   (b) Sind die H_i Normalteiler von G, so ist auch $\bigcap_{i\in I} H_i$ ist auch ein Normalteiler.

   (4 Punkte)

4. Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Teilmenge. Für $a, b \in G$ sei

   $$a \overset{l}{\equiv} b \mod H :\Longleftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

   Zeigen Sie: Wenn das eine Äquivalenz-Relation ist, ist H eine Untergruppe von G. (In der Vorlesung haben Sie die umgekehrte Richtung gesehen.) *(4 Punkte)*

5. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $d \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ die Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ und s die Spiegelung an der y-Achse. Die *Diedergruppe* D_n ist die von d und s erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

   (a) Zeigen Sie: D_n besteht aus folgenden $2n$ verschiedenen Elementen:

   $$D_n = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, d, d^2, \ldots, d^{n-1}, s, sd, \ldots, sd^{n-1}\}$$

   (b) Zeigen Sie: $\langle d \rangle$ ist ein Normalteiler in D_n und $D_n/\langle d \rangle$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   (c) Bestimmen Sie alle Normalteiler von D_n.

   Bemerkung: D_n ist die Gruppe derjenigen Abbildungen, die das reguläre n-Eck auf sich selbst abbilden. *(4 Punkte)*