Algebra
 WS 02/03

Dr. Urs Hartl
 Immanuel Herrmann

3. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 4.11.02, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Sei K ein Körper. Betrachten Sie folgende Untergruppen von $G := \mathrm{GL}(n, K)$:

$$\text{die } \textit{Borel-Untergruppe} \quad B := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, K) \right\},$$

$$\text{die } \textit{unipotente Untergruppe} \quad U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, K) \right\},$$

$$\text{die } \textit{Torus-Untergruppe} \quad T := \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, K) \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) U ist ein Normalteiler von B.

(b) $T \cong B/U$. (Hinweis: Isomorphiesatz.)

(5 Punkte)

2. Zeigen Sie: In der symmetrischen Gruppe S_n lässt sich jedes Element als Produkt von „Nachbartranspositionen“ schreiben, d. h. Transpositionen der Form $(i, i+1), 1 \leq i < n$. *(5 Punkte)*

3. Bringen sie die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} -4 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 2 \\ 7 & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$$

durch elementare Zeilen- und Spalten-Transformationen auf Elementarteilerform, d. h. auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix},$$

mit $m_1 | m_2$ und $m_2 | m_3$. *(5 Punkte)*

4. Zeigen Sie:

(a) Das Produkt von zwei zyklischen Gruppen C_{n_1} und und C_{n_2} ist genau dann wieder zyklisch, wenn n_1 und n_2 teilerfremd sind.

(b) Für $1 \leq i \leq k$ seien p_i paarweise verschiedene Primzahlen und $r_i \in \mathbb{Z}$. Sei $n := \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$. Dann lässt sich die zyklische Gruppe C_n schreiben als

$$C_n \cong \bigtimes_{i=1}^{k} C_{p_i^{r_i}}.$$

(c) Der *Chinesische Restsatz*: Für $1 \leq i \leq r$ seien $n_i \in \mathbb{N}$ teilerfremde Zahlen und $a_i \in \mathbb{Z}$ beliebige Zahlen. Betrachten Sie das folgende System von Kongruenzen in der Unbekannten x:

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \mod n_1 \\ x &\equiv a_2 \mod n_2 \\ &\dots \\ x &\equiv a_r \mod n_r. \end{aligned}$$

Dieses System hat genau eine Lösung für x mit $0 \leq x < N := n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$.

Hinweis: Sei $\phi_i \colon \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ die natürliche Projektion. Daraus erhält man eine Abbildung $\phi \colon \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \bigtimes_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Behauptung dazu äquivalent ist, dass ϕ bijektiv ist. Die Bijektivität von ϕ bekommt man leicht, wenn man erst Aufgabenteil (b) auf die rechte Seite anwendet. *(5 Punkte)*