Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

5. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 18.11.02, 16:15 Uhr, vor Beginn der Vorlesung

1. Sei G eine endliche Gruppe und $H < G$ eine Untergruppe. H operiere auf G durch Linkstranslation, d. h. $T_h(g) := hg$. Zeigen Sie:
   (a) Die Bahnen dieser Operation sind genau die Nebenklassen Hg.
   (b) Der Stabilisator von beliebigen $g \in G$ ist $\{e\}$.
   (c) Wenden Sie die Bahnengleichung auf diese Situation an und finden Sie so einen neuen Beweis vom Satz von Lagrange (d. h. $\#G = [G : H] \cdot \#H$).

   (4 Punkte)

2. Sei G eine Gruppe, p eine Primzahl und S eine p-Sylow-Untergruppe von G. Zeigen Sie: S ist genau dann ein Normalteiler von G, wenn S die einzige p-Sylow-Untergruppe von G ist. *(3 Punkte)*

3. Sei G eine Gruppe mit $\#G = p \cdot q$ Elementen, für p und q prim und $p < q$. Zeigen Sie:
   (a) G besitzt genau eine q-Sylow-Untergruppe.
   (b) G ist auflösbar.

   (4 Punkte)

4. *Die Quaternionen* $\mathbb{H}$*:*

   Betrachten Sie folgende Teilmenge von $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$:

   $$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

   Zeigen Sie:
   (a) $\mathbb{H}$ ist ein Unterring von $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.
   (b) $\mathbb{H}$ ist sogar ein Schiefkörper, d. h. jedes Element $h \in \mathbb{H} \smallsetminus \{0\}$ besitzt ein Inverses in $\mathbb{H}$.
   (c) Zeigen Sie: $\mathbb{H}$ besitzt einen Unterring, der isomorph zu $\mathbb{C}$ ist und einen, der isomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Hinweis: Betrachten Sie die Menge der Elemente aus $\mathbb{H}$ mit $b = 0$ bzw. mit $b = 0$ und $a = \bar{a}$.

   (5 Punkte)

5. Seien R_1 und R_2 Ringe, und sei $R := R_1 \times R_2$. Zeigen Sie:
   (a) Sind I_1 und I_2 Ideale von R_1 bzw. R_2, so ist $I_1 \times I_2$ Ideal von R.
   (b) Jedes Ideal von R hat diese Form. Genauer: Ist I ein Ideal von R, so gibt es Ideale I_1 und I_2 Ideale von R_1 bzw. R_2, so dass $I = I_1 \times I_2$.

   (4 Punkte)