Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

4. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 11.11.02, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:
   (a) $[G,G] \lhd G$ und $G/[G,G]$ ist abelsch.
   (b) Sei $\rho\colon G \twoheadrightarrow G/[G,G]$ der kanonische Epimorphismus. $G/[G,G]$ erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Für alle $\phi\colon G \to G'$ mit G' abelsch gibt es genau ein $\bar{\phi}\colon G/[G,G] \to G'$ mit $\phi = \bar{\phi} \circ \rho$.
   (c) Sei $N \lhd G$ ein Normalteiler mit G/N abelsch. Dann ist $[G,G] < N$.

   (6 Punkte)

2. Sei G eine endliche, abelsche Gruppe und p eine Primzahl mit $p|\#G$. Dann gibt es ein $g \in G$ mit $\operatorname{ord}(g) = p$. *(4 Punkte)*

3. Sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\} < GL_n(K)$ und $U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\} < B$.
   Zeigen Sie:
   (a) $[B,B] = U$.
   (b) $D^iU = \left\{ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & & & * \\ & 1 & & & & \ddots & \\ & & 1 & \ddots & & & 0 \\ & & & 1 & & & \vdots \\ & 0 & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & 1 \end{array} \right) \right\}$ i Diagonalen mit Nullen $\Bigg\}$.
   (c) B ist auflösbar.

   (5 Punkte)

4. Zeigen Sie die folgende Variante des Hauptsatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen: Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gibt es Zahlen $r, t, m_1, \dots, m_t \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1 \dots, p_t$ (nicht notwendigerweise alle verschieden) mit

$$G \cong \mathbb{Z}^r \times C_{p_1^{m_1}} \times \dots \times C_{p_t^{m_t}}.$$

   Hinweis: Verwenden Sie die Version des Hauptsatzes aus der Vorlesung und die Tatsache, dass für a und b teilerfremd $C_a \times C_b \cong C_{ab}$ ist. (Letzteres wissen Sie ja schon vom vorigen Übungsblatt.) *(5 Punkte)*